数理解析研究所講究録 1277 巻 2002 年 120-135



# $\mathbb{C}^n$ の単位球 $B$ 上の Kim 空間

信州大学理学部　真次康夫 (Yasuo Matsugu)
植木誠一郎 (Sei-ichiro Ueki)
Faculty of Science, Shinshu University

## 1 Introduction

$B \equiv B_n$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球, $S \equiv \partial B$ を単位球面とする. $\sigma$ は $S$ 上の Lebesgue 測度であり, $\sigma(S) = 1$ となるように正規化したものを表す. $H(B)$ は $B$ 上の正則関数の全体を表す.

各 $p \in [1, \infty)$ に対し, $B$ 上の Kim 空間 $M^p(B)$ を次のように定義する:

$$M^p(B) \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in H(B) : \int_S \{\log(1 + Mf)\}^p \, d\sigma < \infty \right\}.$$

但し, $Mf(\zeta) \equiv \sup\{ |f(r\zeta)| : 0 < r < 1 \}$ $(\zeta \in S)$ である.

$B$ 上の Privalov 空間 $N^p(B)$ $(1 < p < \infty)$, Smirnov 族 $N^*(B)$ をそれぞれ次のように定義する:

$$N^p(B) \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in H(B) : \sup_{0<r<1} \int_S \{\log(1 + |f_r|)\}^p \, d\sigma < \infty \right\}.$$

但し, $f_r(\zeta) \equiv f(r\zeta)$ $(0 < r < 1, \zeta \in S)$ である.

$$N^*(B) \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in N(B) : \lim_{r \uparrow 1} \int_S \log(1 + |f_r|) \, d\sigma = \int_S \log(1 + |f^*|) \, d\sigma \right\}.$$

但し, $N(B)$ は $B$ 上の Nevanlinna 空間であり, 各 $f \in N(B)$ に対し, $S$ のほとんど全ての点 $\zeta$ で $f^*(\zeta) \equiv \lim_{r \uparrow 1} f_r(\zeta)$ が存在する. 便宜上, $N^*(B)$ を $N^1(B)$ で表す.

各 $p \in [1, \infty)$ に対し, $M^p(B)$ 上の $\| \cdot \|_{M^p}$, $d_{M^p}(\cdot, \cdot)$, $N^p(B)$ 上の $\| \cdot \|_{N^p}$, $d_{N^p}(\cdot, \cdot)$ をそれぞれ次のように定義する:

$$\|f\|_{M^p} = \left[ \int_S \{\log(1 + Mf)\}^p \, d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in M^p(B)),$$

$$\|f\|_{N^p} = \left[ \int_S \{\log(1 + |f^*|)\}^p \, d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in N^p(B)),$$

$$d_{M^p}(f, g) = \|f - g\|_{M^p} \qquad (f, g \in M^p(B)),$$

$$d_{N^p}(f,g) = \|f-g\|_{N^p} \qquad (f,g \in N^p(B)).$$

この時, $\|\cdot\|_{M^p}$ は次の 5 つの条件を満たす:

(i) 各 $f \in M^p(B)$ に対して, $0 \leq \|f\|_{M^p} < \infty$.

(ii) $\|f\|_{M^p} = 0$ となるのは $B$ 上で $f=0$ の時に限る.

(iii) $f \in M^p(B)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\min\{1,|\lambda|\}\|f\|_{M^p} \leq \|\lambda f\|_{M^p} \leq \max\{1,|\lambda|\}\|f\|_{M^p}$$

が成り立つ.

(iv) $\quad \|f+g\|_{M^p} \leq \|f\|_{M^p} + \|g\|_{M^p} \qquad (f,g \in M^p(B))$.

(v) $\quad \|f\cdot g\|_{M^p} \leq \|f\|_{M^p} + \|g\|_{M^p} \qquad (f,g \in M^p(B))$.

$\|\cdot\|_{M^p}$ のこの性質により $M^p(B)$ $(1 \leq p < \infty)$ は線型空間であり, 積に関しても閉じている. 従って, algebra をなす. また, $d_{M^p}$ は $M^p(B)$ 上の平行移動に関して不変な距離になる. この距離に関して $M^p(B)$ は完備であり, その加法, 乗法, スカラー乗法は何れも連続である. 従って, $(M^p(B), d_{M^p})$ は $F$-algebra をなす. $N^p(B)$ $(1 \leq p < \infty)$ も同様に, 距離 $d_{N^p}$ に関して $F$-algebra をなす. また, これらの関数空間の間には次のような関係が成り立つことが知られている [1, 2, 6, 13]:

(i) $\quad M^p(B) = N^p(B) \qquad (1 < p < \infty)$.

(ii) $\quad N^q(B) \subsetneq N^p(B) \subsetneq M^1(B) \subsetneq N^*(B) \qquad (1 < p < q < \infty)$.

Kim 空間 $M^1(B_1)$ は H. O. Kim [5] の中で最初に導入され, 考察された関数空間である. $n \geq 2$ の場合も含めて, $M^p(B)$ については [2, 4, 6, 13] 等で論じられている.

本講演では Kim 空間 $M^p(B)$ の等距離写像, 環準同型, 及び $B$ 上の正則写像による合成作用素が有界作用素である為の十分条件について論ずる.

## 2 Preliminaries

$1 < \alpha < \infty$, $\zeta \in S$ に対し, the admissible approach region $D_\alpha(\zeta)$, 及び $B$ 上の複素数値関数 $f$ の the admissible maximal function $M_\alpha f$ をそれぞれ次のように定義する:

$$D_\alpha(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \left\{ z \in B \,:\, |1-\langle z,\zeta\rangle| < \frac{\alpha}{2}(1-|z|^2) \right\},$$

$$M_\alpha f(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \sup\{\, |f(z)| \,:\, z \in D_\alpha(\zeta)\,\}.$$

**Lemma 1** ([11] Theorem 5.4.10). $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < \infty$ とする. この時, ある定数 $0 < A(\alpha, p) < \infty$ が存在して, 任意の $f \in L^p(\sigma)$ に対し,

$$\int_S \{M_\alpha P[f]\}^p \, d\sigma \le A(\alpha, p) \int_S |f|^p \, d\sigma$$

が成り立つ. 但し, $P[f]$ は $f$ の Poisson 積分である:

$$P[f](z) = \int_S P(z, \zeta) f(\zeta) \, d\sigma(\zeta), \quad P(z, \zeta) = \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^{2n}}.$$

**Lemma 2** ([11] Theorem 5.6.2). $f \in H(B)$ とする. $\varphi$ は恒等的には値 0 を取らない $[-\infty, \infty)$ 上の非負非減少な凸関数とする. $v \equiv \varphi(\log|f|)$ とおき, $I_p$ $(1 \le p < \infty)$ を次のように定義する:

$$I_p \overset{\text{def}}{=} \sup_{0<r<1} \left\{ \int_S v_r^p \, d\sigma \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

この時, 次が成り立つ:

(a) $I_1 < \infty$ ならば, $S$ 上の正値 Borel 測度 $\mu$ が存在し, 次が成立する:

(i) $\quad v(z) \le P[\mu](z) \qquad (z \in B)$.

但し, $P[\mu]$ は $\mu$ の Poisson 積分である.

(ii) $\quad \|\mu\| = I_1$.

(b) $1 < p < \infty$, $I_p < \infty$ ならば, ある $h \in L^p(\sigma)$ が存在し, 次が成立する:

(i) $\quad v(z) \le P[h](z) \qquad (z \in B)$.

(ii) $\quad \|h\|_{L^p(\sigma)} = I_p$.

次の Lemma 3 は Lemma 1, Lemma 2 を用いて容易に示される:

**Lemma 3.** $1 < p < \infty$, $2 < \alpha < \infty$ とする. この時, ある定数 $0 < B(\alpha, p) < \infty$ が存在して, 任意の $f \in N^p(B)$ に対し,

$$\|f\|_{M^p} \le B(\alpha, p) \|f\|_{N^p}$$

が成り立つ.

$\zeta \in S$, $h > 0$ に対して,

$$\mathcal{S}(\zeta, h) \equiv \{ z \in \overline{B} : |1 - \langle z, \zeta \rangle| < h \},$$

$$B(\zeta, h) \equiv \mathcal{S}(\zeta, h) \cap B,$$

$$S(\zeta, h) \equiv \mathcal{S}(\zeta, h) \cap S.$$

と定義する.

次の Lemma 4 は S. C. Power [9] と同様の議論により示される (cf. [9], pp. 13 - 15):

**Lemma 4.** $1 < p < \infty$ とし, $\mu$ を $B$ 上の有限な正値 Borel 測度とする. この測度 $\mu$ に対して, ある定数 $0 < C < \infty$ が存在し,

$$\mu(B(\zeta, h)) \le C \cdot \sigma(S(\zeta, h)) \qquad (\zeta \in S,\ h > 0)$$

が成り立つと仮定する. この時, ある定数 $0 < K,\ K' < \infty$ が存在して, 次が成立する:

(i) 任意の $f \in N^p(B)$ に対し,

$$\int_B \{\log(1 + |f|)\}^p \, d\mu \le K \int_S \{\log(1 + |f^*|)\}^p \, d\sigma.$$

(ii) 任意の $f \in M^1(B)$ に対し,

$$\int_B \log(1 + |f|) \, d\mu \le K' \int_S \log(1 + |Mf|) \, d\sigma.$$

**Lemma 5** ([7], p. 238, Lemma 1.3). $\lambda$ を $S$ 上の正値 Borel 測度とする. この測度 $\lambda$ に対し, ある定数 $0 < C < \infty$ が存在して,

$$\lambda(S(\zeta, h)) \le C \cdot h^n \qquad (\zeta \in S,\ h > 0)$$

が成り立つと仮定する. この時, 次が成立する:

(i) $g \in L^\infty(\sigma)$ が存在して, $d\lambda = g d\sigma$.

(ii) 定数 $C$ と次元 $n$ にのみ依存する定数 $0 < C' < \infty$ が存在し,

$$\|g\|_{L^\infty} \le C'.$$

次の Lemma 6 は Lemma 4 と Lemma 5 を用いて示される:

**Lemma 6.** $1 < p < \infty$ とし, $\mu$ を $\overline{B}$ 上の正値 Borel 測度とする. この測度 $\mu$ に対し, ある定数 $0 < C < \infty$ が存在して,

$$\mu(S(\zeta, h)) \le C \cdot h^n \qquad (\zeta \in S,\ h > 0) \tag{1}$$

が成り立つと仮定する. この時, ある定数 $0 < K,\ K' < \infty$ が存在し, 次が成立する:

(i) 任意の $f \in N^p(B)$ に対して,

$$\int_{\overline{B}} \{\log(1 + |f|)\}^p \, d\mu \le K \int_S \{\log(1 + |f^*|)\}^p \, d\sigma. \tag{2}$$

(ii) 任意の $f \in M^1(B)$ に対して,

$$\int_{\overline{B}} \log(1+|f|)\,d\mu \le K' \int_S \log(1+|Mf|)\,d\sigma. \tag{3}$$

*Proof.* (cf. [7], p. 239) $\zeta \in S$, $h>0$ とする. $\mu_1 \equiv \mu|_B$, $\mu_2 \equiv \mu|_S$ とおけば $\mathcal{S}(\zeta,h)$, $B(\zeta,h)$, $S(\zeta,h)$ の定義, 及び (1) により

$$\mu_1(B(\zeta,h)) \le C\cdot h^n, \tag{4}$$

$$\mu_2(S(\zeta,h)) \le C\cdot h^n \tag{5}$$

が成り立つ. また, [11] Proposition 5.1.4 より定数 $0<A_1$, $A_2<\infty$ が存在し,

$$A_1\cdot h^n \le \sigma(S(\zeta,h)) \le A_2\cdot h^n \tag{6}$$

が成り立つ.

(4), (6) より

$$\mu_1(B(\zeta,h)) \le \frac{C}{A_1}\sigma(S(\zeta,h))$$

であるから Lemma 4, (i) により, 定数 $0<K_1<\infty$ が存在して, 次が成り立つ:

$$\int_B \{\log(1+|f|)\}^p\,d\mu_1 \le K_1 \int_S \{\log(1+|f^*|)\}^p\,d\sigma \qquad (f\in N^p(B)).$$

(5) と Lemma 5 より, ある $g\in L^\infty(\sigma)$ と定数 $0<K_2<\infty$ が存在して, $d\mu_2 = g\,d\sigma$, $\|g\|_{L^\infty} \le K_2$ である. 従って, 各 $f\in N^p(B)$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{B}} \{\log(1+|f|)\}^p\,d\mu \\
&= \int_B \{\log(1+|f|)\}^p\,d\mu_1 + \int_S \{\log(1+|f^*|)\}\,d\mu_2 \\
&\le K_1 \int_S \{\log(1+|f^*|)\}^p\,d\sigma + K_2 \int_S \{\log(1+|f^*|)\}^p\,d\sigma \\
&= (K_1+K_2)\int_S \{\log(1+|f^*|)\}^p\,d\sigma.
\end{aligned}$$

ゆえに (i) が成り立つ. (ii) は Lemma 4, (ii) と Lemma 5 を用いて同様に示される. □

# 3 Main Results

$M^p(B)$ $(1\le p<\infty)$ から $M^p(B)$ への線型写像 $A$ が各 $f\in M^p(B)$ に対して,

$$\|Af\|_{M^p} = \|f\|_{M^p}$$

を満たす時, $A$ を $M^p(B)$ から $M^p(B)$ への等距離写像という.

次の Theorem 1, Theorem 2 は A. V. Subbotin [13] による結果である:

**Theorem 1 (A. V. Subbotin [13]).** $1 \leq p < \infty$ とする. $A$ を $M^p(B)$ から $M^p(B)$ の上への等距離写像とする時, $|k| = 1$ を満たす複素数 $k$ と $\mathbb{C}^n$ 上の unitary 変換 $U$ が存在し,

$$Af = k \cdot (f \circ U) \qquad (f \in M^p(B))$$

が成り立つ.

*Proof.* [13] p. 78, Theorem 3. □

**Theorem 2 (A. V. Subbotin [13]).** $1 \leq p < \infty$, $\Psi$ を $B$ 上の内関数 (inner function) とする. この $\Psi$ により写像 $A$ を次のように定義する:

$$Af = \Psi \cdot f \qquad (f \in M^p(B)).$$

この時, $A$ が $M^p(B)$ から $M^p(B)$ への等距離写像ならば, $\Psi$ は $B$ 上で定数関数である.

*Proof.* [13] p. 78, Theorem 4. □

次の Theorem 3, Theorem 4, Corollary 1 は一変数の結果 [5, 6, 8] の多変数版である. 結果は Privalov 空間の場合と全く同様にして示される (cf. [15]).

**Theorem 3.** $1 \leq p < \infty$ とする. $\gamma$ を $M^p(B)$ 上の連続な自明でない (すなわち $\gamma \not\equiv 0$) 乗法的線型汎関数とする. この時, $B$ の点 $w$ が存在して $\gamma$ は

$$\gamma(f) = f(w) \qquad (f \in M^p(B))$$

を満たす.

*Proof.* [15], Theorem 1 の証明と同様. □

**Theorem 4.** $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ とする. $\Gamma$ を $M^q(B)$ から $M^p(B)$ への連続な環準同型とし, $\Gamma(M^q(B)) \supsetneqq \mathbb{C}$ を満たすものとする. この時, $B$ から $B$ への正則写像 $\varphi$ が存在し, $\Gamma$ は次の形で与えられる:

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi \qquad (f \in M^q(B)).$$

*Proof.* [15], Theorem 2 の証明と同様. □

**Corollary 1.** $1 \le p < \infty$, $1 \le q < \infty$ とする. $\Gamma$ を $M^q(B)$ から $M^p(B)$ の上への連続な同型写像とするとき, 次が成立する:

(i) $B$ から $B$ の上への両正則写像 $\varphi$ が存在し, $\Gamma$ は

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi \qquad (f \in M^q(B))$$

を満たす.

(ii) $p = q$.

*Proof.* [15], Corollary 1 の証明と同様. □

次の Theorem 5, Theorem 6, Theorem 7 は単位円板上の定理 ([1] Theorem 3.1, 4.1, 5.3) を単位球 $B$ 上で考察したものである:

**Theorem 5.** $1 \le p < \infty, 1 \le q < \infty$ とする. $\varphi$ が $B$ から $B$ への正則写像であり,

$$\sup_{\eta \in S} \int_S \sup_{0<r<1} \left( \frac{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}{|1 - \langle \varphi(r\zeta), \eta \rangle|^2} \right)^{np} d\sigma(\zeta) < \infty$$

を満たす時, 次が成立する:

(i) $\quad \|f \circ \varphi\|_{M^p} \le K \|f\|_N \quad (f \in H(B))$.

但し,

$$K = \sup_{\eta \in S} \left[ \int_S \sup_{0<r<1} \left( \frac{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}{|1 - \langle \varphi(r\zeta), \eta \rangle|^2} \right)^{np} d\sigma(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\|f\|_N = \sup_{0<r<1} \int_S \log(1 + |f_r|)\, d\sigma$$

である.

(ii) $\quad C_\varphi(N(B)) \subset M^p(B)$.

(iii) $\quad C_\varphi : N(B) \longrightarrow M^p(B)$ は連続である.

(iv) $\quad C_\varphi : M^q(B) \longrightarrow M^p(B)$ は有界である.

*Proof.* (cf. [1], p. 383, Theorem 3.1) $f \in N(B)$ に対し, Lemma 2, (a) により $S$ 上の正値 Borel 測度 $\mu$ が存在し, 次が成立する:

$$\log(1 + |f(z)|) \le P[\mu](z) \qquad (z \in B), \tag{1}$$

$$\|\mu\| = \|f\|_N. \tag{2}$$

各 $\zeta \in S$ に対し, (1) により

$$\int_S \{\log(1 + M(f\circ\varphi)(\zeta))\}^p \, d\sigma(\zeta) \le \int_S \sup_{0<r<1} \{P[\mu](\varphi(r\zeta))\}^p \, d\sigma(\zeta). \tag{3}$$

また, Hölder の不等式より

$$\left[\int_S \sup_{0<r<1} P(\varphi(r\zeta),\eta)\, d\mu(\eta)\right]^p \le \int_S \sup_{0<r<1} \{P(\varphi(r\zeta),\eta)\}^p \, d\mu(\eta) \cdot \|\mu\|^{p-1} \tag{4}$$

が成立する. (2), (3), (4) より

$$\begin{aligned}
&\int_S \{\log(1 + |M(f\circ\varphi)(\zeta)|)\}^p \, d\sigma(\zeta) \\
&\le \|f\|_N^{p-1} \cdot \int_S d\sigma(\zeta) \int_S \sup_{0<r<1} \{P(\varphi(r\zeta),\eta)\}^p \, d\mu(\eta) \\
&\le K^p \|f\|_N^{p-1} \cdot \|\mu\| \\
&= K^p \|f\|_N^p.
\end{aligned}$$

従って, (i) が成り立つ. (ii), (iii) は (i) から従う.

各 $f \in M^q(B)$ に対し, $\|f\|_N \le \|f\|_{M^q}$ である. また, $1 \le q < \infty$ であるから Hölder の不等式より $\|f\|_{M^1} \le \|f\|_{M^q}$ が成り立つ. 従って (i) より

$$\|f\circ\varphi\|_{M^p} \le K\|f\|_{M^q} \qquad (f \in M^q(B))$$

である. この不等式により $C_\varphi : M^q(B) \longrightarrow M^p(B)$ は連続であり, 従って有界である. □

**Theorem 6.** $1 < p < \infty, 1 \le q < \infty$ とし, $\varphi$ は次の 2 条件を満たす $B$ から $B$ への正則写像とする:

(a) $S$ 上のほとんど全ての点 $\zeta$ に対し, $|\varphi^*(\zeta)| < 1$.

(b)
$$\sup_{\eta\in S} \int_S \left(\frac{1 - |\varphi^*(\zeta)|^2}{|1 - \langle\varphi^*(\zeta),\eta\rangle|^2}\right)^{np} d\sigma(\zeta) < \infty.$$

この時, 次が成立する:

(i) ある定数 $0 < K_1 < \infty$ が存在し, $f \in N^*(B)$ に対して,

$$\|f\circ\varphi\|_{N^*} \le K_1 \|f\|_{N^*}$$

が成り立つ.

(ii) ある定数 $0 < K_2 < \infty$ が存在し, $f \in N^*(B)$ に対して,

$$\|f \circ \varphi\|_{M^p} \leq K_2 \|f\|_{N^*}$$

が成り立つ.

(iii) $\quad C_\varphi : N^*(B) \longrightarrow N^*(B)$ は有界である.

(iv) $\quad C_\varphi : M^q(B) \longrightarrow N^*(B)$ は有界である.

(v) $\quad C_\varphi : N^*(B) \longrightarrow M^p(B)$ は有界である.

(vi) $\quad C_\varphi : M^q(B) \longrightarrow M^p(B)$ は有界である.

*Proof.* (cf. [1], p. 388, Theorem 4.1) $f \in N^*(B)$ とする. Lemma 2, (a) により $S$ 上の正値 Borel 測度 $\mu$ が存在し, 次が成立する:

$$\log(1 + |f(z)|) \leq P[\mu](z) \qquad (z \in B), \tag{1}$$

$$\|\mu\| = \|f\|_{N^*}. \tag{2}$$

仮定 (a) により a.e. $\zeta \in S$ に対し, $(f \circ \varphi)^*(\zeta) = f(\varphi^*(\zeta))$, $\varphi^*(\zeta) \in B$ である. 従って, (1) より

$$\log(1 + |(f \circ \varphi)^*(\zeta)|) \leq \int_S P(\varphi^*(\zeta), \eta)\, d\mu(\eta) \qquad (\text{a.e. } \zeta \in \mathrm{S}) \tag{3}$$

が成り立つ. また, Hölder の不等式より

$$\int_S P(\varphi^*(\zeta), \eta)\, d\mu(\eta) \leq \left[\int_S \{P(\varphi^*(\zeta), \eta)\}^p \, d\mu(\eta)\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|\mu\|^{\frac{1}{p'}}. \tag{4}$$

但し, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ である. 従って, (2), (3), (4) より

$$\begin{aligned}
&\int_S \log(1 + |(f \circ \varphi)^*(\zeta)|)\, d\sigma(\zeta) \\
&\leq \|\mu\|^{\frac{1}{p'}} \cdot \int_S \left[\int_S \{P(\varphi^*(\zeta), \eta)\}^p \, d\mu(\eta)\right]^{\frac{1}{p}} d\sigma(\zeta) \\
&\leq \|\mu\|^{\frac{1}{p'}} \cdot \left[\int_S d\sigma(\zeta) \int_S \{P(\varphi^*(\zeta), \eta)\}^p \, d\mu(\eta)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\mu\|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} \cdot \sup_{\eta \in S} \left[\int_S \{P(\varphi^*(\zeta), \eta)\}^p \, d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$K_1 \equiv \sup_{\eta \in S} \left[\int_S \{P(\varphi^*(\zeta), \eta)\}^p \, d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{1}{p}}$$

とおくと, $\|\mu\|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} = \|\mu\| = \|f\|_{N^*}$ より

$$\int_S \log(1+|(f\circ\varphi)^*|)\,d\sigma \le K_1\|f\|_{N^*} \tag{5}$$

が成り立つ.

the ball algebra $A(B)$ は $N^*(B)$ において稠密であるから $A(B)$ に属する関数列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して,

$$\lim_{j\to\infty}\|f_j - f\|_{N^*} = 0 \tag{6}$$

である. 各 $j\in\mathbb{N}$ に対し, $f_j\circ\varphi \in H^\infty(B) \subset N^*(B)$ であるから (5) より

$$\|f_j\circ\varphi\|_{N^*} \le K_1\|f_j\|_{N^*} \tag{7}$$

が成り立つ. (6), (7) より $\{f_j\circ\varphi\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $N^*(B)$ の Cauchy 列であることが従う. $N^*(B)$ の完備性より $g\in N^*(B)$ が存在し,

$$\lim_{j\to\infty}\|f_j\circ\varphi - g\|_{N^*} = 0 \tag{8}$$

である. $N^*(B)$ における収束は $B$ 上の広義一様収束を導くから (6), (8) により $\lim\limits_{j\to\infty} f_j = f$, $\lim\limits_{j\to\infty} f_j\circ\varphi = g$ は共に $B$ 上で広義一様収束する. 従って, $B$ の各点で収束するので $g(z) = (f\circ\varphi)(z)$ $(z\in B)$ であり, $f\circ\varphi\in N^*(B)$ である. ゆえに (5) より (i) が従う.

次に (ii) を示す. (i) を導くのに用いた議論と同様にして, 各 $f\in N^*(B)$ に対して $f\circ\varphi\in N^p(B)$ であり,

$$\|f\circ\varphi\|_{N^p} \le K_1\|f\|_{N^*} \tag{9}$$

が成り立つことが従う.

ここで, $2<\alpha<\infty$ とする. $1<p<\infty$ であるから Lemma 3 により, ある定数 $0<B(\alpha,p)<\infty$ が存在して,

$$\|f\circ\varphi\|_{M^p} \le B(\alpha,p)\|f\circ\varphi\|_{N^p}$$

が成り立つ. この不等式と (9) により

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi\|_{M^p} &\le B(\alpha,p)\|f\circ\varphi\|_{N^p}\\ &\le B(\alpha,p)\cdot K_1\|f\|_{N^*}.\end{aligned}$$

従って, (ii) が成り立つ. (iii), (iv) は (i) から, (v), (vi) は (ii) からそれぞれ従う. □

$X$, $Y$ を $N^p(B)$, $M^p(B)$ $(1 \le p < \infty)$, $N(B)$ の何れかの関数空間とし, $T$ を $X$ から $Y$ への線形作用素とする. $T$ に対して, ある定数 $0 < K < \infty$ が存在し,

$$\|Tf\|_Y \le K\|f\|_X \qquad (f \in X)$$

が成り立つ時, 作用素 $T$ は metrically bounded であるという (cf. [1], p.381, 2.4).

**Theorem 7.** $1 < p < \infty$, $\varphi$ を $B$ から $B$ への正則写像とする. $\overline{B}$ 上の Borel 測度 $\mu$ を次のように定義する:

$\overline{B}$ の Borel 集合 $A$ に対し,

$$\mu(A) = \sigma({\varphi^*}^{-1}(A)). \tag{1}$$

この測度 $\mu$ に対し, ある定数 $0 < C < \infty$ が存在して,

$$\mu(\mathcal{S}(\zeta, h)) \le C \cdot h^n \qquad (\zeta \in S, h > 0) \tag{2}$$

が成り立つと仮定する. 但し, $\mathcal{S}(\zeta, h) \equiv \{\, z \in \overline{B} \,:\, |1 - \langle z, \zeta\rangle| < h \,\}$. この時, 次が成立する:

(i) $C_\varphi \,:\, N^p(B) \longrightarrow N^p(B)$ は metrically bounded である.
(ii) $C_\varphi \,:\, M^p(B) \longrightarrow M^p(B)$ は metrically bounded である.
(iii) $C_\varphi \,:\, M^p(B) \longrightarrow M^1(B)$ は metrically bounded である.
(iv) $C_\varphi \,:\, M^1(B) \longrightarrow N^*(B)$ は metrically bounded である.

逆に, $C_\varphi$ が (i), (ii), (iv) の何れかの条件を満たす時, (1) で定義される $\overline{B}$ 上の Borel 測度 $\mu$ に対して (2) が成立する.

*Proof.* (i) を示す. Lemma 6, (i) によりある定数 $0 < K < \infty$ が存在し,

$$\int_{\overline{B}} \{\log(1 + |f|)\}^p \, d\mu \le K \int_S \{\log(1 + |f^*|)\}^p \, d\sigma \qquad (f \in N^p(B)) \tag{3}$$

が成り立つ.

$f \in N^p(B)$ とする. $A(B)$ は $N^p(B)$ において稠密であるから $A(B)$ に属する関数列 $\{f_j\}_{j \in \mathrm{N}}$ が存在して,

$$\lim_{j \to \infty} \|f_j - f\|_{N^p} = 0$$

が成り立つ. 各 $j \in \mathbb{N}$ に対し, $f_j \in A(B)$ より $f_j \circ \varphi \in H^\infty(B) \subset N^p(B)$ であり,

$$(f_j \circ \varphi)^*(\zeta) = f_j(\varphi^*(\zeta)) \qquad (\text{a.e. } \zeta \in \mathrm{S})$$

である. 従って, (3) より

$$
\begin{aligned}
\|f_j \circ \varphi\|_{N^p}^p &= \int_S \{\log(1 + |(f_j \circ \varphi)^*|)\}^p \, d\sigma \\
&= \int_S \{\log(1 + |(f_j \circ \varphi^*)|)\}^p \, d\sigma \\
&= \int_{\overline{B}} \{\log(1 + |f_j|)\}^p \, d\mu \\
&\leq K \|f_j\|_{N^p}^p.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$\|f_j \circ \varphi\|_{N^p} \leq K^{\frac{1}{p}} \|f_j\|_{N^p} \qquad (j \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. Theorem 6 の (i) を導くのに用いた同様の議論により, $f \circ \varphi \in N^p(B)$ である. このことと

$$\|f \circ \varphi\|_{N^p} \leq K^{\frac{1}{p}} \|f\|_{N^p} \tag{4}$$

が成り立つことが従う. ゆえに (i) が成り立つ.

次に (ii) を示す. $2 < \alpha < \infty$ とする. 各 $f \in M^p(B)$ に対し, $1 < p < \infty$ であるから (i) により $f \circ \varphi \in N^p(B)$ である. また Lemma 3 により

$$\|f \circ \varphi\|_{M^p} \leq A(\alpha, p) \|f \circ \varphi\|_{N^p} \tag{5}$$

が成り立つ. (4), (5) により

$$
\begin{aligned}
\|f \circ \varphi\|_{M^p} &\leq A(\alpha, p) K^{\frac{1}{p}} \|f\|_{N^p} \\
&\leq A(\alpha, p) K^{\frac{1}{p}} \|f\|_{M^p}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

ゆえに $f \circ \varphi \in M^p(B)$ であり, (ii) が従う. (iii) は (6) から導かれる. (iv) は Lemma 6, (ii) を用いて同様に示される.

逆に, ある定数 $0 < K < \infty$ が存在し,

$$\|C_\varphi f\|_{N^p} \leq K \|f\|_{N^p} \qquad (f \in N^p(B)) \tag{7}$$

が成り立つと仮定する. $0 < h < 1$, $\zeta \in S$ に対して,

$$
\begin{aligned}
f_w(z) &\equiv \exp\left\{ \frac{1 - |w|^2}{(1 - \langle z, w \rangle)^2} \right\}^{\frac{n}{p}} \qquad (z \in B), \\
g_w(z) &\equiv \left\{ \frac{1 - |w|^2}{(1 - \langle z, w \rangle)^2} \right\}^{\frac{n}{p}} \qquad (z \in B)
\end{aligned}
$$

とおく．但し，$w \equiv (1-h)\zeta \in B$ である．この $f_w$, $g_w$ の決め方より $f_w \in A(B)$, $g_w \in H^p(B)$ であり，

$$
\begin{aligned}
&|f_w(z)| \le \exp|g_w(z)| \qquad (z \in B),\\
&\|g_w\|_{H^p} \le 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，

$$
\begin{aligned}
\int_S \{\log^+|f_w^*|\}^p\, d\sigma &\le \int_S \{\log^+ \exp|g_w^*|\}^p\, d\sigma\\
&= \int_S \{\log \exp|g_w^*|\}^p\, d\sigma\\
&= \int_S |g_w^*|^p\, d\sigma \le 1
\end{aligned}
$$

であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\|f_w\|_{N^p}^p &= \int_S \{\log(1+|f_w^*|)\}^p\, d\sigma\\
&\le \int_S \{\log 2 + \log^+|f_w^*|\}^p\, d\sigma\\
&\le 2^{p-1}\left[(\log 2)^p + \int_S \{\log^+|f_w^*|\}^p\, d\sigma\right]\\
&\le 2^{p-1}\{(\log 2)^p + 1\}.
\end{aligned}
$$

従って，

$$
\|f_w\|_{N^p} \le [2^{p-1}\{(\log 2)^p + 1\}]^{\frac{1}{p}} \equiv K_p \tag{8}
$$

が成り立つ．(7), (8) より

$$
\begin{aligned}
\|C_\varphi f_w\|_{N^p} &\le K\|f_w\|_{N^p}\\
&\le K \cdot K_p \equiv \widetilde{K_p}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

また $f_w \in A(B)$ より

$$
(f_w \circ \varphi)^*(\zeta) = f_w(\varphi^*(\zeta)) \qquad (\text{a.e. } \zeta \in \mathrm{S})
$$

である. ゆえに

$$
\begin{aligned}
\|f_w \circ \varphi\|_{N^p}^p &= \int_S \{\log(1 + |(f_w \circ \varphi)^*|)\}^p \, d\sigma \\
&= \int_S \{\log(1 + |f_w \circ \varphi^*|)\}^p \, d\sigma \\
&\leq \int_S \{\log^+ |f_w \circ \varphi^*|\}^p \, d\sigma \\
&= \int_S \{\log^+ |\exp g_w \circ \varphi^*|\}^p \, d\sigma \\
&= \int_S \{\log^+ \exp(\mathrm{Re}(g_w \circ \varphi^*))\}^p \, d\sigma \\
&= \int_S \{\mathrm{Re}^+ (g_w \circ \varphi^*)\}^p \, d\sigma \\
&= \int_{\overline{B}} \{\mathrm{Re}^+ g_w\}^p \, d\mu \\
&= \int_{\overline{B}} \left[\mathrm{Re}^+ \left\{ \frac{1 - |w|^2}{(1 - \langle z,w\rangle)^2} \right\}^{\frac{n}{p}} \right]^p d\mu(z). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

但し, $x \in \mathbb{C}$ に対して, $\mathrm{Re}^+ x \equiv \max\{\mathrm{Re}\, x,\ 0\}$ である. (9), (10) より

$$
\int_{\overline{B}} \left[\mathrm{Re}^+ \left\{ \frac{1 - |w|^2}{(1 - \langle z,w\rangle)^2} \right\}^{\frac{n}{p}} \right]^p d\mu(z) \leq \widetilde{K_p}^p \qquad (11)
$$

が成り立つ.

さらに, 関数 $F(v) \equiv \mathrm{Re}(1 + v)^{-\frac{2n}{p}}$ $(v \in \mathbb{C})$ の原点における連続性により, ある $t_0 > 0$ が存在して, 次が成り立つ:

$z \in \mathcal{S}(\zeta, t_0 h)$ ならば,

$$
\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{|w|(1 - \langle z,\zeta\rangle)}{1 - |w|}\right\}^{-\frac{2n}{p}} > \frac{1}{2}. \qquad (12)
$$

従って, (12) より $z \in \mathcal{S}(\zeta, t_0 h)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{ \frac{1 - |w|^2}{(1 - \langle z,w\rangle)^2} \right\}^{\frac{n}{p}} &= \left\{ \frac{1 - |w|^2}{(1 - |w|)^2} \right\}^{\frac{n}{p}} \times \mathrm{Re}\left\{ \frac{1 - |w|}{(1 - \langle z,w\rangle)} \right\}^{\frac{2n}{p}} \\
&= \left( \frac{1 + |w|}{1 - |w|} \right)^{\frac{n}{p}} \times \mathrm{Re}\left\{1 + \frac{|w|(1 - \langle z,\zeta\rangle)}{1 - |w|}\right\}^{-\frac{2n}{p}} \\
&> \left( \frac{2 - h}{h} \right)^{\frac{n}{p}} \times \frac{1}{2} \\
&> \frac{1}{2 \cdot h^{\frac{n}{p}}} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. (11), (13) より

$$
\begin{aligned}
\widetilde{K_p}^p &\geq \int_{\overline{B}} \left[ \mathrm{Re}^+ \left\{ \frac{1-|w|^2}{(1-\langle z,w\rangle)^2} \right\}^{\frac{n}{p}} \right]^p d\mu(z) \\
&\geq \int_{S(\zeta,t_0h)} \left[ \mathrm{Re}^+ \left\{ \frac{1-|w|^2}{(1-\langle z,w\rangle)^2} \right\}^{\frac{n}{p}} \right]^p d\mu(z) \\
&\geq \int_{S(\zeta,t_0h)} \frac{1}{2^p h^n} \, d\mu(z) \\
&= \frac{1}{2^p h^n} \mu(S(\zeta, t_0 h))
\end{aligned}
$$

である. ゆえに

$$
\mu(S(\zeta, t_0 h)) \leq 2^p \widetilde{K_p}^p h^n \qquad (\zeta \in S,\ 0 < h < 1) \tag{14}
$$

が成り立つ. (14) より測度 $\mu$ に対して, (2) が成立することが従う. 他の場合についても同様にして示される. □

# References


[1] J. S. Choa and H. O. Kim. Composition operators between Nevanlinna-type spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 257, pp. 378 – 402, 2001.

[2] B. R. Choe and H. O. Kim. On the boundary behavior of functions holomorphic on the ball. *Complex Variables*, Vol. 20, pp. 53 – 61, 1992.

[3] C. C. Cowen and B. D. MacCluer. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions.* CRC Press, 1994.

[4] H. O. Kim. On closed maximal ideals of $M$. *Proc. Japan Acad.*, Vol. 62, pp. 343 – 346, 1986.

[5] H. O. Kim. On an $F$-algebra of holomorphic functions. *Can. J. Math.*, Vol. 40, pp. 718 – 741, 1988.

[6] H. O. Kim and Y. Y. Park. Maximal functions of plurisubharmonic functions. *Tsukuba J. Math.*, Vol. 16, pp. 11 – 18, 1992.

[7] B. D. MacCluer. Compact composition operators on $H^p(B_N)$. *Michigan Math. J.*, Vol. 32, pp. 237 – 248, 1985.

[8] N. Mochizuki. Algebras of holomorphic functions between $H^p$ and $N_*$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 105, pp. 898 – 902, 1989.

[9] S. C. Power. Hörmander's Carleson theorem for the ball. *Glasgow Math. J.*, Vol. 26, pp. 13 – 17, 1985.

[10] J. W. Roberts and M. Stoll. Prime and principal ideals in the algebra $N^+$. *Arch. Math.*, Vol. 27, pp. 387 – 393, 1976.

[11] W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

[12] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York, second edition, 1991.

[13] A. V. Subbotin. Linear isometry groups of Privalov's spaces of holomorphic functions of several variables. *Doklady Math.*, Vol. 60, pp. 77 – 79, 1999.

[14] N. Yanagihara and Y. Nakamura. Composition operators on the class $N^+$. *TRU Math.*, Vol. 14, pp. 9 – 16, 1978.

[15] 真次-植木. Privalov 空間の準同型. 数理研講究録「コロフキン型近似定理」(近日出版).