

D.Zagier 論文「Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function」の紹介.

九州大学数理学府・D 井原 健太郎 (Kentaro Ihara)

0 はじめに

Don Zagier の論文「Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function」 ([7] (2001)) の紹介をする.

この紹介論文の主人公は次の「関数」である. 右辺の $n = 0$ の項は 1 と定める.

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$$

この関数は 1997.10 の M.Kontsevich による Max-Planck での講義の中に現われ, そこで述べられた q が 1 の巾根のときの $F(q)$ の満たすある漸近公式 (後述の式 (18)) の予想がこの研究の出発点であることが紹介論文の introduction に述べてある. まず $F(q)$ について考えよう. ‘関数’ と言っても q を複素変数と見た場合, 右辺の級数は複素平面の如何なる開集合上も収束しない. 実際, 級数が収束するためには, 第 n 項の $(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$ が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することが必要だが, 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)$ は $|q| < 1$ では, 0 でない値に収束し, $|q| > 1$ では収束しないからである. しかし q が 1 の巾根のときは級数は有限和になり値を定める. 例えば $F(1) = 1, F(-1) = 3, F(e^{2\pi i/3}) = 5 - e^{2\pi i/3}, F(i) = 8 - 3i$. 一般の $F(e^{2\pi i/k})$ の公式は後述される; 式 (15). また $F(q)$ は $1 - q$ を不定元とした形式的巾級数と見なすこともできる:

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-q)^n = 1 + (1-q) + 2(1-q)^2 + 5(1-q)^3 + \cdots \in \mathbb{Z}[[1-q]]. \quad (1)$$

一般に ζ を 1 の巾根として $\zeta - q$ を不定元としてもよい.

論文ではこの $F(q)$ に関する以下の話題を議論している;

- i) 上記の数列 $\{a_n\}$ と A.Stoimenow によるある種のコード図の個数が一致すること, Vassiliev 不変量の次元の上限の漸近挙動について.
- ii) $F(q)$ にまつわる, ある q -series identity について.
- iii) 1 の巾根の近傍での $F(q)$ の巾展開の係数について.
- iv) $F(q)$ の保型性と周期との関係, および $F(e^{2\pi i/k})$ の $k \rightarrow \infty$ での漸近挙動について.

研究集会では $F(e^{2\pi i/k}), k \in \mathbb{N}$, が $\text{trifol knot } 3_1$ の k を color とした量子ダイログ不変量 $\langle 3_1 \rangle$ (colored Jones 多項式を適当に正規化したもの) に一致することから体積予想に関連した $F(e^{2\pi i/k}), k \in \mathbb{N}$ の $k \rightarrow \infty$ での挙動の部分を中心に述べた. この原稿では述べられなかった Vassiliev 不変量に関連する部分も合わせて書きたいと思う.

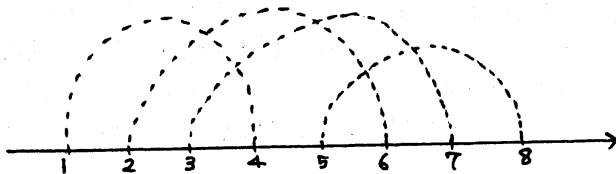
1 Regular chord diagrams

式 (1) の数列 $\{a_n\}$ の最初の数値を表で表わす.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a_n	1	1	2	5	15	53	217	1014	5335	31240	201608	1422074	...

この数が A. Stoimenow による 'regular コード図' の個数と一致することが最初の主張である.

集合 $\{1, 2, \dots, 2D - 1, 2D\}$ 上の固定点なしの involution τ ($\tau^2 = id$) を, '次数 D のコード図' という. (i と $\tau(i)$ を上半平面内の破線 (コード) で繋いだ図で表わす.) 例えば, 次は次数 4 のコード図である.



次数 D のコード図は $(2D - 1)!!$ 個ある. Vassiliev 不変量の研究によると, コード図全体の \mathbb{R} 上張る線形空間は "4 項関係式" を法とすると, 自然な連結積に関して可換代数になる. そしてその代数が, 枠つき結び目の \mathbb{R} -値 Vassiliev 不変量全体のなすフィルター代数の次数代数と標準的に同型になる. したがって $(2D - 1)!!$ は既約な D 次の Vassiliev 不変量の空間の次元 $V(D)$ の自明な上限である. Stirling の公式 $D! \sim D^D e^{-D} \sqrt{2\pi D}$ に注意すると,

$$(2D - 1)!! \sim \frac{2^D D!}{\sqrt{\pi D}} \tag{2}$$

後の第 4 節に於いて, より良い上限が与えられる.

コード図 τ が regular であるとは, $\tau(i + 1) < \tau(i)$ なる任意の i に対し, $[i, i + 1] \subseteq [\tau(i + 1), \tau(i)]$ が成り立つときをいう. つまり次の 2 種類のコードの配置をどこにも持たないコード図のことである.



先に例示した 4 次のコード図は regular である.

定理 1 (Stoimenow[6]) i) 4 項関係式を法とするコード図が張る線形空間は regular コード図で張られる.

ii) 次数 D の regular コード図の個数 ξ_D は次で与えられる.

$$\begin{aligned}\xi_{D,k} &:= \#\{\text{regular コード図 } \tau \mid \tau(1) = k+1\}, & \xi_D &= \sum_{k=1}^D \xi_{D,k}. \\ \xi_{1,1} &= 1, & \xi_{D,k} &= \sum_{l=k-1}^{D-1} \sum_{p=1}^l \hat{\xi}_{D-1,l,p} \eta_{l,k-1,p}, \quad (D \geq 2, k \geq 1.) \\ \hat{\xi}_{D,l,p} &= \sum_{j=1}^p (-1)^{p-j} \binom{p-1}{j-1} \xi_{D+j-1,j}, \\ \sum_{k,l,p \geq 0} \eta_{l,k,p} x^k y^l z^p &= \frac{1-x}{1-x-z \left(\frac{y}{1-y} - \frac{x^2 y}{1-xy} \right)}.\end{aligned}$$

紹介論文ではこの定理を整理して数列 $\xi_{D,k}$ の母関数を巧みに計算して次の定理を導いている. regular コード図の定義から $D < k$ のとき $\xi_{D,k} = 0$ である. 数列 $\{a_n\}$ の初数項が Sloane, N.J.A.-Plouffe, S. の「Encyclopedia of Integer sequence」の on line version で ξ_n と一致しているのを見つけてきたそうである. 証明は長めの計算であるので論文を見て頂きたい.

定理 2 $\xi_{0,0} = 1$, その他の $Dk = 0$ の場合は $\xi_{D,k} = 0$ と定める.

$$\sum_{D,k \geq 0} \xi_{D,k} X^D Y^k = \sum_{n=0}^{\infty} (1-a)(1-qa) \cdots (1-q^{n-1}a) \in \mathbf{Z}[Y][[X]]$$

が成り立つ. 但し, $q = 1 - X$, $a = 1 - XY$. ここで $Y = 1$ とすると $\sum_{D=0}^{\infty} \xi_D X^D = F(q)$ であり特に $\xi_D = a_D$ である.

2 q -series identity

後述の q -series identity, 式 (6), に登場する関数達を 1 つずつ定義していく. $F(q)$ は $1 - q$ を不定元とする単なる形式的巾級数であった. それに対し単位円板 $|q| < 1$ 内の本当の関数 $F_1(q)$ で, その関数の $q \rightarrow 1$ としたときの漸近展開を与える形式的巾級数が $F(q)$ に一致するものを構成する. 次の標準的な記号を使う:

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = (1-a)(1-qa) \cdots (1-q^{n-1}a).$$

従って $F(q) = \sum_{n \geq 0} (q)_n$ である.

任意の $m \geq 1$ に対し $(q)_{m+1} - (q)_m = (q)_{m-1} q^m$ だが, この両辺に和 $\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N = \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^{m-1}$ を施すと,

$$\sum_{n=0}^{N-1} [(q)_n - (q)_N] = \sum_{m=1}^N m(q)_{m-1} q^m, \quad (N \geq 1) \quad (3)$$

が成り立つ。そこで,

$$F_1(q) := \sum_{m \geq 1} m(q)_{m-1} q^m \quad (4)$$

とする。\$F_1(q)\$ は式 (3) の右辺で \$N \to \infty\$ としたものである。\$F_1(q)\$ は \$|q| < 1\$ で収束していて \$F_1(q) \in \mathbb{Z}[[1-q]]\$, \$\in \mathbb{Z}[[q]]\$ であることは直ぐわかる。さらに \$F(q) = F_1(q) \in \mathbb{Z}[[1-q]]\$ である。なぜなら式 (3) より, 任意の \$N\$ に対して

$$F(q) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} [(q)_n - (q)_N] = \sum_{m=1}^N m(q)_{m-1} q^m \equiv F_1(q), \quad \text{mod}(1-q)^N$$

が成り立つからである。一方,

$$F_2(q) := \sum_{n \geq 0} [(q)_n - (q)_\infty] \quad (5)$$

とする。ここで \$(q)_\infty := \prod_{n=1}^{\infty} (1-q)^n\$ である。\$F_2(q) \in \mathbb{Z}[[1-q]]\$, \$\in \mathbb{Z}[[q]]\$ であることは直ぐわかる。\$F_2(q)\$ が \$|q| < 1\$ で収束していることをみよう;

$$\frac{F_2(q)}{(q)_\infty} = \sum_{n \geq 0} \left[\frac{(q)_n}{(q)_\infty} - 1 \right]$$

が \$|q| < 1\$ で収束することを示せばいい。\$\frac{1}{(q)_\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} p(l)q^l\$, 但し \$p(l)\$ は \$l\$ の分割数, が \$|q| < 1\$ で絶対収束することを使う。\$p^{(n)}(l)\$ で各成分が \$n\$ より大きい分割の数とすれば,

$$\frac{(q)_n}{(q)_\infty} = \sum_{l \geq 0} p^{(n)}(l)q^l = 1 + \sum_{l > n} p^{(n)}(l)q^l$$

なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left| \frac{(q)_n}{(q)_\infty} - 1 \right| &\leq \sum_{n \geq 0} \sum_{l > n} p^{(n)}(l) |q|^l \leq \sum_{n \geq 0} \sum_{l > n} p(l) |q|^l \\ &= \sum_{l \geq 1} \sum_{n=0}^{l-1} p(l) |q|^l = \sum_{l \geq 1} l p(l) |q|^l. \end{aligned}$$

となり, 最後の級数の収束半径は 1 であるので示せた。式 (3) の左辺で \$N \to \infty\$ とすると \$F_2(q)\$ になることが類似の計算でわかる。従って \$|q| < 1\$ の関数として \$F_1(q) = F_2(q)\$ である。

次に Euler の 5 角数定理より (e.g. [1]),

$$(q)_\infty = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{k(3k+1)/2} = \sum_{n \geq 1} \chi(n) q^{(n^2-1)/24}.$$

但し, \$\chi\$ は mod 12 の原始指標 (\$\exists\$!) である。具体的には

$$\chi: (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^* = \{1, 5, -5, -1\} \longrightarrow \{1, -1, -1, 1\}.$$

である. Dedekind eta-関数は $q^{1/24}(q)_\infty$ と表わせる. 次に,

$$H(q) := \sum_{n \geq 1} n \chi(n) q^{(n^2-1)/24},$$

$$E(q) := - \frac{d}{dx} [\log(qx)_\infty] \Big|_{x=1} = \sum_{n \geq 1} \frac{q^n}{1-q^n} = \sum_{n \geq 1} d(n) q^n.$$

ここで $d(n) = \sum_{d|n} 1$ である. これらは全て $|q| < 1$ で収束していて次の等式で関係している:

定理 3 $|q| < 1$ での関数, あるいは $\mathbb{Z}[[q]]$ の元として次の等式が成り立つ.

$$F_1(q) = -\frac{1}{2}H(q) + \left(\frac{1}{2} - E(q)\right)(q)_\infty. \quad (6)$$

(proof.) $a \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, $|x| < 1$ に対して, $S(a, x) := \sum_{n \geq 0} (a)_n x^n$ は収束している. そして次の関係式を満たしていることがすぐわかる:

$$\begin{cases} (1-x)S(a, x) = 1 - axS(a, qx), \\ S(a, x) = 1 + (1-a)xS(qa, x). \end{cases}$$

これを用いて,

$$\begin{aligned} S(x) &:= (1-x)S(qx, x) = 1 - qx^2S(qx, qx) \\ &= 1 - qx^2 [1 + (1-qx)qxS(q^2x, qx)] = 1 - qx^2 - q^2x^3S(qx). \end{aligned}$$

この式から帰納的に

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) x^{(n-1)/2} q^{(n^2-1)/24} \quad (7)$$

が得られる. 一方 $S(x)$ の定義から

$$S(x) = (qx)_\infty + (1-x) \sum_{n \geq 0} [(qx)_n - (qx)_\infty] x^n \quad (8)$$

なので $\frac{d}{dx} S(x)$, の $x \rightarrow 1$ での極限を式 (7) から求めると,

$$\sum_{n \geq 1} \chi(n) \frac{n-1}{2} q^{(n^2-1)/24} = \frac{1}{2}H(q) - \frac{1}{2}(q)_\infty.$$

式 (8) から求めると,

$$\frac{d}{dx} (qx)_\infty \Big|_{x=1} - F_2(q) = -E(q)(q)_\infty - F_2(q).$$

両者を比べて $F_1 = F_2$ を用いると結論を得る. ■

この恒等式が紹介論文の柱になっている. 例えばこの恒等式で q を 1 の巾根へ近づけると, 右辺第 2 項は因子 $(q)_\infty$ が急速に 0 に収束するため $F_1(q)$ と $-\frac{1}{2}H(q)$ の漸近展開は等しいことが次節で使われる. また Dedekind eta-関数と $H(q)$ の関係が第 5 節で述べられる.

3 Expansions near root of unity

先の整数列 $\{a_n\}$ も含め, 整数列 $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ を次の形式的巾級数で定義する:

$$F(1-x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad F(e^{-t}) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n, \quad e^{-t/24} F(e^{-t}) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{24^n \cdot n!} t^n. \quad (9)$$

数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の最初の数値を表で表わす.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
b_n	1	1	3	19	207	3451	81663	...
c_n	1	23	1681	257543	67637281	27138236663	15442193173681	...

定理 4 数列 $\{c_n\}$ は “Glaisher 数” と呼ばれ, 具体的に次で得られる.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{2} L(-2n-1, \chi) = \frac{(2n+1)!}{2\sqrt{3}} \frac{L(2n+2, \chi)}{(\pi/6)^{2n+2}} \\ &= 6 \frac{(-144)^n}{n+1} \left[B_{2n+2}\left(\frac{1}{12}\right) - B_{2n+2}\left(\frac{5}{12}\right) \right] = \left(\frac{d}{dt} \right)^{2n+1} \left(\frac{\sin 2t}{2 \cos 3t} \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

但し, $L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$ は指標 χ に付随する Dirichlet L -関数であり, $B_n(x)$ は n 次の Bernoulli 多項式である.

(proof.) 方針: $t > 0$ の関数 $e^{-t/24} H(e^{-t})$ の $t \searrow 0$ での漸近展開を 2通りの方法で求め比較する.

まず式 (6) において $|q| < 1$ で $q \rightarrow 1$ とするときの, 関数列 $\{(1-q)^n\}_{n \geq 0}$ による漸近展開を考える. $(q)_\infty \sim 0 + 0(1-q) + 0(1-q)^2 + \dots$ で $|E(q)| \leq \sum n|q|^n = \frac{1}{(1-|q|)^2}$ なので, 式 (6) 右辺の第 2 項は, $0 + 0(1-q) + 0(1-q)^2 + \dots$ を漸近展開としてもつ. よって $F_1(q)$ と $-\frac{1}{2}H(q)$ は同じ漸近展開をもつので, $-\frac{1}{2}H(q) \sim F(q), (q \rightarrow 1)$ である. 従って 1つ目の漸近展開

$$e^{-t/24} H(e^{-t}) \sim -2e^{-t/24} F(e^{-t}) = -2 \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{24^n \cdot n!} t^n, \quad (\text{as } t \searrow 0) \quad (10)$$

を得る. 次に 2つ目の漸近展開

$$e^{-t/24} H(e^{-t}) \sim \sum_{n \geq 0} \gamma_n t^n \quad (11)$$

の係数 $\{\gamma_n\}$ を $e^{-t/24} H(e^{-t})$ を Mellin 変換することで求める: 勝手な正整数 N に対して,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t/24} H(e^{-t}) t^{s-1} dt &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n t^n + O(t^N) \right) t^{s-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\gamma_n}{n+s} + R_N(s). \end{aligned} \quad (12)$$

但し $R_N(s)$ は $\Re(s) > -N$ で正則な関数である。一方

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t/24} H(e^{-t}) t^{s-1} dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{m \geq 1} m \chi(m) e^{-m^2 t/24} t^{s-1} dt \\ &= \sum_{m \geq 1} m \chi(m) \int_0^{+\infty} e^{-m^2 t/24} t^{s-1} dt \\ &= \sum_{m \geq 1} m \chi(m) \frac{24^s}{m^{2s}} \int_0^{+\infty} e^{-T} T^{s-1} dT \\ &= L(2s-1, \chi) 24^s \Gamma(s) \end{aligned} \quad (13)$$

である。式 (12) と式 (13) の $s = -n$, ($n \geq 0$, 整数) での留数を比較すると

$$\gamma_n = L(-2n-1, \chi) \frac{(-1)^n}{24^n \cdot n!}.$$

結局, 2通りの漸近展開式 (10) と式 (11) を比較して第 1 の等式を得る:

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2} L(-2n-1, \chi) \quad (14)$$

第 2 の等式は L -関数の関数等式,

$$\left(\frac{12}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi) = \left(\frac{12}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) L(1-s, \chi)$$

から導かれ, 第 3 の等式は L -関数の負整数点での値のよく知られた公式:

$$L(1-m, \chi) = -\frac{12^{m-1}}{m} \sum_{a=0}^{12} \chi(a) B_m\left(\frac{a}{12}\right), \quad (m \geq 1, \text{整数})$$

から得る (e.g. [2]). 最後の等式は $\frac{\sinh 2t}{\cosh 3t} = \sum_{m \geq 1} \chi(m) e^{-my}$ に注意して, これに Mellin 変換を使うと, $\int_0^{\infty} \sum_{m \geq 1} \chi(m) e^{-my} t^{s-1} dt = L(s, \chi) \Gamma(s)$ なので, 先と同様の考察で,

$$\frac{\sin 2t}{2 \cos 3t} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{2} L(-2n-1, \chi) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

となり, 式 (14) から結論される. ■

続けて, 一般に 1 の巾根 $\xi = e^{2\pi i \alpha}$, ($\alpha \in \mathbb{Q}$) に対して,

$$F(\xi(1-X)) = \sum_{n \geq 0} a_n(\xi) X^n, \quad F(\xi e^{-t}) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n(\xi)}{n!} t^n, \quad e^{-t/24} F(\xi e^{-t}) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n(\xi)}{24^n \cdot n!} t^n,$$

で数列 $a_n(\xi)$, $b_n(\xi)$, $c_n(\xi) \in \mathbb{Z}[\xi]$ を定める. $\xi = 1$ が先の場合である. ξ に対し $\xi^{N/12} = 1$ を満たす勝手な 12 の正の倍数を N とすると, $\chi_\xi(m) := \chi(m) \xi^{(m^2-1)/24}$ は $\xi = 1$ でなければ指標ではないが N -周期ではある: $\chi_\xi(m+N) = \chi_\xi(m)$. 従って “twisted L -関数” を

$$L(s, \chi_\xi) := \sum_{m \geq 1} \frac{\chi_\xi(m)}{m^s}, \quad (\Re(s) > 1)$$

$$\begin{aligned}
L(s, \chi_\xi) &= \sum_{a=1}^N \sum_{m \geq 0} \frac{\chi_\xi(a + mN)}{(a + mN)^s} \\
&= N^{-s} \sum_{a=1}^N \chi_\xi(a) \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(m + \frac{a}{N})^s} \\
&= N^{-s} \sum_{a=1}^N \chi_\xi(a) \zeta(s, \frac{a}{N}).
\end{aligned}$$

但し, $0 < x \leq 1$ に対し, $\zeta(s, x) := \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(m+x)^s}$ は Hurwitz ζ 関数である. Hurwitz ζ 関数が全平面に有理型関数に解析接続されることから ($s = 1$ で 1 位の極, 留数 1), $L(s, \chi_\xi)$ が有理型に解析接続できることがわかる. また Hurwitz ζ 関数の負整数点の公式:

$$\zeta(1 - m, x) = -\frac{B_m(x)}{m}, \quad (m \geq 1, \text{整数})$$

を用いると, $L(s, \chi_\xi)$ の負整数点での公式

$$L(1 - m, \chi_\xi) = -\frac{N^{m-1}}{m} \sum_{a=1}^N \chi_\xi(a) B_m\left(\frac{a}{N}\right), \quad (m \geq 1, \text{整数})$$

が得られる (e.g. [2]). 定理 4 と同じ証明方法で, $t > 0$ に対し $e^{-t/24} H(\xi e^{-t})$ の $t \searrow 0$ での漸近展開を 2 通り求めると,

$$\begin{aligned}
e^{-t/24} H(\xi e^{-t}) &\sim -2 \sum_{n \geq 0} \frac{c_n(\xi)}{24^n \cdot n!} t^n, \quad (t \searrow 0) \\
e^{-t/24} H(\xi e^{-t}) &\sim \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{24^n \cdot n!} L(-2n - 1, \chi_\xi) t^n, \quad (t \searrow 0)
\end{aligned}$$

従って, これを比べて定理 4 の一般化, $c_n(\xi)$ の具体表示を得る:

$$\begin{aligned}
c_n(\xi) &= \frac{(-1)^{n-1}}{2} L(-2n - 1, \chi_\xi) \\
&= \frac{(-1)^n N^{2n+1}}{2n+2} \sum_{a=1}^{N/2} \chi_\xi(a) B_{2n+2}\left(\frac{a}{N}\right).
\end{aligned}$$

とくに $n = 0$ とし, $c_0(\xi) = F(\xi)$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ に注意して少しの計算後,

$$F(\xi) = \frac{1}{4N} \sum_{m=1}^N m^2 \chi_\xi(m) \quad (15)$$

を得る. これが冒頭で述べた $F(\xi)$ の具体公式である.

4 Asymptotic formula for ξ_D

Stoimenow は数列 ξ_D が既約な D 次の Vassiliev 不変量の空間の次元 $V(D)$ の上限を与え, 任意の正の数 $M > 0$ に対し $\xi_D = O(D!/D^M)$ を示している. ($V(D)$ の自明な上限, 式 (2) と比べよ) 紹介論文では $\xi_D (= a_D)$ が実際はより強い上限を与えることを巧みに計算している.

定理 5 具体的に計算可能な定数 C_0, C_1, \dots に対し,

$$\xi_D \sim \frac{D! \sqrt{D}}{(\pi^2/6)^D} (C_0 + \frac{C_1}{D} + \frac{C_2}{D^2} + \dots) \quad (16)$$

例えば, $C_0 = \frac{12\sqrt{3}}{\pi^{5/2}} e^{\pi^2/12}$, $C_1 = C_0(\frac{8}{3} - \frac{17\pi^2}{144} + \frac{\pi^4}{432})$. 従ってとくに $\xi_D = O(D! \sqrt{D}/(\pi^2/6)^D)$.

まず式 (9) で定義した 3 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の互いの関係は,

$$b_n = \frac{1}{24^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k, \quad a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} S_{n,n-k} b_{n-k}, \quad (n \geq 1.) \quad (17)$$

である. 1 つ目の式は簡単. 2 つ目の式の整数列 $\{S_{n,m}\}_{n,m \geq 0}$ は第 1 種 Stirling 数で, それは次の母関数で定義される (e.g. [2]):

$$x(x+1) \cdots (x+n-1) = \sum_{m=0}^n S_{n,m} x^m$$

あるいは, 漸化式 $S_{n,n} = 1$, $S_{n+1,m} = S_{n,m-1} + n S_{n,m}$ でも特徴づけられる. 第 1 種 Stirling 数の満たす等式

$$\frac{t^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} S_{n,m} \frac{(1-e^{-t})^n}{n!}$$

を使うと上の関係がでる. $c_n \rightarrow b_n \rightarrow a_n$ の順に漸近挙動を見ていく:

(proof.) $L(2n+2, \chi) = 1 + O(5^{-2n})$ だから定理 4 より,

$$c_n = \frac{(2n+1)!}{2\sqrt{3}(\pi/6)^{2n+2}} (1 + O(5^{-2n})).$$

これを用いて, 式 (17) より,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{24^n} \left[c_n + n c_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} c_{n-2} + \dots \right] \\ &\sim \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot 24^n} \left[\frac{(2n+1)!}{(\pi/6)^{2n+2}} + n \frac{(2n-1)!}{(\pi/6)^{2n}} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{(2n-3)!}{(\pi/6)^{2n-2}} + \dots \right] \\ &= 4\sqrt{3} \frac{(2n+1)!}{(2\pi^2/3)^{n+1}} \left[1 + \frac{\pi^2/72}{2n+1} + \frac{(\pi^2/72)^2/2!}{(2n+1)(2n-1)} + \frac{(\pi^2/72)^3/3!}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)} + \dots \right] \end{aligned}$$

ここで Stirling の公式

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots \right]$$

を使って, $(2n+1)!$ の部分を $n!^2$ の式に書き改めると,

$$b_n \sim \frac{12\sqrt{3n} \cdot n!^2}{\pi^{5/2} (\pi^2/6)^n} \left[1 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots \right]$$

ここで $\beta_1 = \frac{\pi^2}{144} + \frac{3}{8}$, $\beta_2 = \frac{\pi^4}{41472} - \frac{\pi^2}{1152} - \frac{7}{128}, \dots$ さらに, Stirling 数の漸化式から

$$S_{n,n-k} = \frac{n^{2k}}{2^k k!} \left[1 - \frac{c_1(k)}{n} + \frac{c_2(k)}{n^2} - \dots \right]$$

がわかる. ここで $c_1(k) = \frac{1}{3}(2k^2 + k)$, $c_2(k) = \frac{1}{18}(4k^4 - k^2 - 3k), \dots$ 従って式 (17) から,

$$\begin{aligned} a_n &\sim \frac{b_n}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{(\pi^2/12)^k}{k!} \left[1 + \frac{2k^2 - 11k}{6n} + \dots \right] \\ &\sim \frac{n! \sqrt{n}}{(\pi^2/6)^n} \left[C_0 + \frac{C_1}{n} + \dots \right] \end{aligned}$$

となる. ■

5 $F(e^{\frac{2\pi i}{k}})$ の漸近挙動と保型関数の周期

§0 で述べた Kontsevich が予想した漸近公式とは,

$$F(e^{\frac{2\pi i}{k}}) \sim \exp\left(-\frac{\pi i}{12}\left(k-3+\frac{1}{k}\right)\right) k^{3/2} + \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} \left(-\frac{2\pi i}{k}\right)^n, \quad (k \rightarrow \infty) \quad (18)$$

で $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 19, b_4 = 207, \dots$ が数値実験的に与えられていた. 論文ではこの漸近公式が半整数ウェイトの保型形式の周期の理論を背景に示せることがアナウンスされ, 係数の $\{b_n\}$ は §3 で定義された数列 $\{b_n\}$ と一致することが述べられている.

まず式 (18) を書き直す. 両辺に $\exp(\frac{\pi i}{12k})$ を掛けると,

$$\exp\left(\frac{\pi i}{12k}\right) F(e^{\frac{2\pi i}{k}}) \sim \exp\left(-\frac{\pi i}{12}(k-3)\right) k^{3/2} + e^{\frac{\pi i}{12k}} \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} \left(-\frac{2\pi i}{k}\right)^n$$

$m \in \mathbb{Z}$ に対し, $\zeta_m := \exp(\frac{2\pi i}{m})$ と書くことにする. 式 (9) を使うと,

$$\zeta_{24k} F(\zeta_k) \sim \zeta_{24}^{-k+3} k^{3/2} + \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} \left(-\frac{\pi i}{12k}\right)^n. \quad (19)$$

今, $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\varphi(\alpha) := e^{\frac{\pi i \alpha}{12}} F(e^{2\pi i \alpha})$ と定める. すぐ分かるように

$$\varphi(\alpha + 1) = \zeta_{24} \varphi(\alpha) \quad (20)$$

なので, $\varphi(0) = 1$ に注意すると $k \in \mathbb{Z}$ に対し $\varphi(k) = \zeta_{24}^k$ である. そして $\varphi(1/k) = e^{\frac{\pi i}{12k}} F(e^{\frac{2\pi i}{k}}) = \zeta_{24k} F(\zeta_k)$ であるので, 式 (19) は, (またその複素共役は)

$$\varphi(\pm 1/k) \sim \zeta_8^{\pm 1} \varphi(\mp k) k^{3/2} + \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} \left(\mp \frac{\pi i}{12k}\right)^n \quad (21)$$

となる.

式 (20), 式 (21) はそれぞれ $SL_2(\mathbb{Z})$ の生成元である $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に関する $\varphi(\alpha)$ のある種の保型性を表わしている:

定理 6 関数 $\varphi(\alpha)$ は保型性を表わす式 (20) と

$$\varphi(\alpha) + (i\alpha)^{-3/2} \varphi\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = g(\alpha), \quad (\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq 0.) \quad (22)$$

を満たす. 但し $\pm\alpha > 0$ に対して $(i\alpha)^{-3/2} = \zeta_8^{\mp 3} |\alpha|^{-3/2}$ と主枝をとる. また $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は C^∞ -関数で $x = 0$ 以外では解析的, さらに $g^{(n)}(0) = \left(-\frac{\pi i}{12}\right)^n c_n$ ($n \geq 0$) を満たす. さらに一般に

$$\varphi(\alpha) - v(\gamma)(c\alpha + d)^{-3/2} \varphi(\gamma(\alpha)) = g_\gamma(\alpha), \quad (\alpha \in \mathbb{Q}, \gamma(\alpha) \neq i\infty.) \quad (23)$$

但し $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ で $v(\gamma)$ は Dedekind eta-関数の multiplier に関する 1 の 24 乗根であり, g_γ は \mathbb{R} 上の C^∞ -関数で $\gamma^{-1}(i\infty)$ 以外で実解析的な関数である.

この定理から式 (22) で $\alpha = \pm \frac{1}{k}$ とおけば, 式 (21) が導かれる. 論文中に書かれている定理の背景を中心に保型形式の周期多項式について述べよう. 詳細は文献 [3], [4] も参照ください.

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma := PSL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathbb{H}$: 上半平面 に対し, Γ の \mathbb{H} への作用を $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ とする. そして S_k を Γ に関する weight k , ($k \in \mathbb{Z}, k > 2$, 偶数) の尖点形式の空間とする. つまり尖点形式 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ は $\gamma \in \Gamma$ に対し, 次の変換を受ける:

$$f(\gamma(z)) = (cz + d)^k f(z),$$

さらに, f の Fourier 展開は

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) q^n, \quad (q = e^{2\pi i z}).$$

となる. 今 f に対し, f の Eichler 積分 $\tilde{f}(z)$ を f の $k-1$ 回積分 $\times (2\pi i)^{k-1}$ とする. $\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} = q \frac{d}{dq}$ に注意すると,

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)}{n^{k-1}} q^n, \quad (q = e^{2\pi i z}) \quad (24)$$

である.

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz}\right)^{k-1} [(cz + d)^{k-2} \tilde{f}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \tilde{f}(z)] = (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - f(z) = 0$$

なので $g_\gamma(z) := (cz + d)^{k-2} \tilde{f}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \tilde{f}(z)$ は高々 $k-2$ 次の多項式であり, $f(z)$ の変換性を受け継いで, $\tilde{f}(z)$ については,

$$g_\gamma(z) = (cz + d)^{k-2} \tilde{f}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \tilde{f}(z) \quad (25)$$

という変換則が成り立つ. 特に $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する $g(z) := g_S(z)$ を周期多項式という. 別の表示として,

$$g_\gamma(z) = \frac{(2\pi i)^{k-1}}{(k-2)!} \int_{\gamma^{-1}(i\infty)}^{i\infty} f(w)(z-w)^{k-2} dw \quad (26)$$

がある. なぜなら先ず $\tilde{f}(z) = -\frac{(2\pi i)^{k-1}}{(k-2)!} \int_z^{i\infty} f(w)(w-z)^{k-2} dw$ である. それは $(\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz})^{k-1}$ を施すともとの $f(z)$ に戻ることが計算でわかるからであり, $c_k := -\frac{(2\pi i)^k}{(k-2)!}$ と略記すると,

$$\begin{aligned} g_\gamma(z) &= (cz+d)^{k-2} \tilde{f}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \tilde{f}(z) \\ &= c_k (cz+d)^{k-2} \int_{\gamma(z)}^{i\infty} f(w)(w-\gamma(z))^{k-2} dw - \tilde{f}(z) \\ &= c_k \int_{\gamma(z)}^{i\infty} f(w)[(cz+d)w - (az+b)]^{k-2} dw - \tilde{f}(z) \\ &= c_k \int_{\gamma(z)}^{i\infty} f(w)[(dw-b) - (-cw+a)z]^{k-2} dw - \tilde{f}(z) \\ &= c_k \int_{\gamma(z)}^{i\infty} (-cw+a)^k f(w) \left[\frac{dw-b}{cw-a} - z \right]^{k-2} \frac{dw}{(-cw+a)^2} - \tilde{f}(z) \\ &= c_k \int_{\gamma(z)}^{i\infty} f(\gamma^{-1}(w)) [\gamma^{-1}(w) - z]^{k-2} \frac{d\gamma^{-1}(w)}{dw} dw - \tilde{f}(z) \end{aligned}$$

ここで変数変換 $u = \gamma^{-1}(w)$ をすると

$$\begin{aligned} &= c_k \int_z^{\gamma^{-1}(i\infty)} f(u)(u-z)^{k-2} du - c_k \int_z^{i\infty} f(u)(u-z)^{k-2} du \\ &= -c_k \int_{\gamma^{-1}(i\infty)}^{i\infty} f(u)(z-u)^{k-2} du \\ &= \frac{(2\pi i)^{k-1}}{(k-2)!} \int_{\gamma^{-1}(i\infty)}^{i\infty} f(w)(z-w)^{k-2} dw \end{aligned}$$

となることから分かる.

\mathbf{V}_k を次数が $k-2$ 以下の多項式の空間とし, Γ の \mathbf{V}_k への作用を

$$(\gamma P)(X) := (cX+d)^{k-2} P\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

で定めるとき, parabolic 1-cocycle の空間:

$$Z^1(\Gamma, \mathbf{V}_k) = \{f: \Gamma \rightarrow \mathbf{V}_k \mid f(T) = 0, f(\gamma_1 \gamma_2) = \gamma_2(f(\gamma_1)) + f(\gamma_2), (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma)\}$$

は対応 $f \mapsto f(S)$ により, 空間

$$\mathbf{W}_k = \{P \in \mathbf{V}_k \mid (1+S)P(X) = (1+U+U^2)P(X) = 0\}$$

と 1 対 1 に対応する. ここで $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(T = SU)$ であり Γ の作用を群環 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ へ延ばした.

周期の理論の重要な結果, Eichler-Shimura-Manin の定理によると, \mathbf{W}_k の部分空間 $\mathbf{W}_k^0 := \langle X^{k-2} - 1 \rangle$ (coboundary に相当) による商は尖点形式の空間 \mathbf{S}_k の直和と同型である:

$$\mathbf{S}_k \oplus \mathbf{S}_k \cong \mathbf{W}_k / \mathbf{W}_k^0.$$

この同型射は周期多項式の偶数次部分, 奇数次部分を対応させる射で与えられる.

また、尖点形式 f に付随する L -関数を $L(f, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ とおくと、周期多項式は L -関数の正の整数点での特殊値で記述される:

$$g_{\gamma}(z) = - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(2\pi i)^j}{j!} L(f, k-1-j) z^j \quad (27)$$

実際,

$$\begin{aligned} g(z) &= -c_k \int_0^{i\infty} f(w)(z-w)^{k-2} dw \\ &= -c_k \int_0^{+\infty} f(ix)(z-ix)^{k-2} i dx \\ &= c_k \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} (-i)^{k-1-j} \int_0^{+\infty} f(ix) x^{k-2-j} dx z^j. \end{aligned}$$

だが、これに

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(ix) x^{k-2-j} dx z^j &= \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} a(n) e^{-2\pi i n x} x^{k-2-j} dx \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)}{(2\pi n)^{k-1-j}} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{k-2-j} dx \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)}{(2\pi n)^{k-1-j}} (k-2-j)! \\ &= \frac{(k-2-j)!}{(2\pi)^{k-1-j}} L(f, k-1-j) \end{aligned}$$

を代入するとよい.

さて定理の状況の場合、整数 weight の尖点形式 f を Dedekind eta-関数

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) q^{n^2/24}, \quad (q = e^{2\pi i z})$$

に置き換える. これは Γ に関する weight が $1/2$ の保型関数である:

$$\eta(z+1) = \zeta_{24} \eta(z), \quad \eta(-1/z) = (z/i)^{1/2} \eta(z), \quad \eta(\gamma z) = v_{\eta}(\gamma) \eta(z)$$

ここで $v_{\eta}(\gamma)$ は γ に依る 1 の 24 乗根で “Dedekind 和” を用いた具体記述が知られている. 半整数 weight の保型形式についての周期の理論が存在するかは知られていないと思うが、この Dedekind eta の Eichler 積分 $\tilde{\eta}$ とは何か? 式 (24) に於いて、形式的に $k = 1/2$ とおくと $\tilde{\eta}(z) = \sum_{n \geq 1} n \chi(n) q^{n^2/24}$ となる. また周期多項式を整数 weight のときの積分表示, 式 (26), にならって $g_{\gamma}(x) = c \int_{\gamma^{-1}(i\infty)}^{i\infty} \eta(w)(w-x)^{-3/2} dw$ とする. だがこの積分は x が上半平面にあるとき、被積分関数 $(w-x)^{-3/2}$ が $w=x$ に特異点をもつので積分路の取り方に依存して意味がつかない. しかし $x \in \mathbb{R}$ に限れば積分路に依らず $g(x)$ は実関数を定め、定理中の性質を持つことがわかる (cf. [5]). 論文では上半平面全体では成り立たないが、 $z \rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$ の極限值,

$g_\gamma(\alpha)$, $\tilde{\eta}(\alpha)$ の間に 整数 weight の場合の式 (25) と同じ式が成立することが示唆されている. 式 (6) の両辺に $q^{1/24}$ を乗じると,

$$q^{1/24} F_1(q) = -\frac{1}{2} \tilde{\eta}(z) + \left(\frac{1}{2} - E(q)\right) \eta(z)$$

となり $z \rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$ とすると $-2\varphi(\alpha) = \tilde{\eta}(\alpha)$ となるので定理が示される.

最後になりましたが, 論文紹介の機会を下さった村上斉先生, 研究集会でお世話になりました参加者の皆様に深くお礼申し上げます. また色々な質問に答えて下さった金子昌信先生, Zagier 先生, 二宮浩人さんにも深く感謝致します.

参考文献

- [1] Andrews, G., The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 2, Addison-Wesley, Reading 1976.
- [2] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, 「ベルヌーイ数とゼータ関数」 牧野書店 (2001).
- [3] Kohnen, W., Zagier, D., Modular forms with rational periods. In: Rankin, R.A. (ed.) Modular Forms, pp. 197-249. Chichester: Ellis Horwood 1984.
- [4] Lang, S., Introduction to Modular Forms. Springer, Berlin, 1976.
- [5] Lawrence, R., Zagier, D., Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. Asian J. Math. 3 (1999) 93-108.
- [6] Stoimenow, A., Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants. J. of Knot Theory and its Ramifications 7 (1998) 93-114.
- [7] Zagier, D., Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function. Topology 40 (2001) 945-960.