数理解析研究所講究録 1277 巻 2002 年 17-21

Essential Norms Of Integration Operators On Weighted Bloch Spaces

都立工業高専　　米田力生 (Rikio YONEDA)

Tokyo metropolitan College of Technology

Dを複素平面上の開単位円板とする。$H(D)$は、D上の解析関数全体とする。$g \in H(D)$に対して、作用素I_g、J_gは

$$I_g(h)(z) := \int_0^z g(\zeta)h'(\zeta)d\zeta\ ,\ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

と定義される。$\alpha > 0$に対して、α-Bloch空間$\mathcal{B}^\alpha$ は

$$\| f \|_{\mathcal{B}^\alpha} := \sup_{z \in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| < +\infty$$

を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。また$\mathcal{B}^\alpha{}_0$ は$\mathcal{B}^\alpha$ の閉部分空間で $(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| \to 0$ $(|z| \to 1^-)$ を満たす空間とする。[1]、[2] では、作用素J_gは荷重付き Bergman 空間上、Hardy 空間上で研究されている。また [5] では、次のような結果が示されている：

$g \in H(D)$に対して、J_gが$BMOA$上で有界である必要十分条件は

$$\sup_{I \subset \partial D}\left(\frac{(\log \frac{2}{|I|})^2}{|I|}\int_{S(I)}|g'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z)\right) < +\infty$$

であり、J_gが$BMOA$上でコンパクトである必要十分条件は

$$\lim_{|I| \to 0}\left(\frac{(\log \frac{2}{|I|})^2}{|I|}\int_{S(I)}|g'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z)\right) = 0$$

である。ここで、$S(I) = \{z : 1-|I| \le |z| < 1, \frac{z}{|z|} \in I\}$ for an arc I in ∂Dとする。

[6] において、Bloch空間上での作用素J_gの研究を行い、次のような結果を証明した：

$g \in H(D)$に対して、J_g が$\mathcal{B}$上で有界である必要十分条件は

$$\sup_{z \in D}(1-|z|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)|g'(z)| < +\infty$$

であり、J_gが$\mathcal{B}$上でコンパクトである必要十分条件は

$$\lim_{|z| \to 1^-}(1-|z|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)|g'(z)| = 0$$

$\alpha > 1$のとき、J_gが$\mathcal{B}^\alpha$上で有界である必要十分条件は $g \in \mathcal{B}$であり、J_gが$\mathcal{B}^\alpha$上でコンパクトである必要十分条件は $g \in \mathcal{B}_0$である。

また、[7] において、Bloch空間上での作用素I_gの研究を行い、次のような結果を証明した：

$\alpha > 0$ に対して、I_gが$\mathcal{B}^\alpha$上で有界である必要十分条件は$g \in H^\infty$であり、I_gが$\mathcal{B}^\alpha$上でコンパクトである必要十分条件は $g = 0$である。

$\omega : [0,1] \to R_+$ を continuous non-increasing function で$\omega(1) = 0$、$\omega(r) > 0$ $(r \in]0,1[)$ を満たすものとする。$\omega : D \to R_+$ は the radial extention $\omega(z) = \omega(|z|)$ とする。そのとき、荷重付き Bloch 空間B_ωは

$$\| f \|_{B_\omega} := \sup_{z \in D} \omega(z)\,|f'(z)| < +\infty$$

を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。The associated weighted $\tilde{\omega}$は

$$\frac{1}{\tilde{\omega}(z)} := \sup_{\|f\|_{B_\omega} \le 1} |f(z)|$$

として定義する。本研究では、荷重付き Bloch 空間上で、それらの essential norm について研究する。そして、次のような結果を得た：

定理 1. $\omega : [0,1] \to R_+$は continuous non-increasing function で $\omega(1) = 0$, $\omega(r) > 0$ $(r \in]0,1[)$ を満たすものとする。$\omega : D \to R_+$ は radial extention $\omega(z) = \omega(|z|)$ とし、$\sup_{z \in D} \omega(z) n |z|^{n-1} \dfrac{1}{\tilde{\omega}(z)} < +\infty$ for any n と仮定する。もし J_g is bounded on B_ωならば、そのとき

$$\| J_g \|_e \sim \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z| > s} \frac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)} |g'(z)|$$

となる。すなわち、$C \cdot \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z| > s} \dfrac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)} |g'(z)| \le \| J_g \|_e \le \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z| > s} \dfrac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)} |g'(z)|$ を満たす定数Cが存在する。

定理 2. $\omega : [0,1] \to R_+$ は continuous non-increasing function で $\omega(1) = 0$、$\omega(r) > 0$ $(r \in]0,1[)$ を満たすものとする。$\omega : D \to R_+$ は radial extention $\omega(z) = \omega(|z|)$ とし、$c_n := \omega(r_n) n r_n^{n-1}$ and that $\{c_n\}$ converges to some positive constant c as $n \to \infty$を満たす列 $\{r_n\} \subset [0,1)$が存在するものと仮定する。そのとき、もし I_g is bounded on B_ωならば、

$$\| I_g \|_e = \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z| > s} |g(z)|$$

となる。

上の定理1と定理2を利用して、次のような結果を証明することが出来る。

命題 1. ω_1、ω_2は定理1、定理2を満たすものとする。$B_{\omega_1} \subset B_{\omega_2} \subset H^\infty$のとき、$g \in H(D)$に対して、次は同値になる：

(*i*) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;

(*ii*) $J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

(*iii*) $\lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} \omega_2(z)|g'(z)| < +\infty$.

次は、上の命題1の例である：

例 1. $0 < \alpha \le \beta < 1$とする。$g \in H(D)$に対して、次は同値である：

(*i*) $gB^\alpha \subset B^\beta$;

(*ii*) $J_g : B^\alpha \to B^\beta$ is bounded operator ;

(*iii*) $g \in B^\beta$.

命題 2. ω_1、ω_2は定理1、定理2を満たすものとする。$B_{\omega_1} \subset H^\infty \subset B_{\omega_2}$でかつ$\dfrac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)^\beta$ $(\beta > 0)$のとき、$g \in H(D)$に対して、次は同値になる：

(*i*) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;

(*ii*) $J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

(*iii*) $\lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} \omega_2(z)|g'(z)| < +\infty$.

次は、上の命題2の例である：

例 2. $0 < \alpha < 1 \le \beta$とする。$g \in H(D)$に対して、次は同値である：

(*i*) $gB^\alpha \subset B^\beta$;

(*ii*) $J_g : B^\alpha \to B^\beta$ is bounded operator ;

(*iii*) $g \in B^\beta$.

命題 3. ω_1は定理1、定理2を満たすものとする。そのとき、$g \in H(D)$に対して、次は同値になる：

(*i*) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_1}$;

(*ii*) $I_g, J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_1}$ are bounded operators ;

(*iii*) $g \in H^\infty$, $\lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} \dfrac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)}|g'(z)| < +\infty$.

次は、上の命題3の例である：

例 3.1. $g \in H(D)$ に対して、次は同値である：

(i) $gB \subset B$;

(ii) $I_g, J_g : B \to B$ are bounded operators ;

(iii) $g \in H^\infty$, $\sup_{z \in D}(1-|z|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)|g'(z)| < +\infty$.

例 3.2. $g \in H(D)$ に対して、次は同値である：

(i) $gB_{\log} \subset B_{\log}$;

(ii) $I_g, J_g : B_{\log} \to B_{\log}$ are bounded operators ;

(iii) $g \in H^\infty$, $\sup_{z \in D}(1-|z|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)\left(\log\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)\right)|g'(z)| < +\infty$.

ここで、$B_{\log}$は、$\| f \|_{B_{\log}} = \sup_{z \in D}(1-|z|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)|f'(z)| < +\infty$ を満たすD上の解析関数全体とする。

命題 4. ω_1は定理1、定理2を満たすものとする。ある定数$\gamma > 0$に対して、$\frac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)} \leq \gamma(1-|z|^2)^\alpha$ $(\alpha \geq 1)$のとき、$g \in H(D)$ に対して、次は同値になる：

(i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_1}$;

(ii) $I_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_1}$ is bounded operator ;

(iii) $g \in H^\infty$.

次は、上の命題4の例である：

例 4. $\alpha > 1$とする。$g \in H(D)$ に対して、次は同値である：

(i) $gB^\alpha \subset B^\alpha$;

(ii) $I_g : B^\alpha \to B^\alpha$ is bounded operator ;

(iii) $g \in H^\infty$.

命題 5. ω_1、ω_2 は定理1、定理2を満たすものとし、$\beta > 0$とする。$B_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$のとき、$\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)^\beta$でかつ $\frac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)$ と仮定すると、$g \in H(D)$ に対して、次は同値になる：

(i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;

(ii) $J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

(iii) $I_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

(iv) $\lim_{s\to 1^-} \sup_{|z|>s} \frac{\omega_2(z)}{\tilde{\omega_1}(z)}|g'(z)| < +\infty$;

(v) $\lim_{s\to 1^-} \sup_{|z|>s} \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}|g(z)| < +\infty$.

次は、上の命題5の例である：

例 5. $1 < \alpha < \beta$とする。$g \in H(D)$に対して、次は同値である：

(i) $gB^\alpha \subset B^\beta$;

(ii) $I_g : B^\alpha \to B^\beta$ is bounded operator ;

(iii) $J_g : B^\alpha \to B^\beta$ is bounded operator ;

(iv) $g \in B^{\beta-\alpha+1}$;

(v) $\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha}|g(z)| < +\infty$.

参考文献

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149-158.

[2] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1997),337-356.

[3] A. Montes-Rodriguez, The essential norm of composition operators on Bloch spaces, Pacific J.Math.188(1999),339-351.

[4] A. Montes-Rodriguez, Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, J.London Math.Soc.(2)61(2000),872-884.

[5] A.G.Siskakis and R.Zhao, A Volterra type operator on spaces of analytic functions, Contemporary Mathematics.232(1999),299-311.

[6] R.Yoneda, Integration operators on weighted Bloch space, to appear in Nipponkai Math. Journal.

[7] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.

[8] R.Yoneda, Essential Norms Of Integration Operators And Multipliers On Weighted Bloch Spaces, in preprint.

[9] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.

[10] K.Zhu, Analytic Besov Spaces, J.Math.Anal.Appl.157(1991), 318-336.

[11] K.Zhu, Bloch type spaces of analytic functions, Rocky Mout.J.Math.23(1993), 1143-1177.

[12] K.Zhu, Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators, J.Funct.Anal.87(1989),31-50.