数理解析研究所講究録 1277 巻 2002 年 94-105

任意の代数方程式が解をもつ可換 C^*-環の極大イデアル空間

山形大学 工学部 三浦 毅 (Takeshi Miura)
Department of Basic Technology,
Applied Mathematics and Physics,
Yamagata Univ.

太田工業高校 新島 一生 (Kazuki Niijima)
Gumma Prefectural
Ôta Technical High School.

この小論では特に断らない限り X をコンパクト Hausdorff 空間，$C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体からなる可換 Banach 環とする．Čirka [1] は正則関数の連続関数による近似に関連して次の結果を示した．

定理 1 (Čirka. [1]) *A を局所連結コンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環とする．このとき任意の $f \in A$ に対して $f = g^2$ なる $g \in A$ が存在すれば $A = C(X)$ である．*

ところで " 任意の $f \in C(X)$ に対して $f = g^2$ なる $g \in C(X)$ が存在する " という $C(X)$ の代数的性質は，X の位相構造に大きく依存することが次の例からも分かる．

例 1 (1) 任意の $f \in C([0,1])$ に対して $f = g^2$ なる $g \in C([0,1])$ が必ず存在する．

(2) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とする．このとき S^1 上の恒等関数 z に対しては $z = g^2$ なる $g \in C(S^1)$ は存在しない．

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対し $I_n = \{1/n\} \times [-1,1], I_0 = \{0\} \times [-1,1]$ とし，$I = \cup_{n=0}^{\infty} I_n$ とする．I 上の関数 f_0 を次で定義する：

$$f_0(0,t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ |t| e^{2\pi i/t}, & t \neq 0 \end{cases}$$

n が偶数であるとき

$$f_0(1/n,t) = \begin{cases} 1/n, & |t| \leq 1/n \\ |t| e^{2\pi i/t}, & |t| > 1/n \end{cases}$$

n が奇数であるとき

$$f_0(1/n,t)=\begin{cases}(1/n)e^{(nt+1)\pi i}, & |t|\leq 1/n\\ |t|e^{2\pi i/t}, & |t|>1/n.\end{cases}$$

このとき $f_0\in C(I)$ であるが，$f_0=g^2$ なる $g\in C(I)$ は存在しないことが分かる．

そこで $C(X)$ の代数的性質 “ 任意の $f\in C(X)$ に対して $f=g^2$ なる $g\in C(X)$ が存在する ” を空間 X の位相構造により特徴づける問題が考えられる．実際次の結果が知られている．ここで位相空間が局所連結であるとは，連結な開集合の全体が位相の開基をなすことであることに注意する．

定理 2 (Hatori-M. [6]) X を局所連結コンパクト *Hausdorff* 空間とする．このとき次は同値である．

(1) 任意の $f\in C(X)$ に対して $f=g^2$ なる $g\in C(X)$ が存在する．

(2) $\dim X\leq 1$ かつ $\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明な群となる．ここに $\dim X$ は X の被覆次元 (*cf.* [8]) を表し，$\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は定数層 $\mathbb{Z}$ に係数をもつ X の 1 次の *Čech cohomology* 群である．

時代は前後するが，一方で $C(X)$ のより一般の代数的性質を空間 X の位相構造で表現する結果が知られている．そのことを述べるため次の定義をする．

定義 1 $C(X)$ が代数的に閉じているとは，$C(X)$ の元を係数とする任意の *monic* 多項式が $C(X)$ に解をもつことである．つまり任意の非負整数 n と任意の $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in C(X)$ に対して $f\in C(X)$ が存在して

$$f^{n+1}(x)+a_n(x)f^n(x)+\cdots+a_1(x)f(x)+a_0(x)=0,\quad (x\in X)$$

となることである．特に任意の $a \in C(X)$ に対して $f^2(x) = a(x), (x \in X)$ なる $f \in C(X)$ が存在するとき，$C(X)$ は平方根に関して閉じているという．

Deckard-Pearcy は X が完全不連結コンパクト Hausdorff 空間のとき及び $X = [0,1]$ のとき，$C(X)$ は代数的に閉じていることを示した．このとき用いられた手法を応用して，Countryman [2] は代数的に閉じた $C(X)$ を X の位相の言葉で特徴づけた．その結果を述べるため，幾つかの定義を必要とする．

定義 2 位相空間 T が *A-space* であるとは，境界点が高々有限個であるような開集合の全体がその位相の開基をなすことである．

定義 3 位相空間 T が *hereditarily unicoherent* であるとは，任意の連結閉集合 M, N に対してその共通部分 $M \cap N$ がまた連結となることである．

定義 4 位相空間 T が *almost locally-connected* であるとは，T が次をみたす互いに素な連結閉集合族 $\{C_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を含まないことである：

> 各 C_n は $\cup_{n\in\mathbf{N}} C_n$ の閉包における開集合であり，$x_n, y_n \in C_n$ として得られる数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で異なる点に収束するものが存在する．

最後にコンパクト Hausdorff 空間 X の任意の連結成分 X_λ に対し，$C(X_\lambda)$ が代数的に閉じているとき X は C-space であるという．また簡単のため A-space かつ C-space を単に AC-space という．次の結果は Countryman [2] から直ちに分かる：

定理 3 (Countryman. [2]) X をコンパクト *Hausdorff* 空間とする．このとき (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) が成り立つ：

(1) X は *AC-space* である.

(2) $C(X)$ は代数的に閉じている.

(3) $C(X)$ は平方根に関して閉じている.

(4) X は *hereditarily unicoherent* かつ *almost locally-connected* である.

特に X が第一可算公理をみたせば (4) $\Rightarrow$ (1) が成り立つ. つまり, このとき上の条件 (1), (2), (3), (4) は全て同値である.

以上に述べたように, [2] と [6] によって $C(X)$ が平方根に関して閉じているための X の特徴づけがいくつか得られている. それではこれらの特徴づけにはどのような関係があるのだろうか？ここではそれらの関係を調べる. まず次の関係があることが分かる.

補題 4 X をコンパクト *Hausdorff* 空間とする. このとき $\dim X \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X,\mathbb{Z}) = 0$ ならば X は *hereditarily unicoherent* である.

証明. X が hereditarily unicoherent でなければ, $\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明な群でないことを示す. [2, Lemma 2.1] の証明より X のある閉部分集合 F と $h \in C(F)^{-1}$ が存在して, 任意の $f \in C(F)$ に対して $h \neq f^2$ であることが分かる. さて $\dim X \leq 1$ であることと, 任意の閉集合 K とその上の連続関数 u で $u(K) \subset S^1$ なるものに対して X 上の連続関数 $\tilde{u}$ で $\tilde{u}|_K = u$ かつ $\tilde{u}(X) \subset S^1$ をみたすものが存在することは同値であることが知られている (cf. [8]). よって $\tilde{h}|_F = h$ なる $\tilde{h} \in C(X)^{-1}$ が存在する. $h \neq f^2, (f \in C(F))$ であるから, $\tilde{h} \neq g^2, (g \in C(X))$ となる. このとき特に $\tilde{h} \notin \exp C(X)$ である. よって $\tilde{h} \in C(X)^{-1} \backslash \exp C(X)$ となる. Arens-Royden の定理 (cf. [5, Theorem 7.2 of Chapter III]) により $C(X)^{-1}/\exp C(X) = \check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ であるから, $\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明な群ではない. ∎

定理 5 X をコンパクト *Hausdorff* 空間とする．このとき X が *AC-space* ならば X の各連結成分 X_λ は局所連結で，$\dim X_\lambda \le 1$ かつ $\check{H}^1(X_\lambda, \mathbb{Z}) = 0$ となる．

特に X が第一可算公理をみたすとき，定理 3 の条件 (1), (2), (3), (4) は次と同値である：

(5) X は *almost locally-connected* で，X の各連結成分 X_λ は局所連結であり，

$\dim X_\lambda \le 1$ かつ $\check{H}^1(X_\lambda, \mathbb{Z}) = 0$ をみたす．

証明. [2, Remark (1)] により A-space X の各連結成分 X_λ は局所連結である．また定理 3 により，X が AC-space ならば $C(X)$ は平方根に関して閉じているので，$C(X_\lambda)$ も平方根に関して閉じている．いま各 X_λ は局所連結なので，定理 2 より $\dim X_\lambda \le 1$ かつ $\check{H}^1(X_\lambda, \mathbb{Z}) = 0$ となる．よって定理の前半部分が示された．

いま示したことから (1) $\Rightarrow$ (5) が成り立つ．また補題 4 により (5) $\Rightarrow$ (4) である．X が第一可算公理をみたすとき (1), (2), (3), (4) は同値であるから，以上により (1), (2), (3), (4), (5) の同値性が示された． ■

定理 3 によれば，X が第一可算公理をみたすとき，$C(X)$ が代数的に閉じていることと平方根に関して閉じていることは同値である．定理 2 では $C(X)$ が平方根に関して閉じているための局所連結な空間 X の特徴づけを与えている．それでは X が第一可算公理をみたすとは限らない局所連結な空間の場合も，$C(X)$ が平方根に関して閉じていることと代数的に閉じていることは同値であるだろうか？この問いに対する答えが次の結果である．

定理 6 X を局所連結コンパクト *Hausdorff* 空間とする．このとき以下は同値である．

(1) X は *AC-space* である．

(2) X は *C-space* である．

(3) $C(X)$ は代数的に閉じている.

(4) $C(X)$ は平方根に関して閉じている.

(5) $\dim X \leq 1$ かつ $\check{H}^1(X,\mathbb{Z})$ は自明な群である.

(6) X は *hereditarily unicoherent* である.

この結果を示すためにいくつかの準備を必要とする.

補題 7 (Lemma 2.2, [3]) $P(\cdot,\zeta)$ を $C(X)$ の元を係数とする任意の *monic* 多項式とする. つまりある非負整数 $n \in \mathbb{Z}$ と $a_0, a_1, \cdots, a_n \in C(X)$ に対して

$$P(x,\zeta) = \zeta^{n+1} + a_n(x)\zeta^n + \cdots + a_1(x)\zeta + a_0, \quad (x \in X)$$

である. $x_0 \in X$ を固定し, $z_0 \in \mathbb{C}$ を複素係数 *monic* 多項式 $P(x_0,\zeta) = 0$ の m 位の解とする. このとき $\varepsilon > 0$ に対して $P(x_0,\zeta) = 0$ が $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ に解をもたなければ, x_0 のある開近傍 V_0 が存在して任意の $y \in V_0$ に対して $P(y,\zeta) = 0$ は $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ に (重複度まで数えて) ちょうど m 個の解をもつ.

定義 5 S を連結な位相空間とする. $p \in S$ が $a, b \in S \setminus \{p\} : a \neq b$ を S において分離するとは, それぞれ a, b を含む互いに素な 2 つの開集合 A, B が存在して $S \setminus \{p\} = A \cup B$ となることである. p が $a, b \in S \setminus \{p\}$ の *cutting* であるとは, a, b を含む任意の連結閉部分集合が p を含むことである. 特に S が連結かつ局所連結なコンパクト *Hausdorff* 空間であるときは, [7, Theorem 3-6] により 2 つの概念は一致する.

X を連結なコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき [7, Theorem 2-10] により, 任意の $x, y \in X$ に対して x, y を含む (包含関係に関して) 極小な X の連結閉部分集合が存在す

る．さらに X が hereditarily unicoherent であれば，そのような集合はただ 1 つに限ることが分かるので，それを $E[x,y]$ で表わすことにする．簡単のため以下では次の記号を用いる：

$$E[x,y) = E[x,y] \setminus \{y\}, E(x,y] = E[x,y] \setminus \{x\}, E(x,y) = E[x,y] \setminus \{x,y\}.$$

このとき $E[x,y]$ は x,y を含む最小の連結閉集合であるから，先に注意したように $x \neq y$ のとき $E(x,y)$ の各点は x,y を X において分離する．最後に $E[x,y]$ の separation order を定義する．任意の $p,q \in E[x,y]$ に対して，$p = x$ あるいは p が x と y を X において分離するとき $p < q$ と定義する．さらに任意の $a,b \in E[x,y]$ に対して $a = b$ または $a < b$ であるとき $a \leq b$ と定義する．このとき $E[x,y]$ の separation order は全順序であることが分かる (cf. [7, Theorem 2-21])．さらに order topology と呼ばれる $E[x,y]$ の位相が次のように定義される．order topology の開集合は次の形の集合の和集合として表されるものである：

(1) 各 $a \in E[x,y]$ に対して集合 $\{b \in E[x,y] : b < a\}$.

(2) 各 $a \in E[x,y]$ に対して集合 $\{b \in E[x,y] : a < b\}$.

(3) 各 $a,b \in E[x,y]; a < b$ に対して集合 $\{c \in E[x,y] : a < c < b\}$.

このとき $E[x,y]$ の order topology は $E[x,y]$ の相対位相と同相である (cf. [7, Theorem 2-25])．separation order の定義より $E[x,y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$ である．最後に $E[x,y]$ の空でない任意の部分集合は，separation order に関して最小上界をもつことが [7, Theorem 2-26] により分かる．

以上の準備のもと，定理 6 を証明する．

定理 6 の証明．まず定理 2 より条件 (4) と (5) は同値である．また定理 3 より (4) $\Rightarrow$ (6) であるから，(2) $\Rightarrow$ (3) 及び (6) $\Rightarrow$ (1) を示せばよい．

(2) $\Rightarrow$ (3) X は局所連結であるから，X の各連結成分は開集合である．よって X は高々有限個の連結成分からなる．よって X が C-space ならば $C(X)$ は代数的に閉じている．

(6) $\Rightarrow$ (1) X は hereditarily unicoherent であるとする．このとき X は AC-space であることを示す．さて，いま X は局所連結であるから X の各連結成分は開かつ閉集合である．そこで一般性を失うことなく X は連結であると仮定してよいのでそうする．

はじめに X は A-space であることを示す．$x_0 \in X$ を任意に取り，V を x_0 の任意の開近傍とする．$X \setminus V \neq \emptyset$ の場合を考えれば十分である．各 $x \in X \setminus V$ に対して $E[x_0, x]$ を x_0, x を含む最小の連結閉集合とする．このとき $y_x \in V \cap E(x_0, x)$ は x_0 と x を X において分離する．すなわち次をみたす開集合 A_x, B_x が存在する．

$$x_0 \in A_x, x \in B_x, A_x \cap B_x = \emptyset \text{ かつ } X \setminus \{y_x\} = A_x \cup B_x.$$

このとき y_x は A_x のただ1つの境界点であることに注意する．$X \setminus V$ はコンパクトなので，有限個の点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ が存在して $X \setminus V \subset \cup_{j=1}^m B_{x_j}$ となる．$V_0 = \cap_{j=1}^m A_{x_j}$ とおくと，V_0 は V に含まれる x_0 の開近傍でその境界点は高々 m 個である．よって高々有限個の境界点をもつ開集合の全体は X の開基をなす．すなわち X は A-space である．

次に $C(X)$ は代数的に閉じていることを示す．そこで $P(\cdot, \zeta)$ を $C(X)$ 上の任意の monic 多項式とし，次をみたす X の部分集合 D と D 上の複素数値連続関数 f の組 (D, f) 全体からなる集合を $\mathfrak{D}$ とする：

$$\text{任意の } a, b \in D \text{ に対して } E[a, b] \subset D \text{ かつ } P(x, f(x)) = 0, (x \in D) \text{ である．}$$

任意の $a, b \in D$ に対して $E[a, b] \subset D$ であるから，集合 D は必ず連結になることが分かる．任意の $(D_1, f_1), (D_2, f_2) \in \mathfrak{D}$ に対して，$D_1 \subset D_2$ かつ $f_2|_{D_1} = f_1$ なるとき $(D_1, f_1) \preceq (D_2, f_2)$

と定義する．このとき $\leq$ は $\mathfrak{D}$ の順序である．

Zorn の補題を用いて $\mathfrak{D}$ には極大元が存在することを示す．そのため $\{(D_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $\mathfrak{D}$ の任意の全順序部分集合とする．いま $D_0 = \cup_\alpha D_\alpha$ とおく．また任意の $x \in D_0$ に対し，$x \in D_\alpha$ なる $\alpha \in A$ があるので，$f_\alpha(x)$ を対応させる関数を f_0 とすると，$\{(D_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が全順序であることから f_0 は well-defined である．D_0, f_0 の定め方から，$P(x, f_0(x)) = 0, (x \in D_0)$ である．f_0 は D_0 上連続であることを示す．そのため，そうでないと仮定し矛盾を導く．つまりある $x_0 \in D_0$ と $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，x_0 の任意の開近傍 V に対して $f_0(V \cap D_0) \not\subset \{z \in \mathbb{C} : |z - f_0(x_0)| < \varepsilon_0\}$ となる．$z_0, z_1, z_2, \cdots, z_k$ を $P(x_0, \zeta) = 0$ の異なる全ての解とする．このとき $z_0 = f_0(x_0)$ として一般性を失わないのでそうする．さて，$2\varepsilon_1 = \min\{|z_i - z_j| : i \neq j\}$ とおき，$\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ とする．このとき各 z_j に補題 7 を適用すると，x_0 の開近傍 $V(x_0)$ が存在して任意の $x \in V(x_0)$ に対して $P(x, w) = 0$ ならば $w \in \cup_{j=1}^k \{z \in \mathbb{C} : |z - z_j| < \varepsilon\}$ である．仮定より $f_0(V(x_0) \cap D_0) \not\subset \{z \in \mathbb{C} : |z - f_0(x_0)| < \varepsilon_0\}$ であるから，$|f_0(y_0) - f_0(x_0)| \geq \varepsilon_0$ なる $y_0 \in V(x_0) \cap D_0$ が存在する．$x_0, y_0 \in D_\beta$ とすると $E[x_0, y_0] \subset D_\beta$ である．ところが $f_\beta(E[x_0, y_0]) = f_0(E[x_0, y_0]) \subset \cup_{j=1}^k \{z \in \mathbb{C} : |z - z_j| < \varepsilon\}$ であるから，これは $f_\beta(E[x_0, y_0])$ が連結であることに反する．よって f_0 は D_0 上連続であることが示された．ゆえに Zorn の補題から $\mathfrak{D}$ は極大元をもつ．

(D^*, f^*) を $\mathfrak{D}$ の 1 つの極大元とする．このとき $D^* = X$ であることを示す．そこで $X \backslash D^* \neq \emptyset$ と仮定すると，$b \in X \backslash D^*$ が存在する．また $a \in D^*$ を任意に固定する．m を $E[a, b] \cap D^* \subset E[a, b]$ の separeation order に関する最小上界とする．$E[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$ であるから $E[a, m) \subset D^*$ かつ $E(m, b] \subset X \setminus D^*$ である．

いま $m \in D^*$ であることを示す．もしも $m \in X \setminus D^*$ とすると，(D^*, f^*) の極大性から

f^* の $D^* \cup \{m\}$ への連続拡張は存在しない．実際，$D^* \cup \{m\} = D^* \cup E[a,m]$ であるから $D^* \cup \{m\}$ は連結である．また任意の $c \in D^*$ に対して

$$E[c,m] = E[c,a] \cup E[a,m] \subset D^*.$$

さて，f^* の $D^* \cup \{m\}$ への連続拡張 $\tilde{f}^*$ が存在したとする．このとき関数 $x \mapsto P(x, \tilde{f}^*(x))$ は $D^* \cup \{m\}$ 上連続である．したがって連続関数による $D^* \cup \{m\}$ の像はまた連結であるが，$P(x, f(x)) = 0, (x \in D^*)$ であるから $P(x, \tilde{f}^*(x)) = 0, (x \in D^* \cup \{m\})$ となる．ゆえに $(D^*, f^*) \subsetneq (D^* \cup \{m\}, \tilde{f}^*)$ となるが，これは (D^*, f^*) の極大性に反する．したがって f^* の $D^* \cup \{m\}$ への連続拡張は存在しないことが示された．

さて，f^* の $D^* \cup \{m\}$ への連続拡張は存在しないので，ある $\varepsilon_1 > 0$ が存在して，m の任意の開近傍 V に対して次が成り立つ：ある $x, y \in V \cap D^*$ が存在して，$|f^*(x) - f^*(y)| \geq \varepsilon_1$ である．$P(m,z) = 0$ の異なる全ての解を $z_1, z_2, \cdots, z_l$ とし，$\varepsilon_2 = \min\{|z_i - z_j| : i \neq j\}$ とおく．さらに $2\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とすると，補題 7 により次をみたす m の連結な開近傍 $V(m)$ が存在する：任意の $y \in V(m)$ に対して $P(y,w) = 0$ ならば $w \in \cup_{j=1}^{k}\{z \in \mathbb{C} : |z - z_j| < \varepsilon_3\}$ である．$V(m)$ の連結性から $E[x,y] \subset V(m), (x, y \in V(m))$ である．よって $E[x,y] \subset D \cap V(m), (x, y \in D \cap V(m))$ となるので $D \cap V(m)$ は連結でなければならない．したがって f^* の連続性から $f^*(D \cap V(m))$ も連結である．他方で f^* の連続拡張が存在しないことから，$|f^*(p) - f^*(q)| \geq \varepsilon_1$ なる $p, q \in V(m) \cap D$ が存在する．$\varepsilon_1 \geq 2\varepsilon_3$ より $f^*(p), f^*(q)$ は $\cup_{j=1}^{k}\{z \in \mathbb{C} : |z - z_j| < \varepsilon_3\}$ の中の異なる円板に属する．ところがこれは $f^*(D \cap V(m))$ の連結性に反する．以上により $m \in D^*$ であることが示された．

最後に，$E[m,b]$ は全順序かつ order-complete なので [4, Theorem 3] により

$$P(x,z) = (z - f_1(x))(z - f_2(x)) \cdots (z - f_k(x)), \quad (x \in E[m,b])$$

なる $f_1, f_2, \cdots, f_k \in C(E[m,b])$ が存在する．このとき $f^*(m) = f_1(m)$ としてよいのでそうする．また $\tilde{D} = D^* \cup E[m,b]$ とおくと $D^* \setminus \{m\}, E(m,b]$ はともに $\tilde{D}$ の開集合なので，

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f^*(x), & (x \in D^*), \\ f_1(x), & (x \in E[m,b]) \end{cases}$$

は well-defined で $\tilde{D}$ 上連続である．また $(D^*, f^*) \subsetneq (\tilde{D}, \tilde{f})$ であるから，これは (D^*, f^*) の極大性に反する．以上より $D^* = X$ となることが示された． ■

参考文献

[1] E. M. Čirka, *Approximation of continuous functions by functions holomorphic on Jordan arcs in $\mathbb{C}^n$*, Soviet Math. **7** (1966), pp. 336–338.

[2] R.S. Countryman, Jr, *On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed*, Pacific J. Math., **20** (1967), 433-448.

[3] D. Deckard and C. Pearcy, *On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 322-328.

[4] D. Deckard and C. Pearcy, *On algebraic closure in function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 259-263.

[5] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, N. J. 1969.

[6] O. Hatori and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1185-1189.

[7] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

[8] K. Morita, *Dimension of general topological spaces*, Surveys in general topology (G. M. Reed ed.) Academic Press N. Y. 1980