数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 126-140

Vector Valued Siegel Modular Forms of Sym(4) and Sym(6)

伊吹山知義 (Tomoyoshi Ibukiyama) 大阪大学大学院理学研究科

1 序

ジーゲル保型形式全体の構造を具体的に記述する問題を考える。たとえば2次の full Siegel modular group $Sp(2,\mathbb{Z})$ に関するスカラー値ジーゲル保型形式のなす環はウェイト 4, 6, 10, 12, 35 のもので生成されることは J. Igusa の結果として良く知られている。一方、ベクトル値ジーゲル保型形式についてはこのような結果はあまり知られていない。しかしたとえばリフティングひとつとってみてもベクトル値のものまで考慮に入れなければジーゲル保型形式の全体像の理解はかなり不十分になるはずである。とりあえず次数は2に限り、$Sp(2,\mathbb{Z})$ の場合にベクトル値ジーゲル保型形式の構造をできるだけ明らかにしたい。究極的にはこのようなものをすべて知りたいのであるが、ここでは重さが $\det^k Sym(s)$ $(s=4,6)$ の時について結果を得たので報告する。

2 保型形式テンソル環

もう少し詳しく問題を説明するためにまずベクトル値ジーゲル保型形式の定義を述べたい。2次一般線型群 $GL_2(\mathbb{C})$ の既約正則表現 ρ を考える。ジーゲル上半空間

$$H_2=\{Z=X+iY\in M_2(\mathbb{C});\ {}^tX=X,{}^tY=Y\in M_n(\mathbb{R}),\ Y>0\}$$

には実ランク2のシンプレクティック群 $Sp(2,\mathbb{R})$ が1次分数変換

$$MZ=(AZ+B)(CZ+D)^{-1},\ M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp(2,\mathbb{R})$$

で作用する。$\Gamma_2 = Sp(2,\mathbb{Z})$ とおく。H_2 上の正則関数 $F(Z)$ について

$$F(\gamma Z) = \rho(CZ+D)F(Z)$$

が任意の

$$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

について成り立つとき、$F(Z)$ を重さ ρ の正則ジーゲル保型形式という。特に

$$\Phi(F) := \lim_{\lambda\to\infty} F\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix} = 0$$

が成り立つときに F を重さ ρ の正則カスプ形式という。重さ ρ の正則ジーゲル保型形式のなすベクトル空間を $A_\rho(\Gamma_2)$、また重さ ρ の正則カスプ形式がなすベクトル空間を $S_\rho(\Gamma)$ と書くことにする。$GL_2(\mathbb{C})$ の s 次対称テンソル表現を σ_s または $Sym(s)$ と書くと、$GL_2(\mathbb{C})$ の正則表現は $\det^k Sym(s)$ のかたちのものしかない。この表現を以下 $\rho_{k,s}$ と書くことにする。またこの場合 $A_{\rho_{k,s}}(\Gamma) = A_{k,s}(\Gamma_2)$, $S_{\rho_{k,s}}(\Gamma_2) = S_{k,s}(\Gamma_2)$ と書く。特に、$s=0$ のとき、簡単に $A_{k,0}(\Gamma_2) = A_k(\Gamma_2)$, $S_{k,0}(\Gamma_2) = S_k(\Gamma_2)$ と書く。話を簡単にするために、以下では $\sigma_s = Sym(s)$ の表現行列を具体的にひとつ指定しておく。すなわち u_1, u_2 を変数とし、

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

に対して、$(v_1, v_2) = (u_1, u_2)g$ とおく。ここで

$$(v_1^s, v_2^{s-1}v_2, \ldots, v_2^s) = (u_1^s, u_1^{s-1}u_2, \ldots, u_2^s)\sigma_s(g)$$

で表現を実現しておくことにする。

$F \in A_{k,s}(\Gamma)$ は $s+1$ 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^{s+1}$ に値を取るが、上で定義した Siegel Φ operator に対して $\Phi(F)$ は $\mathbb{C}^{s+1}$ の 1 次元部分空間に値を取ることが知られている。(Cartan Seminar). これにより実は $\Phi(F) \in S_{k+s}(SL_2(\mathbb{Z}))$ と見なすことができる。ここで $S_{k+s}(SL_2(\mathbb{Z}))$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するウェイト $k+s$ の 1 変数のカスプ形式の空間である。よって

$k+s$ が奇数ならば $A_{k,s}(\Gamma)$ の元は自動的にカスプ形式になる。(ちなみに s が奇数ならば、$A_{k,s}(\Gamma)=0$ が容易にわかる。) $k\geq 5$ ならば $\Phi: A_{k,s}(\Gamma)\to S_{k+s}(SL_2(\mathbb{Z}))$ は全射であることが知られている (Satake [8], Arakawa [1])。(後で見るように実は $k=4$ でも全射である。) $k<0$ であれば $A_k(\Gamma)=0$ であることは古典的な結果 (ジーゲル) であり良く知られている。さて、ここで、$A(\Gamma)=\oplus_{k=0}^{\infty}A_k(\Gamma)$ とおけば、これは明らかに環である。さらに

$$\mathcal{A}^{\otimes}(\Gamma)=\oplus_{k,s=0}^{\infty}A_{k,s}(\Gamma)$$

とおこう。ここで既約表現のテンソル積 $\rho_{k,s}\otimes\rho_{l,r}$ は既約分解したときに各既約成分の重複度は1であり、よって $\mathcal{A}^{\otimes}(\Gamma)$ はテンソル積により環構造がはいる。これはもちろん非常に大きな環である。これを保型形式テンソル環と呼ぶことを提唱したい。保型形式テンソル環はもちろん無限生成である。なぜなら、s が大きくなっても k が比較的小さいところ (たとえば $k=4$) でいつまでも $A_{k,s}\neq 0$ となるからである。この点はヤコービ形式でウェイトとインデックスを両方動かして直和を取った環と似ている。しかし、Eichler-Zagier の本によれば、ヤコービ形式のときには少し正則性の条件を弱めて weak Jacobi 形式というものを定義すれば、weak Jacobi 形式全体のなす環は有限生成であることが証明されている。我々も類似の現象がないかを知りたいのである。

問題 1 保型形式テンソル環 $A^{\otimes}(\Gamma_2)$ の構造を求めよ。このための近似として、ベクトル値正則ジーゲル保型形式を含む弱ジーゲル保型形式を定義し、弱ジーゲル保型形式テンソル環が有限生成環であることを示せ。

もちろん今のところ「弱ジーゲル保型形式」という用語で何を意味するかはわからないので、このような問題は夢にすぎないし、保型形式テンソル環にどんな幾何学が附随するのかもわからないのであるが、新しい視点として面白いと信じている。とりあえずはこのような大きな問題はわからないので、個々の表現について実験的な結果を求めることには意味があると考える。これを次節から述べる。

3 ベクトル値ジーゲル保型形式のなす加群

自然数 s を固定し、$A^{\sigma_s}(\Gamma_2)=\oplus_{k=0}^{\infty}A_{k,s}(\Gamma_2)$, $A^{\sigma_s,even}(\Gamma_2)=\oplus_{k=0}^{\infty}A_{2k,s}(\Gamma_2)$, $A^{\sigma_s,odd}(\Gamma_2)=\oplus_{k=0}^{\infty}A_{2k+1,s}(\Gamma_2)$. とおく。とくに、$s=0$ のときは、これ

らを $A(\Gamma_2)$, $A^{even}(\Gamma_2)$ などと書くことにする。$A^{\sigma_s}(\Gamma_2)$ などは $s>0$ では環ではないが、$A(\Gamma_2)$ 加群とも $A^{even}(\Gamma_2)$ 加群とも見なせる。いくつかの小さい s について、この加群構造を明らかにするのが当面の目標である。まず、知られている結果を列挙しよう。

1. J. Igusa の定理により $A(\Gamma)=\mathbb{C}[\phi_4,\phi_6,\chi_{10},\chi_{12},\chi_{35}]$ が知られている。ここで ϕ_4, ϕ_6 はウェイトが 4, 6 のジーゲルアイゼンシュタイン級数であり、χ_{10}, χ_{12}, χ_{35} はそれぞれウェイトが 10, 12, 35 のカスプ形式（定数倍をのぞきただひとつ）である。
2. s が奇数ならば $A_{k,s}(\Gamma)=0$ である。これは $-1_4\in\Gamma$ の作用からの単純な帰結である。
3. $k<0$ ならば $A_k(\Gamma)=0$ という結果の類似がベクトル値の場合にも Cartan Seminar で触れられているが、あまり余り十分ではなかった。その後の $s\geq 1$ のとき $A_{0,s}(\Gamma)=0$ が知られている。(Freitag [4]).
4. $s\geq 2$ のとき、$k\leq 5$ ならば $A_{k,s}(\Gamma)$ の次元は対馬により公式が知られている。$k\leq 4$ は一般の s についてはわかっていない。
5. $s=2$ について、$A^{\sigma_2,even}(\Gamma)$ の $A^{even}(\Gamma)-$ 加群の構造は T. Satoh [9] により知られていた。手法は２つの偶数ウェイトの $\mathbb{C}$-valued Siegel modular forms の組に対して微分作用素をもちいてベクトル値ジーゲル保型形式を構成するというものである。また $A^{\sigma_2,odd}(\Gamma)$ の $A^{even}(\Gamma)-$ 加群の構造は T. Ibukiyama [6] により知られていた。手法は３つの偶数ウェイトの $\mathbb{C}$-valued Siegel modular forms の３つ組に対して微分作用素を用いてベクトル値のものを構成するというものである。（これらはどちらも自由 $A^{even}(\Gamma_2)-$ 加群ではない。）

$k\leq 4$ のときの $A_{k,s}(\Gamma)$ については次元公式は知られていない。たとえばわれわれは $A_{3,s}(\Gamma)=S_{3,s}(\Gamma)$, $A_{2,s}(\Gamma)$, $A_{1,s}(\Gamma)=S_{1,s}(\Gamma)$ について、ゼロ空間でないような $s\geq 1$ の実例はひとつも持っていない。しかし、いくつかわかることもあるので定理としてまとめておく。（たとえば Φ operator の振る舞いについてはあとの定理で完全にわかる。）少し記号を準備する。

$F\in A_{k,s}(\Gamma)$ に対して

$$(WF)(\tau,\tau')=F\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & \tau'\end{pmatrix}$$

とおく。これは Igusa により Witt operator と呼ばれている。また

$$\theta(Z) = \prod_{m:even} \theta_m(Z)$$

とおく。ここで θ_m はテータ定数であり、m は $\mathbb{Z}^4$ の 10 個の even characteristics を渉る。θ はウェイト 5 の $Sp(2,\mathbb{Z})$ の指標付きの保型形式 ($Sp(2,\mathbb{Z})$ の指数 2 の部分群の保型形式) である。$WF=0$ ならば θ が F (の各成分) をわりきるのは、$\mathbb{C}$-valued の保型形式のときと同様であるが、F が θ^2 で割りきれるとは限らない点は異なる。次にテータ関数による構成について述べる。d 次の偶ユニモジュラー格子 L と、2 行 d 列の行列上の $\mathbb{C}^{s+1}$ -valued 多重調和 (pluri-harmonic) 多項式 P で、

$$P(AX) = \det(A)^k \sigma_s(A) P(X)$$

を満たすものをとると、

$$\Theta_{L,P}(\tau) = \sum_{x,y\in L} P((^t(x,y))e^{\pi i((x,x)\tau+(x,y)z+(y,y)\tau'))}$$

と置くとき、$\Theta_{L,P} \in M_{d/2+k,s}(\Gamma_2)$ である。特に $x=(x_i), y=(y_i) \in \mathbb{C}^d$ の内積を $(x,y)=\sum_{i=1}^d x_i y_i$ と (複素共役をとらないで) 定義し、$a, b \in \mathbb{C}^d$ で $(a,a)=(a,b)=(b,b)=0$ なるものをとり、$\mathbb{C}^{s+1}$ valued の多項式を

$$\begin{aligned} P_a^{(s)} &= \left((x,a)^{s-\nu}(y,a)^{\nu}\right)_{0\le\nu\le s} \\ P_{a,b,k}^{(s)} &= \left((x.a)^{s-\nu}(y,a)^{\nu}\begin{vmatrix}(x,a) & (y,a)\\ (x,b) & (y,b)\end{vmatrix}^k\right)_{0\le\nu\le s} \end{aligned}$$

(ただし第 1 成分が $\nu=0$ で第 $s+1$ 成分が $\nu=s$ のところ) と置くと、これらは上の条件を満たす多重調和多項式ベクトルで $\Theta_{L,P_a^{(s)}} \in A_{d/2,s}(\Gamma_2)$, $\Theta_{L,P_{a,b,k}^{(s)}} \in A_{d/2+k,s}(\Gamma_2)$ である。

定理 1 (1) $\Phi : A_{4,s}(\Gamma) \to S_{4+s}(SL_2(\mathbb{Z}))$ は全射である。
(2) $F \in S_{k,s}(\Gamma_2)$ とする。$s=2r$ とするとき、$k+r<12$ ならば $WF=0$ であり、F は θ でわりきれる。
(3) $k=2$ ならばカスプ形式しか存在しない。すなわち $A_{2,s}(\Gamma)=S_{2,s}(\Gamma)$ である。特に $s\le 18$ ならば $S_{2,s}(\Gamma)=0$ である。

証明:(1) サイズ8の同型を除きただ一つの偶ユニモジュラー格子 $L=E_8$ をとると $\Theta_{E_8,P_a^s}\in A_{4,s}(\Gamma_2')$ であり、

$$\Phi(\Theta_{E_8,P_a^{(s)}})=\sum_{n=0}^{\infty}(x,a)^s e^{2\pi in\tau}\in S_{k+4}(SL_2(\mathbb{Z}))$$

であり、これは $(a,a)=0$ なる $a\in\mathbb{C}^8$ をいろいろ動かすとき $S_{4+s}(SL_2(\mathbb{Z}))$ を生成する（Boecherer [2]）から、Φ は全射である。

（2）、（3）の証明を述べる。仮定下では $WF=0$ であることを示す。WF は $\mathbb{C}^{s+1}$ valued であるが、第 j 成分は、$SL_2(\mathbb{Z})$ のウェイト $k+s-j+1$ の保型形式 f_ν と $SL_2(\mathbb{Z})$ の τ' についてウェイト $k+j-1$ の保型形式 $g_\nu(\tau')$ を用いて

$$WF=\sum_{\nu}f_\nu(\tau)g_\nu(\tau')$$

と書ける。ここで f_ν はウェイト $k+s-j+1$ の保型形式の基底の一部として於いて良い。F はカスプ形式としているから、$g_\nu(\tau')$ がカスプ形式で無ければ $f_\nu(\tau)=0$ のはずである。$s=2r$ で $k+r<12$ ならば、$1\le j\le r+1$ のとき $k+j-1\le k+r<12$, しかし、ウェイトが12より小さい $SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式は存在しないから、g_ν はカスプ形式ではありえない。よって、$f_\nu(\tau)g_\nu(\tau')=0$ である。（つまり f_ν か g_ν のどちらかはゼロである。）言い換えれば WF の第1成分から第 $r+1$ 成分まではゼロである。$U=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ とおいて

$$\begin{pmatrix}U&0\\0&U\end{pmatrix}$$

の作用を考えれば、残りの成分もゼロであることがわかる。よって $WF=0$ である。

もし $F\in A_{2,s}(\Gamma_2)$ ならば、$SL_2(\mathbb{Z})$ のウェイト2の保型形式は存在しないから、WF の第1成分は0である。一般論より (e.g. Arakawa [1])、$\Phi(F)$ は第1成分以外は常にゼロだから、上の考察と合わせて $\Phi(F)=0$ であり、F はカスプ形式である。また $s\le 18$ ならば（2）より $WF=0$ だから、F は θ でわりきれるが、$F/\theta\in A_{-3,s}(\Gamma_2)=0$. よって $F=0$ である。q.e.d.

問：実はすべての s について $S_{1,s}(\Gamma_2)=S_{2,s}(\Gamma_2)=0$ なのではないか？そうでないとしたら、どうすればゼロでない例が構成できるか？

定理 2 次の次元公式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim S_{k,4}(\Gamma_2) = \frac{(t^{10}+t^{12}+t^{14}+t^{16}+t^{18})(1+t^5)+t^{20}-t^{30}}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim M_{k,4}(\Gamma_2) = \frac{(t^8+t^{10}+t^{12}+t^{14}+t^{16})(1+t^7)}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim M_{k,6}(\Gamma_2) = \frac{(t^6+t^8+t^{10}+t^{12}+t^{14}+t^{16}+t^{18})(1+t^5)}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim M_{k,8}(\Gamma_2) = \frac{(t^4+t^8+2t^{10}+2t^{12}+t^{14}+t^{16}+t^{18})}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})} + \frac{(t^9+t^{11}+t^{13}+2t^{15}+2t^{17}+t^{19}+t^{23})}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})}$$

証明 : $k>4$ であれば、$\dim S_{k,s}(\Gamma_2)$ は Tsushima [10] により知られている。$k\geq 4$ ならば $k>4$ については Satake [8] または Arakawa [1] より、また $k=4$ については上記の定理により、Φ は $S_{k+s}(SL_2(\mathbb{Z}))$ への全射である。よって、$k\geq 4$ について $\dim M_{k,s}(\Gamma_2) = \dim S_{k,s}(\Gamma_2) + \dim S_{k+s}(SL_2(\mathbb{Z}))$ である。ここで前の定理より、$k\leq 4$ ならば $F\in S_{k,6}(\Gamma_2)$ について $WF=0$ であり、F/θ はウェイトが det の負べきを含むから $F=0$ である。よって $k\leq 4$ で $S_{k,6}(\Gamma_2)=0$. また $k\leq 4$ ならば $S_{k+6}(SL_2(\mathbb{Z}))=0$ であるから $M_{k,6}(\Gamma_2)=0$ でもある。$s=4, s=8$ も似たような論法で求まるがここでは略す。q.e.d.

4 ベクトル値ジーゲル保型形式と微分作用素

$M^{\sigma_s}(\Gamma_2)$ は $A^{even}(\Gamma_2)=\mathbb{C}[\phi_4,\phi_6,\chi_{10},\chi_{12}]$ 上の加群であるが、前節の次元公式によれば $s=4, 6, 8$ については自由加群であることが想像できる。たとえば $s=4$ について、$A^{even}_{k,4}(\Gamma_2)$ はウェイトが $\rho_{8,4}$, $\rho_{10,4}$, $\rho_{12,4}$, $\rho_{14,4}$, $\rho_{16,4}$ なるもので生成されそうである。さらには、証明の方法としてはベクトルの成分の数は5なのであるから、この保型形式を並べれば、5次正方行列となりこれの行列式が消えないことを言っておけば、自由基底であることもわかる。よって問題は実際にこのような生成元を構成することである。佐藤孝和氏は重さが $\rho_{k,2}=\det^k Sym(2)$ (k は偶数) のものを構成するのに、$\mathbb{C}$-valued の保型形式から微分作用素で作る方法を用いた。(cf. [9]) 彼がこの計算を行ったときは、まだこのような微分作用素

の一般論はなかったので、微分作用素の構成自身、$Sym(2)$ の場合に限る偶然的な事情によるものであった。その後、Ibukiyama [5] で r 個の $\mathbb{C}$ 値ジーゲル保型形式から一般のベクトル値保型形式をつくる微分作用素の特徴付けの一般論が述べられたが、これは具体的な構成の手続きも与えるものであった。また、佐藤氏の構成と異なり、たとえば３つの偶数ウェイトのジーゲル保型形式から出発して奇数ウェイト（つまり $\det^k Sym(s)$ の k が奇数）のものも構成できる点なども新しい。紙数の関係で、ここではこのような微分作用素の一般論 (cf. [5]) は述べずに、我々に必要な場合だけを記述する。具体的な微分作用素の記述はなかなか煩瑣であるが、これを書かないと何をやっているのか、わからなくなってしまうので、書くことにする。但し微分作用素の形で書く代わりに次のようにする。

２行２列の対称行列 R, S, T をとり、成分をそれぞれ r_{ij}, s_{ij}, t_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq 2)$ とする。$Q(R,S)$ または $Q(R,S,T)$ を R と S、または R, S と T の成分の斉次多項式、または斉次多項式のなすベクトルとする。$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix} \in H_2$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \tau'} \end{pmatrix}$$

とおく。$Z^{(\nu)} \in H_2$ $(1 \leq \nu \leq 3)$ を独立な変数として、H_2 上の $\mathbb{C}$ valued な関数 F_ν $(1 \leq \nu \leq 3)$ に対し

$$(\mathcal{D}F_1F_2F_3)(Z) = Q\left(\frac{\partial}{\partial Z^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial Z^{(2)}}, \frac{\partial}{\partial Z^{(2)}}\right)F_1(Z^{(1)})F_2(Z^{(2)})F_3(Z^{(3)})\Big|_{Z^{(1)}=Z^{(2)}=Z^{(3)}=Z}$$

とおく。ここで右辺は微分した後にすべての変数を Z にしたもので、実際には作用の結果は Z の成分についての $F_1(Z)F_2(Z)F_3(Z)$ 上の微分作用素に書き直せるのでこれを $\mathcal{D}$ とおいたことになっている。同様に Q の R と S の成分の多項式、または多項式成分のベクトルなら

$$(\mathcal{D}F_1F_2)(Z) = Q\left(\frac{\partial}{\partial Z^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial Z^{(2)}}\right)F_1(Z^{(1)})F_2(Z^{(2)})\Big|_{Z^{(1)}=Z^{(2)}=Z}$$

とおく。いずれも $\mathcal{D}$ は Q で決まるのでこれを $\mathcal{D}_Q$ と置くことにする。

以下の具体的な微分作用素は、[3], [5] に少なくとも原理的には書かれている。[7] も参照。

Sym(4); k even 自然数 l, k に対して

$$Q(R,S) = \frac{l(l+1)}{2}\begin{pmatrix} r_{11}^2 \\ 4r_{11}r_{12} \\ 4r_{12}^2+2r_{11}r_{22} \\ 4r_{12}r_{22} \\ r_{22}^2 \end{pmatrix} - (l+1)(k+1)\begin{pmatrix} r_{11}s_{11} \\ 2(r_{11}s_{12}+r_{12}s_{11}) \\ r_{11}s_{22}+r_{22}s_{11}+4r_{12}s_{12} \\ 2(r_{12}s_{22}+r_{22}s_{12}) \\ r_{22}s_{22} \end{pmatrix}$$

$$+\frac{k(k+1)}{2}\begin{pmatrix} s_{11}^2 \\ 2s_{11}s_{12} \\ 4s_{12}^2+2s_{11}s_{12} \\ 2s_{12}s_{22} \\ s_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

とおく。このとき $F\in A_{k,4}(\Gamma_2)$ と $G\in A_{l,4}(\Gamma_2)$ に対して $\mathcal{D}_Q(FG)\in A_{k+l,4}(\Gamma_2)$ である。このようにして得られる保型形式 $\mathcal{D}_Q(FG)$ を簡単に $\{F,G\}_{Sym(4)}$ と書くことにする。あえて微分作用素で具体的に書くと、次のようになる。

$$\{F,G\}_{Sym(4)} = \frac{l(l+1)}{2}G\times\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial\tau^2} \\ 2\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial\tau'} \\ 2\frac{\partial^2 F}{\partial\tau'\partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial\tau'^2} \end{pmatrix} - (l+1)(k+1)\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial\tau}\frac{\partial G}{\partial\tau} \\ \frac{\partial F}{\partial\tau}\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial\tau}\frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial\tau}\frac{\partial g}{\partial\tau'}+\frac{\partial G}{\partial\tau}\frac{\partial F}{\partial\tau'}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial\tau'}\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial\tau'}\frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial\tau'}\frac{\partial G}{\partial\tau'} \end{pmatrix}$$

$$+\frac{k(k+1)}{2}F\times\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2} \\ 2\frac{\partial^2 G}{\partial\tau\partial z} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 G}{\partial\tau\partial\tau'} \\ 2\frac{\partial^2 G}{\partial\tau'\partial z} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial\tau'^2} \end{pmatrix}$$

さらにウェイトを２ふやす微分作用素を考える。

まず、次の記号を導入する。

$$\begin{aligned} P_0(R,S) &= \det(R), \\ P_1(R,S) &= \begin{vmatrix} r_{11} & s_{12} \\ r_{12} & s_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & r_{12} \\ s_{12} & r_{22} \end{vmatrix}, \\ P_2(R,S) &= \det(S). \end{aligned}$$

ここで変数 u_1, u_2 に対して

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

とおき、自然数 k, l に対して

$$\begin{aligned} &Q(R,S,u) = \\ &\quad (uR{}^tu)^2 \times \Big(-(l-\frac{1}{2})l(l+1)(l+2)P_0(R,S) \\ &\quad +(k-\frac{1}{2})(l-\frac{1}{2})(l+1)(l+2)P_1(R,S) - (k-\frac{1}{2})(k+2)(l+2)(l+3)P_2(R,S)\Big) \\ &\quad +(uR{}^tu)(uS{}^tu) \times \Big(2(l-\frac{1}{2})(l+1)(l+2)(k+3)P_0(R,S) \\ &\quad -2(k-\frac{1}{2})(l-\frac{1}{2})(k+2)(l+2)P_1(R,S) + 2(k-\frac{1}{2})(k+1)(k+2)(l+3)P_2(R,S)\Big) \\ &\quad +(uS{}^tu)^2 \times \Big(-(l-\frac{1}{2})(l+2)(k+2)(k+3)P_0(R,S) \\ &\quad +(k-\frac{1}{2})(l-\frac{1}{2})(k+1)(k+2)P_1(R,S) - (k-\frac{1}{2})k(k+1)(k+2)P_2(R,S)\Big) \end{aligned}$$

とする。$Q(R,S,u) = \sum_{\nu=0}^{4} Q_\nu(R,S)u_1^\nu u_2^{4-\nu}$ として、

$$Q(R,S) = \begin{pmatrix} Q_4(R,S) \\ Q_3(R,S) \\ Q_2(R,S) \\ Q_1(R,S) \\ Q_0(R,S) \end{pmatrix}$$

として $Q_\nu(R,S)$ を定義する。$F \in A_{k,4}(\Gamma_2)$, $G \in A_{l,4}(\Gamma_2)$ に対して、$\mathcal{D}_Q(FG) \in A_{k+l,4}(\Gamma_2)$ であり、これを $\{F,G\}_{\det^2 Sym(4)}$ と書くことにする。

Sym(4); k odd 自然数 k_1, k_2, k_3 に対して

$$Q(R,S,T) = \begin{pmatrix} Q_4(R,S,T) \\ Q_3(R,S,T) \\ Q_2(R,S,T) \\ Q_1(R,S,T) \\ Q_0(R,S,T) \end{pmatrix}$$

とおく。ただし、

$$Q_4(R,S,T) = (k_2+1)\begin{vmatrix} (k_1+1)r_{11} & k_2 & k_3 \\ r_{11}^2 & s_{11} & t_{11} \\ r_{11}r_{12} & s_{12} & t_{12} \end{vmatrix} - (k_1+1)\begin{vmatrix} k_1 & (k_2+1)s_{11} & k_3 \\ r_{11} & s_{11}^2 & t_{11} \\ r_{12} & s_{11}s_{12} & t_{12} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} Q_3(R,S,T) = {} & 2(k_2+1)\begin{vmatrix} (k_1+1)r_{12} & k_2 & k_3 \\ r_{11}r_{12} & s_{11} & t_{11} \\ r_{12}^2 & s_{12} & t_{12} \end{vmatrix} - 2(k_1+1)\begin{vmatrix} k_1 & (k_2+1)s_{12} & k_3 \\ r_{11} & s_{11}s_{12} & t_{11} \\ r_{12} & s_{12}^2 & t_{12} \end{vmatrix} \\ & +(k_2+1)\begin{vmatrix} (k_1+1)r_{11} & k_2 & k_3 \\ r_{11}^2 & s_{11} & t_{11} \\ r_{11}r_{22} & s_{22} & t_{22} \end{vmatrix} - (k_1+1)\begin{vmatrix} k_1 & (k_2+1)s_{11} & k_3 \\ r_{11} & s_{11}^2 & t_{11} \\ r_{22} & s_{11}s_{22} & t_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$Q_2(R,S,T) = 3(k_2+1)\begin{vmatrix} (k_1+1)r_{12} & k_2 & k_3 \\ r_{11}r_{12} & s_{11} & t_{11} \\ r_{22}r_{12} & s_{22} & t_{22} \end{vmatrix} - 3(k_1+1)\begin{vmatrix} k_1 & (k_2+1)s_{12} & k_3 \\ r_{11} & s_{11}s_{12} & t_{11} \\ r_{22} & s_{22}s_{12} & t_{22} \end{vmatrix}.$$

$$Q_1(R,S,T) =$$

$$2(k_2+1)\begin{vmatrix}(k_1+1)r_{12} & k_2 & k_3\\ r_{12}^2 & s_{12} & t_{12}\\ r_{12}r_{22} & s_{22} & t_{22}\end{vmatrix} - 2(k_1+1)\begin{vmatrix}k_1 & (k_2+1)s_{12} & k_3\\ r_{12} & s_{12}^2 & t_{12}\\ r_{22} & s_{12}s_{22} & t_{22}\end{vmatrix}$$
$$+(k_2+1)\begin{vmatrix}(k_1+1)r_{22} & k_2 & k_3\\ r_{11}r_{22} & s_{11} & t_{11}\\ r_{22}^2 & s_{22} & t_{22}\end{vmatrix} - (k_1+1)\begin{vmatrix}k_1 & (k_2+1)s_{22} & k_3\\ r_{11} & s_{11}s_{22} & t_{11}\\ r_{22} & s_{22}^2 & t_{22}\end{vmatrix}$$

$$Q_0(R,S,T) =$$

$$(k_2+1)\begin{vmatrix}(k_1+1)r_{22} & k_2 & k_3\\ r_{22}r_{12} & s_{12} & t_{12}\\ r_{22}^2 & s_{22} & t_{22}\end{vmatrix} - (k_1+1)\begin{vmatrix}k_1 & (k_2+1)s_{22} & k_3\\ r_{12} & s_{22}s_{12} & t_{12}\\ r_{22} & s_{22}^2 & t_{22}\end{vmatrix}.$$

Q をこのように取るとき、$F \in M_{k_1}(\Gamma_2)$, $G \in M_{k_2}(\Gamma_2)$, $H \in M_{k_3}(\Gamma_2)$ に対して $\mathcal{D}(FGH) \in M_{k_1+k_2+k_3+1,4}(\Gamma_2)$ である。これを $\{F,G,H\}_{\mathrm{det}\cdot Sym(4)}$ と書くことにする。

Sym(6); k even 変数 u_1, u_2 およびベクトル u を前と同様に定め、2 次対称行列 R, S に対して、

$$\begin{aligned} Q(R,S,u) &= -\binom{k_2+2}{3}({}^t uRu)^3 + \binom{k_2+2}{2}\binom{k_1+2}{1}({}^t uRu)^2({}^t uSu) \\ &\quad -\binom{k_2+2}{1}\binom{k_1+2}{2}({}^t uRu)({}^t uSu)^2 + \binom{k_1+2}{3}({}^t uSu)^3. \end{aligned}$$

とおく。$Q_\nu(R,S)$ を $Q(R,S,u) = \sum_{\nu=0}^{6} Q_\nu(R,S)u_1^\nu u_2^{6-\nu}$ で定義し、

$$Q(R,S) = \begin{pmatrix} Q_6(R,S)\\ Q_5(R,S)\\ Q_4(R,S)\\ Q_3(R,S)\\ Q_2(R,S)\\ Q_1(R,S)\\ Q_0(R,S)\end{pmatrix}$$

とおく。$F \in M_{k,6}(\Gamma_2)$ と $G \in M_{l,6}(\Gamma_2)$ に対して、$\mathcal{D}(FG) \in M_{k+l,6}(\Gamma_2)$ である。これを $\{F,G\}_{Sym(6)}$ と書くことにする。

次にウェイトを 2 増やす微分作用素を考える。P_0, P_1, P_2 を前と同様として、次のように置く。

$$
\begin{aligned}
Q(R,S,u) = & \\
& \left((k-\frac{1}{2})(l-\frac{1}{2})P_1 - l(l-\frac{1}{2})P_0 - k(k-\frac{1}{2})P_2\right) \\
\times & \left(-\binom{l+3}{3}({}^tuRu)^3 + \binom{l+3}{2}\binom{k+3}{1}({}^tuRu)^2({}^tuSu)\right. \\
& \left.-\binom{l+3}{1}\binom{k+3}{2}({}^tuRu)({}^tuSu)^2 + \binom{k+3}{3}({}^tuSu)^3\right) \\
- & (k+l+4)((l-\frac{1}{2})P_0(u^tSu) - (k-\frac{1}{2})P_2({}^tuRu)) \\
\times & \left(\frac{(l+3)(l+2)}{2}({}^tuRu)^2 - (k+3)(l+3)({}^tuRu)({}^tuSu) + \frac{(k+3)(k+2)}{2}({}^tuSu)^2\right)
\end{aligned}
$$

これに対して、$Q(R,S,u) = \sum_{\nu=0}^{6} Q_\nu(R,S)u_1^\nu u_2^{6-\nu}$ として、前と同様に $Q(R,S) = (Q_\nu(R,S))_{0\le\nu\le 6}$ とする。$F \in A_k(\Gamma_2)$, $G \in A_l(\Gamma_2)$ ならば $\mathcal{D}(FG) \in A_{k+l+2,6}(\Gamma_2)$ である。これを $\{F,G\}_{\det^2 Sym(6)}$ と書くことにする。

5 テータ関数による構成

前節までに述べた構成では、構成しきれない部分がでるので、格子を用いて構成する。$L = \Gamma_{16}$ を $\mathbb{R}^{16}$ 内の $E_8 + E_8$ と同型でないような、同型を除いて一意的に決まる偶ユニモジュラー格子とする。具体的には、たとえば

$$
\Gamma_{16} = \{(x_i) \in \mathbb{Q}^{16}; 2x_i \in \mathbb{Z}, x_i - x_j \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{16} x_i \in 2\mathbb{Z}\}
$$

で与えられる。ここで、

$$
\begin{aligned}
a &= (2,i,i,i,i,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0), \\
b &= (i,i,-i,-i,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

とおく。$(a,a) = (a,b) = (b,b) = 0$ である。前に記号を定めたように $\mathbb{C}^7$ valued の多重調和多項式ベクトル $P_a^{(6)}(X)$, $P_{a,b,2}^{(6)}(X)$ $(X \in M_{2,16}(\mathbb{C}))$ を

とる。これらに対して $X_8 = \Theta_{L,P_a}$, $X_{10} = \Theta_{L,P_{a,b,2}}$ とおくと、X_8, X_{10} は恒等的にゼロではなく、$X_8 \in S_{8,6}$, $X_{10} \in S_{10,4}$ である。

6 主結果

ϕ_{6,σ_6} を $M_{6,6}(\Gamma_2)$ に属するベクトル値のアイゼンシュタイン級数とする。(cf. Arakawa [1])

定理 3 $A^{\sigma_4,even}(\Gamma_2)$, $A^{\sigma_4,odd}(\Gamma_2)$, $A^{\sigma_6,even}(\Gamma_2)$ は $A^{even}(\Gamma_2)$ 上の自由加群である。自由加群としての基底は次で与えられる。

(1) $A^{\sigma_4,even}(\Gamma_2)$ については、

$$\{\phi_4,\phi_4\}_{Sym(4)} \in M_{8,4} \qquad \{\phi_4,\phi_6\}_{Sym(4)} \in M_{10,4},$$
$$\{\phi_4,\phi_6\}_{\det^2 Sym(4)} \in S_{12,4}, \qquad \{\phi_4,\chi_{10}\}_{Sym(4)} \in S_{14,4},$$
$$\{\phi_6,\chi_{10}\}_{Sym(4)} \in S_{16,4}.$$

(2) $A^{\sigma_4,odd}(\Gamma_2)$ については

$$\{\phi_4,\phi_4,\phi_6\}_{\det Sym(4)} \in S_{15,4} \qquad \{\phi_4,\phi_6,\phi_6\}_{\det Sym(4)} \in S_{17,4}$$
$$\{\phi_4,\phi_4,\chi_{10}\}_{\det Sym(4)} \in S_{19,4} \qquad \{\phi_4,\phi_4,\chi_{12}\}_{\det Sym(4)} \in S_{21,4}$$
$$\{\phi_4,\phi_6,\chi_{12}\}_{\det Sym(4)} \in S_{23,4}$$

(3) $A^{\sigma_6,even}(\Gamma_2)$ については

$$\phi_{6,6} \in M_{6,6} \qquad X_8 \in S_{8,6} \qquad X_{10} \in S_{10,6}$$
$$\{\phi_4,\phi_6\}_{\det^2 Sym(6)} \in S_{12,6} \quad \{\phi_4,\chi_{10}\}_{Sym(6)} \in S_{14,6}$$
$$\{\phi_4,\chi_{12}\}_{Sym(6)} \in S_{16,6} \quad \{\phi_6,\chi_{12}]_{Sym(6)} \in S_{18,6}$$

ちなみに、今回あげた例では、たまたま $A^{\sigma_s}(\Gamma)$ は $A^{even}(\Gamma_2)$ 上の自由加群であったが、一般にはそうではない (例：$s=2$, cf. [9], [6]). 次元公式から考えて、$A^{\sigma_6,odd}(\Gamma_2)$, $A^{\sigma_8,even}(\Gamma_2)$, $A^{\sigma_8,odd}(\Gamma_2)$ はいずれも自由加群であると思われるし、正しければ証明も易しいはずであるが、時間が無くて確かめていない。一方 $A^{\sigma_{10},even}(\Gamma_2)$ は次元公式から自由加群でないことがすぐにわかり、構造はやや複雑になるものと思われる。

参考文献

[1] T. Arakawa, Vector-valued Siegel's modular forms of degree two and the associated Andrianov L-functions. Manuscripta Math. 44 (1983), no. 1-3, 155–185.

[2] S. Boecherer, Siegel Modular Forms and Theta Series, Proc. Symp. Pure Math. 49 (1989), Part 2, 3–17.

[3] W. Eholzer and T. Ibukiyama, Rankin-Cohen type differential operators for Siegel modular forms. Internat. J. Math. 9 (1998), no. 4, 443–463.

[4] E. Freitag, Ein Verschwindungssatz fur automorphe Formen zur Siegelschen Modulgruppe. Math. Z. 165 (1979), no. 1, 11–18.

[5] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials. Comment. Math. Univ. St. Paul. 48 (1999), no. 1, 103–118.

[6] 伊吹山知義、Differential operators and structures of vector valued Siegel modular forms, 京大数理研講究録 **1200**「代数的整数論とその周辺」(2001 年 4 月発行), 71 – 81.

[7] M. Miyawaki, Explicit construction of Rankin-Cohen type differential operators for vector-valued Siegel modular forms, Kyushu J. Math. 55(2001), 369 – 385.

[8] I. Satake, Surjectivité de l'operateur Φ, Seminaire Cartan, 1857/58.

[9] T. Satoh, On certain vector valued Siegel modular forms of degree two. Math. Ann. 274 (1986), no. 2, 335–352.

[10] R. Tsushima, An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to Sp(2, Z). Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59 (1983), no. 4, 139–142.

Department of Mathematics, Graduate School of Science
Machikaneyama 1-16, Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan
ibukiyam@math.wani.osaka-u.ac.jp