数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 50-76

可積分表現の球跡関数の Fourier 変換について

高瀬幸一　(宮城教育大学)

1　球跡関数 (spherical trace function)

1.1　G を局所コンパクトユニモジュラー群, K を G のコンパクト部分群とする. 以下 K の既約ユニタリ表現 $\delta\in\widehat{K}$ を一つ固定して, δ の表現空間を V_δ とする. G の既約ユニタリ表現 $\pi\in\widehat{G}$ で $\pi|_K$ における δ の重複度 $m(\delta,\pi|_K)$ が $0<m(\delta,\pi|_K)<\infty$ を満たすもののユニタリ同値類の全体を $\widehat{G}(\delta)$ とする[1].

$\pi\in\widehat{G}(\delta)$ の表現空間 H_π の δ-isotypic component を $H_\pi(\delta)$ とする. $H_\pi(\delta)$ への H_π の直交射影を P_π として,

$$\Phi_{\pi,\delta}:G\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(H_\pi(\delta)),\quad \Phi_{\pi,\delta}(x)u=P_\delta\circ\pi(x)u$$

を (π,δ) に付随した K-type δ の球関数と呼び,

$$\psi_{\pi,\delta}(x)=(\dim\delta)^{-1}\mathrm{tr}\,\Phi_{\pi,\delta}(x)\quad(x\in G)$$

を (π,δ) に付随した K-type δ の spherical trace function (球跡関数) と呼ぶ.

1.2　G 上の複素数値コンパクト台の連続関数全体のなす複素ベクトル空間 $C_c(G)$ は畳み込み積

$$(\varphi*\psi)(x)=\int_G\varphi(xy^{-1})\psi(y)d_G(y)=\int_G\varphi(y)\psi(y^{-1}x)d_G(y)$$

により $\mathbb{C}$-代数となる. $e_\delta(k)=\dim\delta\cdot\mathrm{tr}\,\delta(k^{-1})$ $(k\in K)$ とおくと, K 上の畳み込み積に関して $e_\delta*e_\delta=e_\delta$ だから

1) $e_\delta*\varphi=\varphi*e_\delta=\varphi$,
2) $\varphi(kxk^{-1})=\varphi(x)$ for $\forall k\in K$

なる $\varphi\in C_c(G)$ の全体 $C_c(G,\delta)^\circ$ は $C_c(G)$ の $\mathbb{C}$-部分代数となる. $C_c(G,\delta)^\circ$ を K-タイプ δ の Hecke 作用素の $\mathbb{C}$-代数とよぶ[2]. 上の条件 1),2) を満たす

[1] G が中心が有限な連結半単純実 Lie 群で K が G の極大コンパクト部分群の場合, 常に $m(\delta,\pi|_K)\leq\dim\delta$ である.

[2] K が G の開部分群で δ が自明な 1 次元表現の場合には, 保型形式論で普通に言うところの Hecke 作用素を与える.

$\varphi \in L^1(G)$ 全体を $L^1(G,\delta)^\circ$ とかくと，$L^1(G,\delta)^\circ$ は $L^1(G)$ の $\mathbb{C}$-部分代数となり，$C_c(G,\delta)^\circ$ は $L^1(G,\delta)^\circ$ の稠密な部分代数となる．$\varphi \in L^1(G,\delta)^\circ$ に対して $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^{-1})}$ とおくと，$\varphi^* \in L^1(G,\delta)^\circ$ となり，$L^1(G,\delta)^\circ$ は対合的 $\mathbb{C}$-代数となる．

$\pi \in \widehat{G}(\delta)$ とする．$\varphi \in C_c(G,\delta)^\circ$ に対して $\pi_\delta(\varphi) = \pi(\varphi)|_{H_\pi(\delta)}$ とおくと

$$\pi_\delta(\varphi) = \int_G \varphi(x)\Phi_{\pi,\delta}(x)d_G(x) \in \mathrm{End}_K(H_\pi(\delta))$$

となり，更に

$$\widehat{\Phi}_{\pi,\delta} : C_c(G,\delta)^\circ \ni \varphi \mapsto \pi_\delta(\varphi) \in \mathrm{End}_K(H_\pi(\delta))$$

は全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像となる．

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) = \int_G \varphi(x)\psi_{\pi,\delta}(x)d_G(x) \qquad (\varphi \in C_c(G,\delta)^\circ)$$

とおくと $\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) = (\dim\delta)^{-1}\mathrm{tr}\,\pi_\delta(\varphi)$ である．

次の定理が示すように，$\psi_{\pi,\delta}$ 或いは $\widehat{\psi}_{\pi,\delta}$ は $\widehat{G}(\delta)$ の元の情報を全て含んでいる；

定理 1.2.1 $\pi, \pi' \in \widehat{G}(\delta)$ に対して，次は同値である；

1) $\pi = \pi'$,
2) $\psi_{\pi,\delta} = \psi_{\pi',\delta}$,
3) $\widehat{\psi}_{\pi,\delta} = \widehat{\psi}_{\pi',\delta}$.

[**証明**] [6, p.475, Th.18] 参照．■

1.3 $\pi \in \widehat{G}(\delta)$ として，$m(\delta, \pi|_K) = 1$ と仮定する．このとき $\widehat{\Psi}_{\pi,\delta}(\varphi) = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi)\cdot \mathrm{id}_{H_\pi(\delta)}$ $(\forall\varphi \in C_c(G,\delta)^\circ)$ となるので

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta} : C_c(G,\delta)^\circ \to \mathbb{C}$$

は全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像である．

G の任意のユニタリ表現 (σ, E) をとる．(σ, E) の π-isotypic component を $E(\pi)$ と書いて，$(\sigma|_K, E(\pi))$ の δ-isottypic component を $E(\pi;\delta)$ と書くと，次の定理が証明できる；

定理 1.3.1

$$E(\pi;\delta) = \{u \in E \mid \sigma(\varphi)u = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi)u \ \ \forall\varphi \in C_c(G,\delta)^\circ\}.$$

[**証明**] [23, Lemma 2.1] 参照．■

特に π が G の可積分表現の場合には $\overline{\psi}_{\pi,\delta} \in L^1(G,\delta)^\circ$ で

1) $\varphi * \overline{\psi}_{\pi,\delta} = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) \cdot \overline{\psi}_{\pi,\delta}\ \forall\varphi \in C_c(G,\delta)^\circ$,
2) $\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\overline{\psi}_{\pi,\delta}) = (d_\pi \cdot \dim\delta)^{-1}$

となる．ここで d_π は G の形式的次数である．このとき次の定理が証明できる；

定理 1.3.2

$$E(\pi;\delta) = \{u \in E \mid \sigma(\overline{\psi}_{\pi,\delta})u = (d_\pi \cdot \dim\delta)^{-1}u\}.$$

[証明] [23, Lemma 2.2] 参照．■

2 局所コンパクト群上の保型形式

2.1 以下，G を局所コンパクトユニモジュラー群として，G のコンパクト部分群 K 及び離散部分群 Γ を固定する．K の既約ユニタリ表現 (δ, V_δ) を取り，$\pi \in \widehat{G}(\delta)$ は δ を重複度 1 で含むとする；$m(\delta, \pi|_K) = 1$.

π に付随する Γ に関する重さ δ の G 上の保型形式の空間 $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \pi)$ を次のように定義する；

定義 2.1.1 連続関数 $f : G \to V_\delta$ で，条件

1) $f(\gamma x) = f(x)\ \forall\gamma \in \Gamma$,
2) $\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,
3) $f(xk) = \delta(k)^{-1}f(x)\ \forall k \in K$,
4) $\int_G f(xy^{-1})\varphi(y)d_G(y) = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi)f(x)\ \forall\varphi \in C_c(G,\delta)^\circ$.

を満たすもの全体の成す $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \pi)$ とする．

π, δ の反傾表現 $\check{\pi}, \check{\delta}$ に関して定理 1.3.1 を G の右正則表現 $L^2(\Gamma\backslash G)$ に適用すると，$\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \pi)$ と $L^2(\Gamma\backslash G)(\check{\pi}, \check{\delta})$ の間に自然な関係ができる．即ち，$f \in \check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \pi)$ と $\alpha \in V_\delta^*$ に対して

$$F_{f\otimes\alpha} : G \ni x \mapsto (\dim\delta)^{1/2}\langle f(x), \alpha\rangle \in \mathbb{C}$$

とおくと，対応 $f \otimes \alpha \mapsto F_{f\otimes\alpha}$ は Hilbert 空間の同型

$$\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \pi) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \xrightarrow{\sim} L^2(\Gamma\backslash G)(\check{\pi}, \check{\delta}) \tag{1}$$

を与える．ここで $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \pi)$ の内積は

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x))_\delta d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

により定義する ([23, §3], [24, Prop.1.1] 参照). 特に $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G,\pi)$ の次元は $L^2(\Gamma\backslash G)$ における π の重複度に等しい;

$$\dim \check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G,\pi) = m(\pi, L^2(\Gamma\backslash G)).$$

π が G の可積分表現であるときには, 定理 1.3.2 を用いて, $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G,\pi)$ は

1) $f(\gamma x) = f(x)\ \forall\gamma\in\Gamma$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,
3) $\displaystyle\int_G \Psi_{\pi,\delta}(y) f(xy) d_G(y) = d_\pi^{-1}\dim\delta\cdot f(x)$

なる連続関数 $f: G\to V_\delta$ のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間であることがわかる ([1] 参照).

2.2 以下, π は G の可積分表現であると仮定する.

$u,v\in H_\pi$ に対して $\varphi_{u,v}(x) = (\pi(x)u, v)$ $(x\in G)$ とおく. $\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) = 1$ なる $\varphi\in C_c(G,\delta)^\circ$ が存在することから, 次の事が示される;

1) $u\in H_\pi(\delta)$ とすると, $\varphi_{u,v}\in L^1(G)$ なる $v\in H_\pi$ に対して $\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi_{u,v}(\gamma x)$ は $x\in G$ に対して広義一様収束する.
2) $u,v\in H_\pi$ とすると, $\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi_{u,v}(\gamma x)$ $(x\in G)$ は G 上有界である.

$u\in H_\pi(\delta)$ に対して $v=\pi(x)u\in H_\pi$ $(x\in G)$ とすると $\varphi_{u,v}\in L^1(G)$ となることに注意して, 上の主張を $\psi_{\pi,\delta}$ に適用すると, 次の命題が得られる;

命題 2.2.1 各 $x\in G$ に対して

$$K^\Gamma_{\pi,\delta}(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\psi_{\pi,\delta}(x^{-1}\gamma y)$$

は $y\in G$ に関して広義一様収束する. $K^\Gamma_{\pi,\delta}$ は $G\times G$ 上連続で, $K^\Gamma_{\pi,\delta}(1,y)$ $(y\in G)$ は G 上有界である.

上で定義した $K^\Gamma_{\pi,\delta}$ を用いて, 保型形式の空間 $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G,\pi)$ の次元公式が次のように得られる;

定理 2.2.2 $K^\Gamma_{\pi,\delta}\in L^2(\Gamma\backslash G\times\Gamma\backslash G)$ ならば, $\mathbb{C}$- ベクトル空間 $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G,\pi)$ は有限次元で

$$\dim_{\mathbf{C}}\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G,\pi) = d_\pi\cdot\int_{\Gamma\backslash G} K^\Gamma_{\pi,\delta}(x,x) d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

[証明] $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上の G の右正則表現を ρ とすると，$f \in L^2(\Gamma\backslash G)$ に対して

$$\int_{\Gamma\backslash G} K^{\Gamma}_{\pi,\delta}(x,y)f(y)d_{\Gamma\backslash G}(\dot{y}) = (\rho(\psi_{\pi,\delta})f)(x)$$

となるから，$T = \rho(\psi_{\pi,\delta})$ は $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素，従ってコンパクト作用素である．一方，二乗可積分表現の直交関係から

$$T^2 = (d_\pi \cdot \dim\delta)^{-1}T$$

となるから，$(d_\pi \cdot \dim\delta)^{-1}$ は T の唯一の非ゼロ固有値であり，定理 1.3.2 より

$$L^2(\Gamma\backslash G)(\check{\pi};\check{\delta}) = \mathrm{Ker}\left(T - (d_\pi \cdot \dim\delta)^{-1}\right)$$

となって，これは有限次元である．よって T はトレース族作用素となり，

$$\begin{aligned}(d_\pi \cdot \dim\delta)^{-1}\dim_{\mathbf{C}} L^2(\Gamma\backslash G)(\check{\pi};\check{\delta}) &= \mathrm{tr}\,T \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} K^{\Gamma}_{\pi,\delta}(x,x)d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})\end{aligned}$$

となる．よって式 (1) より，求める次元公式を得る．■

2.3 以下，$\mathbb{Q}$ 上定義された連結半単純線形代数群 $\mathbb{G}$ に対して $G = \mathbb{G}(\mathbb{R})$ として，$\Gamma \subset \mathbb{G}(\mathbb{Q})$ は数論的部分群とする．

まず，各 $x \in G$ に対して $K^{\Gamma}_{\pi,\delta}(x,y)$ は $y \in G$ の有界関数であることが示されるので，$K^{\Gamma}_{\pi,\delta}(x,*) \in L^2(\Gamma\backslash G)$ であるが，定理 1.3.1 より $K^{\Gamma}_{\pi,\delta}(x,*) \in L^2(\Gamma\backslash G)(\check{\pi},\check{\delta})$ となることがわかる．ところで，$L^2(\Gamma\backslash G)$ における π の重複度は有限だから（[8],[13]），$L^2(\Gamma\backslash G)(\check{\pi},\check{\delta})$ は有限次元となり，式 (1) から，$\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G,\pi)$ の正規直交基底 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ を用いて

$$K^{\Gamma}_{\pi,\delta}(x,y) = d_\pi^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(f_i(x),f_i(y)) \quad (x,y \in G)$$

となることがわかる．ところで可積分表現 $\check{\pi}$ は tempered だから，[27, Th.4.3] より $\check{\pi}$ は正則表現 $L^2(\Gamma\backslash G)$ の residual part には現れない．即ち $L^2(\Gamma\backslash G)(\check{\pi})$ は $L^2(\Gamma\backslash G)$ の cuspidal part に含まれ，よって f_i は G 上有界である（[8, p.15, Cor.], [3, Part I, p.192]）．よって次の定理が示された；

定理 2.3.1 $K^{\Gamma}_{\pi,\delta}$ は $G \times G$ 上有界である．

よって特に $K^{\Gamma}_{\pi,\delta} \in L^2(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)$ だから，定理 2.2.2 より，次の系を得る；

系 2.3.2 $\dim_{\mathbf{C}}\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G,\pi) = d_\pi \cdot \int_{\Gamma\backslash G} K^{\Gamma}_{\pi,\delta}(x,x)d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$.

3 次元公式に対する中心的冪単共役類の寄与

3.1 以下，$\mathbb{G}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された $\mathbb{Q}$-rank>0 なる連結半単純線形代数群として，$G=\mathbb{G}(\mathbb{R})$ は可積分表現 π を持つと仮定する．G の極大コンパクト部分群 K をとり，π の最少の K-type を δ とする．数論的部分群 $\Gamma\subset\mathbb{G}(\mathbb{Q})$ をとり，(Γ,δ,π) に関する G 上の保型形式の次元公式（系 2.3.2）に対する Γ の「中心的冪単共役類」の寄与を考えたい．その為に，$\mathbb{Q}$ 上定義された $\mathbb{G}$ の真の放物的部分群 $\mathbb{P}$ をとり，その unipotent radical を $\mathbb{N}=R_u(\mathbb{P})$ として，Levi 分解 $\mathbb{P}=\mathbb{L}\ltimes\mathbb{N}$ を一つ固定しておく．$\mathbb{L}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された簡約可能代数群である．$\mathbb{Q}$ 上定義された代数群 $\mathbb{P},\mathbb{L},\mathbb{N}$ に対応する実 Lie 群を

$$P=\mathbb{P}(\mathbb{R}),\quad L=\mathbb{L}(\mathbb{R}),\quad N=\mathbb{N}(\mathbb{R})$$

とする．

3.2 $\mathbb{N}$ の複素数体上の Lie 環を $\mathfrak{n}=\mathrm{Lie}(\mathbb{N})$ とすると，$\mathfrak{n}$ は $\mathbb{Q}$-構造 $\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ をもつ．また，$\mathbb{L}$ の $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ への随伴作用は，$\mathbb{Q}$-上定義された $\mathbb{L}$ の $\mathfrak{n}$ 上の有理表現 Ad を生ずる．冪零 Lie 環 $\mathfrak{n}$ の中心降下列を

$$C_1=\mathfrak{n},\quad C_{k+1}=[C_k,\mathfrak{n}]$$

$$\mathfrak{n}=C_1\supsetneqq\cdots\supsetneqq C_d\supsetneqq C_{d+1}=\{0\}$$

として $V_k=C_k/C_{k+1}$ とおくと $(\mathbb{L},\mathrm{Ad},V_k)$ $(k=1,2,\cdots,d)$ は $\mathbb{Q}$-上定義された概均質ベクトル空間となる（[16, p.125] 参照）．特に $(\mathbb{L},\mathrm{Ad},V_d)$ に注目して，V_d の Zariski 開 $\mathbb{G}(\mathbb{C})$-軌道を Ω とする．ここで次の三条件が満たされていると仮定する；

(A) 概均質ベクトル空間 $(\mathbb{L},\mathrm{Ad},V_d)$ は正則である，

(B) 少なくとも一つの $x\in\Omega_{\mathbb{Q}}$ に対して，x の固定部分群 $\mathbb{L}_x$ の連結成分 $\mathbb{L}_x^\circ$ の $\mathbb{Q}$ 上定義された指標は自明なものに限る，

(E) $\{g\in\mathbb{G}(\mathbb{Q})\mid\mathrm{Ad}(g)\Omega_{\mathbb{Q}}\cap\Omega_{\mathbb{Q}}\neq\emptyset\}=\mathbb{P}(\mathbb{Q})$.

条件 (A) は $\forall x\in\Omega$ に対して，固定部分群 $\mathbb{L}_x$ が簡約可能であることと同値である．又，概均質ベクトル空間の特異点集合 $S=V_d\setminus\Omega$ が V_d の超曲面であることとも同値である．S の既約成分の定義方程式として，概均質ベクトル空間 $(\mathbb{L},\mathrm{Ad},V_d)$ の基本相対不変式 $p_1,\cdots,p_r$ が定まる．p_i に付随する $\mathbb{L}$ の指標を χ_i とする．

χ を $\mathbb{Q}$ 上定義された $\mathbb{L}$ の指標とすると，条件 (B) で仮定した $x\in\Omega_{\mathbb{Q}}$ に対して $(\mathbb{L}_x(\mathbb{C}):\mathbb{L}_x^\circ(\mathbb{C}))=m<\infty$ だから，$\chi^m|_{\mathbb{L}_x}=1$ である．よって相対不変式の一般論から，χ は或相対不変式に付随する指標となり，よって

$\chi^m = \prod_{i=1}^r \chi_i^{m_i}$ $(m_i \in \mathbb{Z})$ と書ける．特に

$$\Delta(l) = |\det(\mathrm{Ad}(l)|_{\mathfrak{n}})| = \prod_{k=1}^{d} |\det(\mathrm{Ad}(l)|_{V_k})| \quad (l \in L)$$

とおくと，適当な $a_i \in \mathbb{Q}$ があって

$$\Delta(l) = \prod_{i=1}^{r} |\chi_i(l)|^{a_i} \quad (l \in L)$$

と書ける．

放物的部分群の Levi 分解 $\mathbb{P} = \mathbb{L} \ltimes \mathbb{N}$ から $\mathbb{P}(\mathbb{Q}) = \mathbb{L}(\mathbb{Q}) \cdot \mathbb{N}(\mathbb{Q})$ で，$\Omega_{\mathbb{Q}} \subset Z(\mathbb{N}(\mathbb{Q}))$ かつ Ω は $\mathbb{L}(\mathbb{C})$-軌道だから，$\forall g \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ に対して $\mathrm{Ad}(g)\Omega_{\mathbb{Q}} \subset \Omega_{\mathbb{Q}}$ である．即ち，条件 (E) は

(E) $g \in \mathbb{G}(\mathbb{Q})$ s.t. $\mathrm{Ad}(g)\Omega_{\mathbb{Q}} \cap \Omega_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset \ \Rightarrow\ g \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$

と書いても良い．後節 3.6 でもう少し詳しく検討する．

3.3 指数写像により実 Lie 環 $\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}$ は N と実解析多様体としての同型となるから，$\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}$ 上の Lebesgue 測度 $d_{\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}}(X)$ を一つ固定して，N 上の Haar 測度 $d_N(n)$ を

$$d_N(\exp X) = d_{\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}}(X)$$

により定めると，

$$d_N(lnl^{-1}) = \Delta(l) d_N(n) \quad \forall l \in L$$

である．$P = N \rtimes L$ だから，L 上の Haar 測度 $d_L(l)$ を一つ固定して，P 上の左 Haar 測度 $d_P(p)$ が

$$d_P(n \cdot l) = \Delta(l)^{-1} \cdot d_N(n) d_L(l)$$

により定まる．$G = PK$ だから，コンパクト群 K 上の Haar 測度 $d_K(k)$ を $\int_K d_K(k) = 1$ と正規化しておいて，G 上の Haar 測度 $d_G(g)$ を

$$\int_G \varphi(g) d_G(g) = \int_P \left(\int_K \varphi(pk) d_K(k) \right) d_P(p) \quad \forall \varphi \in C_c(G)$$

が成り立つように定める．

3.4 $\mathbb{Q}$ 上の適当な埋め込み $\mathbb{G} \hookrightarrow GL_n$ に対して $\Gamma \lhd \mathbb{G}(\mathbb{Z}) = \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap GL_n(\mathbb{Z})$ となると仮定する[3]．Lie 環 C_d に対応する $\mathbb{N}$ の連結代数的部分群を $\mathbb{N}_d$ とすると，$\Gamma \cap \mathbb{N}(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{N}_d$ の数論的部分群だから，

$$\Gamma \cap \mathbb{N}_d(\mathbb{Q}) = \exp(\mathcal{M})$$

[3]例えば Γ として主合同部分群

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap GL_n(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv 1_n \pmod N\}$$

をとればよい．

なる $\mathbb{Z}$-格子 $\mathcal{M} \subset C_{d,\mathbf{Q}}$ がある．そこで

$$\Pi = \{\gamma \in \Gamma \mid \sigma^{-1}\gamma\sigma \in \exp(\Omega_{\mathbf{Q}}) \text{ for some } \sigma \in \mathbb{G}(\mathbb{Z})\}$$

とおくと，条件 (E) から

$$\Pi = \bigsqcup_{\sigma \in \mathbb{P}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{Z})} \sigma^{-1} U_\Gamma \sigma$$

となる．ここで

$$U_\Gamma = \Gamma \cap \exp(\Omega_{\mathbf{Q}}) = \exp(\mathcal{M} \cap \Omega_{\mathbf{Q}})$$

である．このことと 3.3 で定めた Haar 測度の関係から，収束性を度外視して次の基本等式が成り立つ；

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma \in \Pi} \psi_{\pi,\delta}(x^{-1}\gamma x) d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) \\
=&(\mathbb{G}(\mathbb{Z}):\Gamma)(\mathbb{P}(\mathbb{Z}):\mathbb{N}(\mathbb{Z})\mathbb{L}(\mathbb{Z})) \cdot \mathrm{vol}(\mathbb{N}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{N}(\mathbb{R})) \qquad \text{(BI)} \\
&\times \int_{L/\mathbb{L}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{r} |\chi_i(l)|^{a_i} \sum_{X \in \mathcal{M}\cap\Omega_{\mathbf{R}}} f_{\pi,\delta}(\mathrm{Ad}(l)X) d_L(\dot{l}).
\end{aligned}$$

但し

$$f_{\pi,\delta}(X) = \psi_{\pi,\delta}(\exp X) \qquad (X \in V_{d,\mathbb{R}})$$

とする．

Π を放物的部分群 $\mathbb{P}$ に付随して決まる Γ の「冪単共役類」の和集合と考えると，基本等式 (BI) の左辺は系 2.3.2 で与えた保型形式の次元公式における問題の「冪単共役類」の寄与である．一方，(BI) の右辺の積分は，概均質ベクトル空間 $(\mathbb{L}, \mathrm{Ad}, V_d)$ 付随したゼータ関数を生ずるゼータ積分と同じ形をしていることに注意する．但し，$f_{\pi,\delta}$ は $V_{d,\mathbb{R}}$ 上の Schwartz 関数ではないので，(BI) の収束性に問題が生ずるのである．

3.5 (BI) を正当化するために，[21] に従って $\sum_{X \in \mathcal{M}} f_{\pi,\delta}(X)$ に Poisson 和公式を適用したい．$\mathbb{P}$ の opposite $\mathbb{P}^-$ の Levi 分解 $\mathbb{P}^- = \mathbb{L} \ltimes \mathbb{N}^-$ から，$\mathfrak{n}^- = \mathrm{Lie}(\mathbb{N}^-)$ の中心降下列

$$C_1^- = \mathfrak{n}, \quad C_{k+1}^- = [C_k^-, \mathfrak{n}]$$

$$\mathfrak{n}^- = C_1^- \supsetneqq \cdots \supsetneqq C_d^- \supsetneqq C_{d+1}^- = \{0\}$$

を考えれば，$V_d^- = C_d^-$ は pairing

$$V_d \times V_d^- \ni (X, Y) \mapsto -B_{\mathfrak{g}}(X, Y) \in \mathbb{C}$$

を通して V_d の双対空間と同一視されるから，$f \in L^1(V_{d,\mathbf{R}})$ の Fourier 変換 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(Y) = \int_{V_{d,\mathbf{R}}} f(X)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}B_{\mathfrak{g}}(X,Y)\right)d(X) \quad (Y \in V_{d,\mathbf{R}}^-)$$

とする．ここで $\mathbf{G}$ が古典群ならば次の定理が成り立つ；

定理 3.5.1 G の二乗可積分表現 π とその最少の K-type δ に対して

1) $f_{\pi,\delta} \in L^1(V_{d,\mathbf{R}}) \cap L^2(V_{d,\mathbf{R}})$,
2) $\widehat{f}_{\pi,\delta} \in L^1(V_{d,\mathbf{R}}^-)$ は非負実数値連続関数で，無限遠でゼロ[4]である，
3) π が十分 regular ならば[5]，Poisson 和公式 $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{M}} f_{\pi,\delta}(X) = \sum_{Y \in \mathcal{M}^*} \widehat{f}_{\pi,\delta}(Y)$ が成り立つ．

上の定理は次のような議論によって示される．まず

$$\Xi(x) = \int_K \varphi_0(x^{-1}k)d_K(k) \qquad (x \in G)$$

を Harish-Chandra の Ξ-関数とする．ここで G の岩澤分解を $G = KA_{\mathfrak{p}}N$ として[6]$B = A_{\mathfrak{p}}N$ のモジュラー関数 Δ_B を用いて $\varphi_0(kb) = \Delta_B(b)$ for $kb \in G = KB$ とおく．Ξ の標準的な評価を述べるために，幾つか記号を用意する．$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ の Cartan 対合 θ によって定まる $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 上の内積 $(X,Y)_\theta = -B_{\mathfrak{g}}(X,\theta Y)$ に対して $|X| = (X,X)_\theta^{1/2}$ とおく．G の Cartan 分解に従って $x = k\exp X \in G$ ($k \in K$, $X \in \mathfrak{p}$) としたとき，$\sigma(x) = |X|$ とおく．G の岩澤分解に従って $G \ni x = k(x)\cdot\exp H(x)\cdot n(x)$ ($k(k) \in K, H(x) \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, n(x) \in \mathfrak{n}$) とおく[7]．

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^+ = \{H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \mid \alpha(H) > 0 \ \forall\alpha \in \Sigma^+\}$$

とおくと

$$\sup_{H \in \overline{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^+}} \Xi(\exp H)\cdot(1+|H|)^{-d}\cdot e^{\rho(H)} < \infty$$

なる $0 < d \in \mathbb{Z}$ が存在する．更に $\forall h \in A_{\mathfrak{p}}$ と $\forall n \in N$ に対して

1) $1 + \mathrm{Max}\{\sigma(x), \rho(H(\theta n^{-1}))\} \leq M\cdot(1+\sigma(hn))$,
2) $\Xi(hn) \leq M\cdot(1+\sigma(hn))^d\cdot e^{-\rho(\log h + H(\theta n^{-1}))}$

---

[4]即ち，$\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\{Y \in V_{d,\mathbf{R}}^- \mid |\widehat{f}_{\pi,\delta}(Y)| \geq \epsilon\} \subset V_{d,\mathbf{R}}^- \ \text{：コンパクト}$$

である．

[5]即ち，π の Harish-Chandra パラメータが Wyle 領域の壁から十分離れていれば

[6]ここの N は放物的部分群 $\mathbf{P}$ の冪単根基 $\mathbf{N}$ に付随する実 Lie 群 $\mathbf{N}(\mathbf{R})$ とは違う．

[7]考えている岩澤分解と Cartan 対合 θ は compatible とする．即ち θ に付随する $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Lie}(A_{\mathfrak{p}})$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環で，$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ に関する $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ の制限根系 Σ の正の根全体 Σ^+ に対して $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{\mathbf{R},\alpha}$ となる．

となる $1 \leq M \in \mathbb{R}$ が存在する（[28, Lemma 8.5.2.6] 参照）．そこで [28, Lemma 8.5.2.4] を用いると，次の命題が証明できる；

命題 3.5.2 考えている G の岩澤分解に関して標準的な極大放物的部分群の巾単部分 U に対して

$$\int_{U^-} e^{-\rho(H(n))}\{1+\rho(H(n))\}^{-(d+\epsilon)}d_{U^-}(n) < \infty \quad \forall\epsilon > 0 \quad (U^- = \theta(U))$$

又，

$$\int_U \Xi(n)(1+\sigma(n))^{-(2d+\epsilon)}d_U(n) < \infty \quad \forall\epsilon > 0.$$

である．

さて $\mathbb{G}$ が古典群のときには，G の岩澤分解に関する標準的な放物的部分群 P をとり，その巾単部分を U とすると，G の半単純閉部分群 G' を適当にとれば，G' は $\mathfrak{a}'_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ なる岩澤分解をもち，その岩澤分解に関する標準的極大放物的部分群 P' があって，$Z(U)$ は P' の巾単部分に一致するようにできるから，命題 3.5.2 より次の命題を得る；

命題 3.5.3 $\mathbb{G}$ が古典群ならば，考えている G の岩澤分解に関して標準的な放物的部分群の巾単部分 U の中心を $Z(U)$ とすると，$\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\int_{Z(U^-)} e^{-\rho(H(n))}\{1+\rho(H(n))\}^{-(d+\epsilon)}d_{Z(U^-)}(n) < \infty \quad (U^- = \theta(U))$$

又，

$$\int_{Z(U)} \Xi(n)(1+\sigma(n))^{-(2d+\epsilon)}d_{Z(U)}(n) < \infty \quad \forall\epsilon > 0.$$

である．

H_π の K-有限ベクトル全体を $H_{\pi,K}$ とすると，$\forall u, v \in H_{\pi,K}$ に関する π の行列係数 $\varphi_{u,v}(x) = (\pi(x)u, v)$ $(x \in G)$ は G 上の Harish-Chandra-Schwartz 関数となるから（[12, p.259, Cor8.52, p.450, Example] 参照），$\forall r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sup_{x\in G} |\varphi_{u,v}(x)|\Xi(x)^{-1}(1+\sigma(x))^{d+r} = C(u,v,r) < \infty$$

となる．よって上に述べた Ξ の評価から，任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して，u, v, r にのみに依存する定数 $C > 0$ があって

$$|\varphi_{u,v}(n)| \leq C \cdot (1+\rho(H(\theta n^{-1}))^{-r} \cdot e^{-\rho(H(\theta n^{-1}))} \qquad \forall n \in N \qquad (2)$$

となる．よって命題 3.5.2 より $f_{u,v}(X) = \varphi_{u,v}(\exp X)$ は $V_{d,\mathbb{R}}$ 上の可積分関数であることがわかる．一方，対角成分 $f_{u,u}$ は $V_{d,\mathbb{R}}$ 上の正定値連続関数だ

から，Fourier 変換の一般論から $\widehat{f}_{u,u}$ は $V_{d,\mathbb{R}}^-$ 上の連続関数で無限遠でゼロかつ非負である．よって

$$f_{u,v}=\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} f_{u+v,u+v}-f_{u-v,u-v} \\ +\sqrt{-1}\left(f_{u+\sqrt{-1}v,u+\sqrt{-1}v}-f_{u-\sqrt{-1}v,u-\sqrt{-1}v}\right)\end{array}\right\}$$

より，$\widehat{f}_{u,v}$ は連続かつ無限遠でゼロである．特に有界である．$V_{d,\mathbb{R}}\subset\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}$ の基底 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ に対して，$V_{d,\mathbb{R}}^-$ の双対基底 $\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ をとると，$X=\sum_{i=1}^n x_iX_i\in V_{d,\mathbb{R}}$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f_{u,v}(X)=\frac{d}{dt}f_{u,v}(X+tX_i)\Big|_{t=0}=f_{\pi(X_i)u,v}$$

となり，$\pi(X_i)u\in H_\pi$ は K-有限ベクトルとなる．よって $V_{d,\mathbb{R}}^-$ 上の多項式関数 p と $v\in H_{\pi,K}$ に対して

$$\begin{aligned} p(Y)\widehat{f}_{v,v}(Y) &= \int_{\mathfrak{g}_{d,\mathbb{R}}} p(Y)f_{v,v}(X)e^{2\pi\sqrt{-1}B_{\mathfrak{g}}(X,Y)}dX \\ &= \int_{\mathfrak{g}_{d,\mathbb{R}}} f_{v,v}(X)\left(p\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial X}\right)e^{2\pi\sqrt{-1}B_{\mathfrak{g}}(X,Y)}\right)dX \\ &= \int_{\mathfrak{g}_{d,\mathbb{R}}} \left(p\left(-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial X}\right)f_{v,v}\right)(x)e^{2\pi\sqrt{-1}B_{\mathfrak{g}}(X,Y)}d \\ &= \widehat{f}_{u,v}(Y) \end{aligned}$$

なる K-有限ベクトル $u\in H_\pi$ がとれる．よって $p(Y)\widehat{f}_{v,v}$ は $V_{d,\mathbb{R}}^-$ 上有界である．特に Poisson 和公式の右辺 $\sum_{Y\in\mathcal{M}^*}\widehat{f}_{\pi,\delta}(Y)$ の収束性に問題はない．さて，Poisson 和公式の左辺 $\sum_{X\in\mathcal{M}}f_{\pi,\delta}(X)$ の収束を保障するために，[25] と [14] の結果から評価式 (2) が改善される．即ち $0<\forall\ell\in\mathbb{R}$ に対して π を十分 regular にとれば[8]，定数 $M>0,\ r>0$ があって

$$|\varphi_{u,v}(x)|\le M\cdot\Xi(x)^{\ell+1}(1+\sigma(x))^r\quad\forall x\in G$$

とできる．よって Ξ の評価から

$$|\varphi_{u,v}(n)|\le M\cdot e^{-(\ell+1)\rho(H\theta n^{-1})}\quad\forall n\in N$$

となる．ここで $\mathbb{G}$ が古典群の場合には $e^{-\rho(H\theta n)}$ を具体的に書き下すことができる．例えば $G=Sp(n,\mathbb{R})$ で $n=\begin{bmatrix}1_n & X\\ 0 & 1_n\end{bmatrix}$ とすると

$$e^{-\rho(H\theta n)}=\prod_{r=1}^n\det\left(1_r+(X^2)^{(r)}\right)^{-1/2}\le\det\left(1_n+X^2\right)^{-1/2}$$

[8] 精確には π の Harish-Chandra パラメータ λ に対して

$$|(\lambda,\beta)|>\frac{\ell}{2}\sum_{\alpha\in\Phi:(\alpha,\beta)>0}(\alpha,\beta),\quad\forall\beta\in\Phi_n$$

なるとき．ここで $\Phi=\Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクト Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ に関する根系，Φ_n は Φ の中の non-compact な根である．

である．但し正方行列 A に対して $A^{(r)}$ は A の左上 r 行 r 列を取った小行列である．ところで次の命題は容易に示される；

命題 3.5.4 $M_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{R}$-部分ベクトル空間 V の $\mathbb{Z}$-格子 $L \subset V$ に対して

$$\sum_{X \in L} \det(1_n + XX^*)^{-s}$$

は $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V$ で絶対収束する．

この命題から[9]，Poisson 和公式 $\sum_{X \in \mathcal{M}} f_{\pi,\delta}(X)$ の収束性が得られる．

3.6 条件 (E) を複素数体上で考えてみる．$\mathbb{C}$ 上定義された連結半単純線形代数群 $\mathbb{G}$ の極大輪環群 $\mathbb{T}$ をとると，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ は半単純複素 Lie 環で，$\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathbb{T})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環となる．根系 $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基本根系 Ψ を一つ固定する．Ψ の部分集合 θ に対応する $\mathbb{G}$ の標準的放物的部分群と Levi 分解を $\mathbb{P} = \mathbb{L} \ltimes \mathbb{N}$ とする．$\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(\mathbb{N})$ の中心降下列を

$$\mathfrak{n} = C_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq C_d \supsetneqq C_{d+1} = \{0\}$$

とする．

$$\alpha(H^\theta) = \begin{cases} 0 & \alpha \in \theta, \\ 1 & \alpha \in \Psi \setminus \theta \end{cases}$$

なる $H^\theta \in \mathfrak{h}$ が唯一存在するから

$$V_p = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H^\theta, X] = pX\} \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

とおくと

$$C_k = \bigoplus_{p \geq k} V_p \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

である（[17] 参照）．中心降下列の長さに関して次の命題が成り立つ；

命題 3.6.1 $\mathfrak{g}$ が単純複素 Lie 環ならば

1) Ψ に関する $\mathfrak{g}$ の最高の重みを $\gamma = \sum_{\alpha \in \Psi} m_\alpha \alpha$ とすると，

$$d = \gamma(H^\theta) = \sum_{\alpha \in \Psi \setminus \theta} m_\alpha,$$

2) $C_d = V_d$ は $\mathfrak{n}$ の中心 $Z(\mathfrak{n})$ に一致する．

$(\mathbb{L}, \mathrm{Ad}, V_p)$ $(p = 1, 2, \cdots, d)$ は概均質ベクトル空間だから，特に V_d の Zariski 開 $\mathbb{L}(\mathbb{C})$-軌道を Ω として

[9] 直交群に関しては，Jordan 環から生ずる多項式を用いた無限級数の収束性を用いる．[10]

(E)$_\mathbf{C}$ $\{g \in \mathbb{G}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Ad}(g)\Omega \cap \Omega \neq \emptyset\} = \mathbb{P}(\mathbb{C})$

なる性質がいつ成り立つかを考えてみる．性質 (E)$_\mathbf{C}$ は次のいずれとも同値である;

1) 全ての $Y \in \Omega$ に対して $\{g \in \mathbb{G}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Ad}(g)Y = Y\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C})$,

2) 或 $Y \in \Omega$ に対して $\{g \in \mathbb{G}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Ad}(g)Y = Y\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C})$.

又，性質 (E)$_\mathbf{C}$ が成り立てば，次が成り立つ;

$$\{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\} \subset \mathrm{Lie}(\mathbb{P}) \quad \forall Y \in \Omega.$$

これらを利用して個別に調べることにより，性質 (E)$_\mathbf{C}$ が成り立つ古典型の半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\theta \subsetneqq \Psi$ を全て求めることが出来る（14 ページの表を参照）.

一般に次の命題が成り立つ；

命題 3.6.2 $H^\theta \in \mathrm{ad}(\Omega)\mathfrak{g}$ ならば性質 (E)$_\mathbf{C}$ が成り立つ.

この命題を用いて次の命題が証明できる；

命題 3.6.3 $\mathbb{P}$ が $\mathbb{G}$ の極大放物的部分群で，$(\mathbb{L}, \mathrm{Ad}, V_d)$ が非自明な相対不変式を持つならば，性質 (E)$_\mathbf{C}$ が成り立つ.

命題 3.6.3 で $\mathbb{P}$ の極大性を仮定しないと，話は微妙になる．例えば，D_n 型の直交群 $\mathbb{G}(\mathbb{C}) = SO(2n, \mathbb{C})$ の場合，基本根系 $\Phi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ の Dynkin 図形を

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-2} \begin{array}{l} \diagup \, \alpha_{n-1} \\ \diagdown \, \alpha_n \end{array}$$

とする．$\theta = \Phi - \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ の場合，$\mathbb{P}$ は $\mathbb{G}$ の極大放物的部分群ではないが，$n = \mathrm{odd}$ ならば $(\mathbb{L}, \mathrm{Ad}, V_d)$ は正則で，性質 (E)$_\mathbf{C}$ が成り立つ．一方，$\theta = \Phi - \{\alpha_1, \alpha_2\}$ の場合，$\mathbb{P}$ は $\mathbb{G}$ の極大放物的部分群でなくて，$(\mathbb{L}, \mathrm{Ad}, V_d)$ は正則であるが，性質 (E)$_\mathbf{C}$ は成り立たない.

$\mathfrak{g}$	Ψ	(E)c is valid if and only if	d	$(\mathbb{L}, \mathrm{Ad}, V_d)$
A_n	$\alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-1} - \alpha_n$	$\theta = \Psi - \{\alpha_r\}$ $1 \leq \forall r \leq n$	1	$(S(GL_r(\mathbb{C}) \times GL_{n+1-r}(\mathbb{C})), \rho, M_{r,n+1-r}(\mathbb{C}))$ $\rho(g,h)X = gXh^{-1}$
		$\theta = \Psi - \{\alpha_r, \alpha_s\}$ $1 \leq \forall r < \forall s \leq n$ $r + s = n + 1$	2	$(S(GL_r(\mathbb{C}) \times GL_{s-r}(\mathbb{C}) \times GL_r(\mathbb{C})), \rho, M_r(\mathbb{C}))$ $\rho(g_1, g_2, g_3)X = g_1 X g_3^{-1}$
B_n	$\alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-1} \Rightarrow \alpha_n$	$\theta = \Psi - \{\alpha_1\}$ $n = $ any	1	$(\mathbb{C}^\times \times SO(2n-1, \mathbb{C}), \rho, M_{1,2n-1}(\mathbb{C}))$ $\rho(a,g)X = aXg^{-1}$
		$\theta = \Psi - \{\alpha_r\}$ $1 < r < n$, $r = $ even	2	$(GL_r(\mathbb{C}) \times SO(2n+1-2r, \mathbb{C}), \rho, \mathrm{Alt}_r(\mathbb{C}))$ $\rho(g,h)X = gX\,{}^t g$
		$\theta = \Psi - \{\alpha_n\}$ $n = $ even	2	$(GL_n(\mathbb{C}), \rho, \mathrm{Alt}_n(\mathbb{C}))$ $\rho(g)X = gX\,{}^t g$
C_n	$\alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-1} \Leftarrow \alpha_n$	$\theta = \Psi - \{\alpha_n\}$	1	$(GL_n(\mathbb{C}), \rho, \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}))$ $\rho(g)X = gX\,{}^t g$
		$\theta = \Psi - \{\alpha_r\}$ $1 \leq \forall r < n$	2	$(GL_r(\mathbb{C}) \times Sp(n-r, \mathbb{C}), \rho, \mathrm{Sym}_r(\mathbb{C}))$ $\rho(g,h)X = gX\,{}^t g$
D_n	$\alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-2} \left\langle \begin{matrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{matrix} \right.$	$\theta = \Psi - \{\alpha_1\}$ $n = $ any	1	$(\mathbb{C}^\times \times SO(2n-2, \mathbb{C}), \rho, M_{1,2n-2}(\mathbb{C}))$ $\rho(a,g)X = aXg^{-1}$
		$\theta = \Psi - \{\alpha_r\}$ $1 < r < n-1$, $r = $ even	2	$(GL_r(\mathbb{C}) \times SO(2n-2r, \mathbb{C}), \rho, \mathrm{Alt}_r(\mathbb{C}))$ $\rho(g,h)X = gX\,{}^t g$
		$\theta = \Psi - \{\alpha_{n-1}\}$ $n = $ even	1	$(GL_n(\mathbb{C}), \rho, \mathrm{Alt}_n(\mathbb{C}))$ $\rho(g)X = gX\,{}^t g$
		$\theta = \Psi - \{\alpha_n\}$ $n = $ even	1	$(GL_n(\mathbb{C}), \rho, \mathrm{Alt}_n(\mathbb{C}))$ $\rho(g)X = gX\,{}^t g$
		$\theta = \Psi - \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ $n = $ odd	2	$(\mathbb{C}^\times \times GL_{n-1}(\mathbb{C}), \rho, \mathrm{Alt}_{n-1}(\mathbb{C}))$ $\rho(a,g)X = gX\,{}^t g$

1) $M_{m,n}(\mathbb{C}) =$ complex vector space of (m,n)-complex matrices, $M_n(\mathbb{C}) = M_{n,m}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t X = X\}$, $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t X = -X\}$.

2) $S(GL_n(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C})) = \{(g,h) \in GL_n(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C}) \mid \det g \det h = 1\}$.

4 ユニタリ表現の波面集合と随伴多様体

以下，G をユニモジュラーな実 Lie 群として，G のユニタリ表現 (π, H_π) を考える．G の Lie 環を $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ とする．

4.1 Hilbert 空間 H_π 上のトレース族作用素 $T \in \mathcal{C}_1(H_\pi)$ に対して

$$\langle \varphi, \mathrm{tr}_\pi(T) \rangle = \mathrm{tr}(\pi(\varphi) \circ T) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(G)$$

により定義される G 上の distribution $\mathrm{tr}_\pi(T)$ の波面集合を $WF(\mathrm{tr}_\pi(T)) \subset T^*(G)$ とする（[11, p.180], [5, p.16] 参照）．ここで $T^*(G)$ は G の余接束である．

定義 4.1.1 $\displaystyle\bigcup_{T \in \mathcal{C}_1(H_\pi)} WF(\mathrm{tr}_\pi(T))$ の $T^*(G)$ における閉包を π の波面集合と呼び，$WF(\pi)$ と書く．

$WF(\pi) \subset T^*(G)$ は G の左右からの作用に関して安定である（[9, Prop.1.1]）．一方，$T^*(G)$ は自明なベクトル束で，G の左作用が $T_1^*(G)$ 上の自明な作用を誘導するように同一視 $T^*(G) = G \times T_1^*(G)$ をとると，G の右作用は $T_1^*(G)$ 上の coadjoint action を誘導する．よって $WF^\circ(\pi) = WF(\pi) \cap T_1^*(G)$ とおくと，

$$WF(\pi) = G \times WF^\circ(\pi),$$

$$WF^\circ(\pi) \subset T_1^*(G) : G \text{ の coadjoint action で安定}$$

となる．

4.2 H を G の閉部分群として，$\imath : H \to G$ を包含写像とすると，余接空間上のに誘導される余微分写像

$$q_H = T_1^*(\imath) : T_1^*(G) \to T_1^*(H)$$

は全射 $\mathbb{R}$-線形写像である．このとき，H のユニタリ表現 $\pi|_H$ の波面集合に関して次が成り立つ；

命題 4.2.1 $q_H(WF^\circ(\pi)) \subset WF^\circ(\pi|_H)$.

[証明] [9, Prop.1.5] 参照．■

4.3 G が可換ならば，指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は全射なる実解析的群準同型写像となるから，G は実ベクトル空間であるとしてよい．そこで $G = T_0(G) = \mathfrak{g}$ と同一視する．このとき $T \in \mathcal{C}_1(H_\pi)$ に対して $\mathrm{tr}_\pi(T)$ は G 上の緩増加な distribution となるから，その Fourier 変換 $\mathrm{tr}_\pi(T)^\wedge$ はベクトル空

間 $T_0^*(G)$ 上の緩増加 distribution である. $\bigcup_{T\in \mathcal{C}_1(H_\pi)} \operatorname{supp}(\operatorname{tr}_\pi(T)\hat{\ })$ の $T_0^*(G)$ における閉包を $\operatorname{supp}\pi$ として, $\operatorname{supp}\pi$ の漸近錐を $AC(\operatorname{supp}\pi)$ とする. 即ち, $u \in T_0^*(G)$ の近傍を含む任意の錐体 C に対して $C\cap \operatorname{supp}\pi$ が非有界となるような u の全体を $AC(\operatorname{supp}\pi)$ とする. このとき

命題 4.3.1 $WF^\circ(\pi) = -AC(\operatorname{supp}\pi)$ である.

[**証明**] [9, Prop.2.7] 参照. ■

4.4 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素 Lie 環とする. 包絡環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中で $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の高々 r 個の元の積で張られる複素部分空間を $U_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ とすると ($U_0(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$), $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の filtration $\{U_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}_{r\geq 0}$ に付随する次数付き $\mathbb{C}$-代数

$$\operatorname{gr}U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{r\geq 0} U_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/U_{r-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \qquad (U_{-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = 0)$$

は自然に $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の対称テンソル代数 $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ と $\mathbb{C}$-代数として同型となる [実際, Poincarè-Birkoff-Witt の定理から, $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元 $X_1X_2\cdots X_r$ を $\operatorname{gr}U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元 $X_1X_2\cdots X_r \pmod{U_{r-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}$ に対応させればよい].

M を有限生成左 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群とする. $M = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})M_0$ なる M の有限次元複素ベクトル部分空間 M_0 をとり, M の filtration $\{M_r = U_r(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})M_0\}_{r\geq 0}$ に付随する次数付き $\operatorname{gr}U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群を

$$\operatorname{gr}(M; M_0) = \bigoplus_{r\geq 0} M_r/M_{r-1} \qquad (M_{-1} = 0)$$

とする. $\operatorname{gr}(M; M_0)$ は $\operatorname{gr}U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群として $M_0 \subset \operatorname{gr}(M; M_0)$ で生成されるから, 特に有限生成 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群である. その零化イデアルを

$$\mathfrak{a}(M; M_0) = \{D \in \operatorname{gr}U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \mid Dv = 0\ \forall v \in \operatorname{gr}(M; M_0)\}$$

とする. このとき

補題 4.4.1 $\mathfrak{a}(M; M_0)$ の根基 $\sqrt{\mathfrak{a}(M; M_0)}$ は M_0 の選択に依らない.

そこで $\operatorname{gr}U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ と同一視し, $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を双対空間 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ 上の多項式の全体と同一視すると, 補題 4.4.1 から, $\mathfrak{a}(M; M_0)$ の零点集合

$$\mathcal{V}(M) = \{\lambda \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \mid D(\lambda) = 0\ \forall D \in \mathfrak{a}(M; M_0)\}$$

は M_0 の選択によらない. アフィン代数多様体 $\mathcal{V}(M)$ を $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群 M の随伴多様体と呼ぶ.

4.5 G を中心が有限である連結半単純実 Lie 群として，K を G の極大コンパクト部分群とする．K に付随する $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の Cartan 対合 θ による Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする．G の既約ユニタリ表現 (π, H_π) に対して，H_π の K-有限ベクトル全体 $H_{\pi,K}$ は既約な $(\mathfrak{g}, K)$-加群となる．特に K-不変な有限次元複素部分空間 $V \subset H_{\pi,K}$ で $H_{\pi,K} = U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})V$ なるものがとれるから，随伴多様体 $\mathcal{V}(H_{\pi,K})$ をユニタリ表現 π の随伴多様体と呼び $\mathcal{V}(\pi)$ と書く．ところで，V は K-不変だから $X \cdot V \subset V$ $(\forall X \in \mathfrak{k})$，従って $\mathrm{gr}(H_{\pi,K}; V)$ の中では $X \cdot V = 0$ $(\forall X \in \mathfrak{k})$ である．よって $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}} \subset \mathfrak{a}(H_{\pi,K}; V)$，即ち

$$\mathcal{V}(\pi) \subset \{\lambda \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^* \mid \lambda(\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}) = 0\}.$$

又，$\mathfrak{a}(H_{\pi,K}; V)$ は $\mathrm{Ad}(K)$-不変だから，$\mathcal{V}(\pi)$ は K の co-adjoint 作用 $\mathrm{Ad}^*(K)$ に対して安定である．ここで $\mathfrak{g}$ の Kiling 形式 $B_{\mathfrak{g}}$ により $X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ と $B_{\mathfrak{g}}(X, *) \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*$ を同一視すると，$\mathcal{V}(\pi) \subset \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ となり，K の複素化 $K_{\mathbf{C}}$ に対して $\mathrm{Ad}(K_{\mathbf{C}})$-不変である．更に

定理 4.5.1 $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ が冪零なる $X \in \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ の全体を $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}$ とすると，$\mathcal{V}(\pi) \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}$ である．

[証明] [26, Cor.5.23] と [4, 1.3] 参照．■

4.6 $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{g})$ が冪零となる $X \in \mathfrak{g}$ の全体を $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ と書く．$\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(g)X) = \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{Ad}(g)^{-1}$ だから，$\mathrm{Ad}(G)$ は $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ に作用する．

定義 4.6.1 $\mathfrak{g}$ の 0 でない元の三つ組 $\{H, X, Y\}$ に対して，

1) $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$, $[X, Y] = H$ であるとき，$\{H, X, Y\}$ は標準三つ組であるという，
2) 標準三つ組 $\{H, X, Y\}$ が更に $\theta H = -H$, $\theta X = -Y$, $\theta Y = -X$ を満たすとき，$\{H, X, Y\}$ を Cayley 三つ組と呼ぶ．

$\mathfrak{g}$ の標準三つ組の集合には $\mathrm{Ad}(G)$ が作用しているが，標準三つ組と Cayley 三つ組の間には次の関係がある；

命題 4.6.2 $\mathfrak{g}$ の任意の標準三つ組の $\mathrm{Ad}(G)$-軌道は Cayley 三つ組を含む．

[証明] [4, Th.9.4.1] 参照．■

$\mathrm{Ad}(G)$-軌道 $\mathcal{O} \in \mathrm{Ad}(G)\backslash\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ をとる．$X \in \mathcal{O}$ とすると，Jacobson-Morozov の定理から $\mathfrak{g}$ の標準三つ組 $\{H, X, Y\}$ が存在するが，命題4.6.2 から，$\{H, X, Y\}$ は Cayley 三つ組であるとしてよい．このとき

$$\{H', X', Y'\} = \{\sqrt{-1}(X - Y), \frac{1}{2}(X + Y + \sqrt{-1}H), \frac{1}{2}(X + Y - \sqrt{-1}H)\}$$

は $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の標準三つ組であって，$H' \in \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}, X', Y' \in \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ である．特に $X' \in \mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}$ であるから，$\widetilde{\mathcal{O}} = \mathrm{Ad}(K_{\mathbf{C}})X' \in \mathrm{Ad}(K_{\mathbf{C}})\backslash\mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}$ とおくと，次の定理が成り立つ；

定理 4.6.3 対応 $\mathcal{O} \mapsto \widetilde{\mathcal{O}}$ は well-defined で，$\mathrm{Ad}(G)\backslash\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ から $\mathrm{Ad}(K_{\mathbf{C}})\backslash\mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}$ への全単射を与える．

[証明] [20]，[4, Th.9.5.1] 参照．■

定理 4.6.3 で与えられる全単射を Kostant-Sekiguchi 対応と呼ぶ．G の既約ユニタリ表現の随伴多様体と波面集合は，Kostant-Sekiguchi 対応を通して次のように関係している；

定理 4.6.4 π を G の既約ユニタリ表現とすると，$WF^{o}(\pi) \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ は Kostant-Sekguchi 対応により $\mathcal{V}(\pi) \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}$ に対応する．

[証明] [19, Th.1.4] 参照．■

ここで，

命題 4.6.5 Kostant-Sekigushi 対応において，$\mathrm{Ad}(G)$-軌道と $\mathrm{Ad}(K_{\mathbf{C}})$-軌道の閉包の包含関係は保存される．

[証明] 古典群に関しては [15]，一般の場合に関しては [2] 参照．■

4.7 連結半単純実 Lie 群 G は二乗可積分な既約ユニタリ表現を持つと仮定して，二乗可積分表現の随伴多様体は次のように記述される；

定理 4.7.1 二乗可積分表現な既約ユニタリ表現 $\pi_\lambda \in \widehat{G}_d$ の Harish-Chandra パラメータを λ とすると

$$\mathcal{V}(\pi_\lambda) = \mathrm{Ad}(K_{\mathbf{C}})\mathfrak{p}_- \qquad \mathfrak{p}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_n^+(\lambda)} \mathfrak{g}_{\mathbf{C},-\alpha}$$

である．ここで non-compact root の集合 Φ_n に対して

$$\Phi_n^+(\lambda) = \{\alpha \in \Phi_n \mid (\alpha, \lambda) > 0\}$$

とおく．

[証明] [30, Th.3.1] 参照．■

5 正則離散系列の場合

以下，G を中心有限の半単純連結実 Lie 群として，G の極大コンパクト部分群 K に対して G/K は有界対称領域であると仮定する．K に付随する $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の Cartan 対合 θ に関する Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする．

5.1 $\mathfrak{p}$ を G/K の接空間と同一視すると，G/K の複素構造から $(\mathrm{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}})^2 = -1$ なる $H_0 \in Z(\mathfrak{k})$ が存在する．

$$\mathfrak{k}_{\mathbf{C}} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \mid [H_0, X] = 0\}$$

$$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-, \quad \mathfrak{p}^{\pm} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \mid [H_0, X] = \pm\sqrt{-1}X\}$$

である．特に $\theta = \exp(\pi \cdot \mathrm{ad}(H_0))$ である．G の複素化 $G_{\mathbf{C}}$ に対して $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ に対応する $G_{\mathbf{C}}$ の連結閉部分群 $K_{\mathbf{C}}$ とおく．$P^{\pm} = \exp \mathfrak{p}^{\pm}$ は $G_{\mathbf{C}}$ の可換連結閉部分群で，$\exp : \mathfrak{p}^{\pm} \to P^{\pm}$ は全単射である．$G \subset P^+ \cdot K_{\mathbf{C}} \cdot P^-$ で

$$P^+ \times K_{\mathbf{C}} \times P^- \ni (p, k, q) \mapsto pkq \in P^+ \cdot K_{\mathbf{C}} \cdot P^-$$

は単射だから，自然な単射

$$G/K \to GK_{\mathbf{C}}P^-/K_{\mathbf{C}}P^- \subset P^+K_{\mathbf{C}}P^-/K_{\mathbf{C}}P^- \to P^+ \to \mathfrak{p}^+$$

の像を $\mathcal{D} \subset \mathfrak{p}^+$ とおく．$g \in G$, $z \in \mathcal{D}$ に対して

$$g \cdot \exp(z) = \exp(g(z)) \cdot J(g, z) \cdot p^- \quad g(z) \in \mathcal{D},\ J(g, z) \in K_{\mathbf{C}},\ p^- \in P^-$$

とできて，

1) $(g, z) \mapsto g(z)$ により G は $\mathcal{D}$ の正則自己同型群として推移的に作用し，$0 \in \mathcal{D}$ の固定部分群が K である，
2) $J : G \times \mathcal{D} \to K_{\mathbf{C}}$ は実解析的で $z \in \mathcal{D}$ に関しては正則，かつ関係式

$$J(gh, z) = J(g, h(z)) \cdot J(h, z) \quad \forall g, h \in G,\ z \in \mathcal{D}$$

を満たす，
3) $J(k, 0) = k\ \forall k \in K \subset K_{\mathbf{C}}$.

根系 $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ の基本根系 Ψ を $\mathfrak{p}^+ \subset \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+(\Psi)} \mathfrak{g}_{\mathbf{C},\alpha}$ となるようにとる．

$(\delta_{\mathbf{C}}, V)$ を $K_{\mathbf{C}}$ の有限次元既約正則表現として，Ψ に関する最高の重みを $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ とする．$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Phi^+(\Psi)} \alpha$ として

$$(\lambda + \rho, \alpha) < 0 \ \text{ for } \forall \alpha \in \Phi_n^+(\Psi)$$

ならば，$\delta = \delta_{\mathbf{C}}|_K$ を最少の K-type とする G の二乗可積分表現 (π^δ, H^δ) が存在する（いわゆる正則離散系列表現である）．π^δ の Harish-Chandra パラメータは $\lambda + \rho$ である．このとき，

$$\Phi_{\pi^\delta, \delta}(g) = \delta_{\mathbf{C}}\left(J(g^{-1}, 0)\right)^{-1} \qquad (g \in G)$$

である（[12, Lemma 6.7] 参照）.

5.2 Wolf-Korányi の理論（[18, Chap.III] 参照）により，有界対称領域 $\mathcal{D} \subset \mathfrak{p}^+$ の境界成分は (H_1)-準同型写像 $\kappa : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ により制御されている[10].

$$X_\kappa = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Y_\kappa = \kappa \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_\kappa = \kappa \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおく．$H_\kappa \in \mathfrak{k}$, $X_\kappa, Y_\kappa \in \mathfrak{p}$ である．

$$c_\kappa = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{4} Y_\kappa\right) \in G_{\mathbf{C}}, \qquad \widehat{\mathfrak{p}^+} = \mathrm{Ad}(c_\kappa)^{-1}\mathfrak{p}^+$$

$$\widehat{P^+} = c_\kappa^{-1} P^+ c_\kappa, \quad \widehat{K}_{\mathbf{C}} = c_\kappa^{-1} K_{\mathbf{C}} c_\kappa, \quad \widehat{P^-} = c_\kappa^{-1} P^- c_\kappa$$

とおくと，

$$c_\kappa \cdot G \subset P^+ \cdot K_{\mathbf{C}} \cdot P^-, \quad \therefore G \cdot c_\kappa \subset \widehat{P^+} \cdot \widehat{K}_{\mathbf{C}} \cdot \widehat{P^-}$$

だから（[18, p.137]），$z \in \mathcal{D} \subset \mathfrak{p}^+$ に対して

$$c_\kappa \cdot \exp(z) = \exp(c_\kappa(z)) J(c_\kappa, z) p^-$$

$$c_\kappa(z) \in \mathfrak{p}^+, \quad J(c_\kappa, z) \in K_{\mathbf{C}}, \quad p^- \in P^-$$

とおくと

$$\exp(z) \cdot c_\kappa = \exp(\widehat{z}) \cdot J(c_\kappa, z) \cdot \widehat{p^-}$$

$$\widehat{z} = \mathrm{Ad}(c_\kappa)^{-1} c_\kappa(z) \in \widehat{\mathfrak{p}^+}, \quad \widehat{J}(c_\kappa, z) = c_\kappa^{-1} J(c_\kappa, z) c_\kappa \in \widehat{K}_{\mathbf{C}}, \quad \widehat{p^-} \in \widehat{P^-}$$

と書ける．$z \mapsto \widehat{z}$ を κ に付随した Cayley 変換と呼ぶ．

$$\widehat{\mathcal{D}} = \{\widehat{z} \mid z \in \mathcal{D}\} \subset \widehat{\mathfrak{p}^+}$$

とおくと，$g \in G$ は $\widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}}$ に $g(\widehat{z}) = \widehat{g(z)}$ により推移的に作用し，$\widehat{0} \in \widehat{\mathcal{D}}$ の固定部分群が K である．$g \in G$, $z \in \mathcal{D}$ に対して

$$J(g, \widehat{z}) = c_\kappa^{-1} J(c_\kappa, g(z)) J(g, z) J(c_\kappa, z)^{-1} c_\kappa \in \widehat{K}_{\mathbf{C}}$$

とおくと

$$g \cdot \exp \widehat{z} = \exp g(\widehat{z}) \cdot J(g, \widehat{z}) \cdot p^- \quad (p^- \in \widehat{P^-})$$

となる．よって

$$J(gh, z) = J(g, h(z)) J(h, z) \text{ for } \forall g, h \in G, \; z \in \widehat{\mathcal{D}}$$

---

[10] Lie 環の準同型写像 $\kappa : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ が $\mathrm{ad}(H_0) \circ \kappa = \kappa \circ \mathrm{ad}(H_0')$ ($H_0' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$) を満たすとき，$\kappa$ を (H_1)-写像と呼ぶ．

$$K \ni k \mapsto J(k,\widehat{0}) = c_\kappa^{-1} J(c_\kappa,0) k J(c_\kappa,0)^{-1} c_\kappa \in \widehat{K}_{\mathbf{C}}$$

は単射群準同型写像となる．そこで $\widehat{K}_{\mathbf{C}}$ の既約正則表現 $(\widehat{\delta}_{\mathbf{C}}, V)$ を

$$\widehat{\delta}_{\mathbf{C}}(g) = \delta_{\mathbf{C}}\left(J(c_\kappa,0)^{-1} c_\kappa g c_\kappa^{-1} J(c_\kappa,0)\right) \quad \text{for } g \in \widehat{K}_{\mathbf{C}}$$

により定義する．$z, z' \in \widehat{\mathcal{D}}$ に対して

$$\overline{\exp z}^{-1} \cdot \exp z' = \overline{p} \cdot K(z',z)^{-1} \cdot q \qquad (p,q \in \widehat{P^-})$$

なる $K(z',z) \in c_\kappa^{-1} K_{\mathbf{C}} \overline{c_\kappa}$ がとれる．正則離散系列表現 π^δ の球関数 $\Phi_{\pi^\delta,\delta}$ は次のように表される；

命題 5.2.1 $\Phi_{\pi^\delta,\delta}(g) = \widehat{\delta}_{\mathbf{C}}\left(K(\widehat{0}, g(\widehat{0}))\overline{J(g,\widehat{0})} K(\widehat{0},\widehat{0})^{-1}\right)$ $(\forall g \in G)$.

5.3 $\mathbb{Q}$-上定義された連結半単純線形代数群 $\mathbb{G}$ は $\mathbb{Q}$-単純かつ単連結とする．よって $G = \mathbb{G}(\mathbb{R})$ は連結半単純実 Lie 群となるから，前節の記号を用いる．更に (H_1)-準同型写像 $\kappa : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ は $\mathbb{Q}$-上定義されていると仮定する[11].

$$\mathfrak{l}_\kappa = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X_\kappa, X] = 0\}$$

$$V_\kappa = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X_\kappa, X] = X\}, \qquad U_\kappa = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X_\kappa, X] = 2X\}$$

とおくと，$\mathfrak{b}_\kappa = \mathfrak{l}_\kappa \oplus V_\kappa \oplus U_\kappa$ は $\mathfrak{g}$ の放物的部分環で，κ に付随する $\mathcal{D}$ の境界成分に対応する G の放物的部分群の Lie 環である．又，$\mathfrak{l}_\kappa$ は $\mathfrak{b}_\kappa$ の Levi 部分であり，$\mathfrak{n}_\kappa = V_\kappa \oplus U_\kappa$ は $\mathfrak{b}_\kappa$ の冪零根基となる．ここで [18, Remark, p.103] と [18, Cor.4.5, p.112]（の証明）及び $\mathbb{G}$ が $\mathbb{Q}$-単純であることに注意すると

$$U_\kappa = [\mathfrak{n}_\kappa, \mathfrak{n}_\kappa] = Z(\mathfrak{n}_\kappa)$$

であることが判る．$\mathfrak{l}_\kappa$ の $\mathbb{Q}$-構造 $\mathfrak{l}_{\kappa,\mathbf{Q}}$ に対応する $\mathbb{G}$ の代数的部分群を $\mathbb{L}_\kappa$ とおくと，命題 3.6.2 から次の命題が証明できる；

命題 5.3.1 概均質ベクトル空間 $(\mathbb{L}_\kappa, \mathrm{Ad}, U_{\kappa,\mathbf{C}})$ は条件 (E) を満たす.

$$V_\kappa^- = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X_\kappa, X] = -X\}, \qquad U_\kappa^- = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X_\kappa, X] = -2X\}$$

とおけば，$\mathfrak{b}_\kappa = \mathfrak{l}_\kappa \oplus V_\kappa^- \oplus U_\kappa^-$ は $\mathfrak{b}_\kappa$ の Opposite で，$V_\kappa^- \oplus U_\kappa^-$ は $\mathfrak{b}_\kappa$ の冪零根基となり U_κ^- はその中心である.

$$e_\kappa = \kappa \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U_\kappa, \qquad e_\kappa^- = \kappa \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in U_\kappa^-$$

[11]即ち κ は $\mathcal{D}$ の $\mathbb{Q}$-有理的な境界成分に対応していると仮定する.

とおくと，U_κ, U_κ^- は夫々

$$u \cdot v = \frac{1}{2}[[u, e_\kappa^-], v], \quad u \cdot v = \frac{1}{2}[[u, e_\kappa], v]$$

を積とする形式的実 Jordan 代数となり，$L_\kappa = \mathbb{L}_\kappa(\mathbb{R})^\circ$ とおくと

$$\Omega_\kappa = \mathrm{Ad}(L_\kappa)e_\kappa \subset U_\kappa, \quad \Omega_\kappa^- = \mathrm{Ad}(L_\kappa)e_\kappa^- \subset U_\kappa^-$$

が夫々に付随する自己共役等質開凸錐体となる．ここで有界対称領域 $\mathcal{D}$ の κ に付随した Cayley 変換 $\widehat{\mathcal{D}}$ は第 3 種 Siegel 領域として実現され，領域 $(U_\kappa \oplus \sqrt{-1}\Omega_\kappa) \times \mathcal{D}_\kappa$ を含み[12]，$\widehat{0} = \sqrt{-1}e_\kappa \in \sqrt{-1}\Omega_\kappa$ である（[18, Chap.III,§3] 参照）．更に $U_{\kappa,\mathbf{C}} \subset \widehat{\mathfrak{p}^+}$ で，$X \in U_\kappa$ に対して $g = \exp X \in G$ とすると

$$g(\widehat{0}) = \widehat{0} + X, \qquad J(g, \widehat{0}) = 1$$

となる．よって命題 5.2.1 から $f_{\pi^\delta,\delta}(X) = \psi_{\pi^\delta,\delta}(\exp X)$ $(X \in U_\kappa)$ の Fourier 変換の計算は，管状領域 $U_\kappa \oplus \sqrt{-1}\Omega_\kappa$ における計算に帰着される．ここで Godement の議論 [7] を用いて，次の定理を得る；

定理 5.3.2 $\{Y \in U_\kappa^- \mid \widehat{f}_{\pi^\delta,\delta}(Y) \neq 0\} = \Omega_\kappa^-$.

上の定理の証明で，$\widehat{\delta}_{\mathbf{C}}$ を $\widehat{K}_{\mathbf{C}}$ の部分群に制限したときの分岐則が必用である．$\mathbb{G}$ が古典群ならば（個別に計算して）その分岐則は $GL_n(\mathbb{C})$ と $GL_m(\mathbb{C})$ $(n < m)$ の間の古典的な分岐則に帰着されるが，例外型の場合にはその部分が未完成である．従って現在のところ，上の定理は $\mathbb{G}$ が古典群の場合のみ証明が与えられているのだが，問題の分岐則はそれほど精密なものでなくてよいので，定理自身は一般に成り立つと思われる．

5.4 $\mathfrak{g}$ は単純であると仮定する．$\mathfrak{g}$ の $\mathbb{R}$-rank を r とすると，強直交する根の極大部分集合 $\{\beta_1, \cdots, \beta_r\} \subset \Phi_{\mathfrak{n}}^+(\Psi)$ がとれる（[18, Lemma 4.3, p.60], [29, p.279] 参照）．ここで単純実 Lie 環の分類表と $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = \mathrm{rank}\,\mathfrak{k}$ なる条件から，$\{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$ は強直交する long root からなる極大系であるとしてよい．さて β_k の根ベクトル $o_k \neq 0$ に対して $\bar{o}_k$ は $-\beta_k$ の根ベクトルで

$$B_{\mathfrak{g}}(o_k, \bar{o}_k) > 0, \quad B_{\mathfrak{g}}([o_k, \bar{o}_k], [o_k, \bar{o}_k]) > 0$$

だから，o_k の適当な定数倍をとれば $\beta_k([o_k, \bar{o}_k]) = 2$ としてよい．そこで

$$H_k = \sqrt{-1}[o_k, \bar{o}_k] \in \mathfrak{k}, \quad X_k = o_k + \bar{o}_k \in \mathfrak{p}, \quad Y_k = -\sqrt{-1}(o_k - \bar{o}_k) \in \mathfrak{p}$$

とおくと

$$[H_k, X_k] = -2Y_k, \quad [H_k, Y_k] = 2X_k, \quad [X_k, Y_k] = 2H_k$$

[12] $o_\kappa + \mathcal{D}_\kappa \subset \partial\mathcal{D}$ が κ に対応する $\mathcal{D}$ の境界成分である．

だから $\mathbb{R}$-Lie 環の準同型写像 $\kappa_k : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ が

$$\kappa_k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = H_k, \quad \kappa_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = X_k, \quad \kappa_k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Y_k$$

により定まる．$o_k \in \mathfrak{p}^+$ より $[H_0, o_k] = \sqrt{-1} o_k$ に注意すると $\kappa_k : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ は (H_1)-準同型写像である．更に $\beta_i \pm \beta_j$ が $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の根とならないから，任意の $i \neq j$ に対して κ_i の像と κ_j の像は可換である．そこで

$$\begin{aligned} H &= \kappa_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = X_k, \\ X &= \kappa_k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Y_k + H_k) = e_k, \\ Y &= \kappa_k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Y_k - H_k) = e_k^- \end{aligned}$$

とおくと，$\{H, X, Y\}$ は Cayley 三つ組となり

$$\begin{aligned} H' &= \sqrt{-1}(X - Y) = \sqrt{-1} H_k = [o_k, \bar{o}_k], \\ X' &= \frac{1}{2}(X + Y + \sqrt{-1} H) = \frac{1}{2}(Y_k + \sqrt{-1} X_k) = \sqrt{-1} \bar{o}_k, \\ Y' &= \frac{1}{2}(X + Y - \sqrt{-1} H) = \frac{1}{2}(Y_k - \sqrt{-1} X_k) = -\sqrt{-1} o_k \end{aligned}$$

である．よって Kostant-Sekiguchi 対応（定理 4.6.3）により冪零軌道 $[e_k] \in \mathrm{Ad}(G)\backslash\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ は冪零軌道 $[\sqrt{-1}\bar{o}_k] \in \mathrm{Ad}(K_{\mathbf{C}})\backslash\mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}$ に対応する．ここで $\{H, \theta Y = -e_k, \theta X\}$ は Cayley 三つ組で

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}(\theta Y - \theta X) &= [o_k, \bar{o}_k], \\ \frac{1}{2}(\theta Y + \theta X + \sqrt{-1} H) &= \sqrt{-1} o_k, \\ \frac{1}{2}(\theta Y + \theta X - \sqrt{-1} H) &= -\sqrt{-1} \bar{o}_k \end{aligned}$$

であり，更に，$e_k^- = -\theta e_k$ で

$$\theta = \exp(\pi \operatorname{ad} H_0) = \mathrm{Ad}\left(\exp(\pi H_0)\right), \exp(\pi H_0) \in K \subset G$$

だから，Kostant-Sekiguchi 対応により冪零軌道

$$[e_1^- + \cdots + e_k^-] = [-e_k - \cdots - e_k] \in \mathrm{Ad}(G)\backslash\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$$

は冪零軌道

$$[\sqrt{-1}(o_1 + \cdots + o_k)] \in \mathrm{Ad}(K_{\mathbf{C}})\backslash\mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}$$

に対応する．

さて，$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{p}^+$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の放物的部分環で，$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ が Levi 部分，$\mathfrak{p}^+$ が冪零根基であって可換である．そこで放物型概均質ベクトル空間 $(K_{\mathbb{C}}, \mathrm{Ad}, \mathfrak{p}^+)$ を考える．$\{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$ は強直交する long root からなる極大系だから [16, Th.5.1.11] より

$$0, \quad \sqrt{-1}(o_1 + \cdots + o_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, r)$$

が $\mathrm{Ad}(K_{\mathbb{C}})\backslash\mathfrak{p}^+$ の完全代表系である．定理 4.7.1 より，G の正則離散系列表現の随伴多様体は $\mathfrak{p}^+ \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}}$ であるから，定理 4.6.4 より次の定理が得られる；

定理 5.4.1 G の正則離散系列表現の波面集合は

$$WF^{\mathrm{holo}} = \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathrm{Ad}(G)(e_0^- + \cdots + e_k^-) \quad (e_0^- = 0)$$

である．

任意の (H_1)-準同型写像 $\kappa : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ は $\{\kappa_1 + \cdots + \kappa_b\}_{b=1,2\cdots,r}$ と共役である（[18, Prop.4.3] 参照）．そこで前節で $\kappa = \kappa_1 + \cdots + \kappa_b$ $(1 \leq b \leq r)$ として，$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle X, Y\rangle_\theta = -B_{\mathfrak{g}}(X, \theta Y)$ による直交射影を $p_\kappa : \mathfrak{g} \to U_\kappa^-$ とすると，次の定理が証明できる；

定理 5.4.2 $p_\kappa\left(WF^{\mathrm{holo}}\right) = \overline{\Omega_\kappa^-}$.

6 作業仮説

6.1 正則離散系列表現に関する 5 節の結果から，一般の G の二乗可積分表現 π とその最少の K-type δ に関して次のような作業仮説を考えることは意味があると思われる；

仮説 1) $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle X, Y\rangle_\theta = -B_{\mathfrak{g}}(X, \theta Y)$ に関する直交射影 $p : \mathfrak{g} \to V_d^-$ に対して

$$\mathrm{supp}\, \widehat{f}_{\pi,\delta} = p(WF(\pi))$$

である，

仮説 2) $\widehat{f}_{\pi,\delta}$ の非零集合

$$\{Y \in V_d^- \mid \widehat{f}_{\pi,\delta}(Y) \neq 0\}$$

は $\Omega_{\mathbb{R}}^-$ の幾つかの連結成分の和集合に等しい．

定理 5.3.2 と定理 5.4.2 は正則離散系列表現に関しては，これらの作業仮説が成り立つことを示している．

$G = Sp(1, n)$ の極大コンパクト部分群 K は $SU(2, \mathbb{C}) \times Sp(n)$ と同型である．$SU(2, \mathbb{C})$ の m 次対称テンソル表現 sym_m と $Sp(n)$ の自明な 1 次元表現 1 に対して K の既約表現 $\delta_m = \mathrm{sym}_m \otimes 1$ ができる．$m > 2n - 1$ なら

ば G の二乗可積分表現 π_m で最少の K-type が δ_m となるものが唯一存在する．[22]，[1] の計算をみると，f_{π_m,δ_m} の Fourier 変換に関して上の作業仮説が成り立っていることが判る．

6.2 研究集会の講演では，一般の半単純実 Lie 群 G の二乗可積分表現 π とその最少の K-type δ に対して

(*) $\widehat{f}_{\pi,\delta}$ の非零集合は $L=\mathbb{L}(\mathbb{R})$ の随伴作用に対して安定である，

と述べたが，その後 **証明のギャップを発見した**．にもかかわらず正則離散系列の場合，$Sp(1,n)$ の場合，及び有限線形群での実験から，主張 (*) は成り立っている可能性が高い．(*) が成り立つならば，命題 4.2.1 と命題 4.3.1 より次の命題が証明できる；

命題 6.2.1 $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle X,Y\rangle_\theta=-B_{\mathfrak{g}}(X,\theta Y)$ に関する直交射影 $p:\mathfrak{g}\to V_d^-$ に対して

$$\operatorname{supp}\widehat{f}_{\pi,\delta}\subset -WF^\circ(\pi|_{\mathbf{N}_d(\mathbb{R})}),\qquad p(WF(\pi))\subset -WF^\circ(\pi|_{\mathbf{N}_d(\mathbb{R})}).$$

上の命題は $\operatorname{supp}\widehat{f}_{\pi,\delta}$ と $p(WF(\pi))$ が近い場所に居ることを示していて，作業仮説 1 の傍証となっている．

参考文献

[1] T.Arakawa : *On certain automorphic forms on $Sp(1,n)$* (Prog. Math. 46 (1983) 1-48)

[2] D.Barbasch and M.R.Sepanski : *Closure ordering and the Kostant-Sekiguchi Correspondence* (Proc. Amer.Math.Soc. 126 (1998), 311-317)

[3] A,Borel, W.Casselman : Automorphic Forms, Representations, and L-functions (P.S.P.M. 33 (1979), Amer. Math. Soc.)

[4] D.H.Collingwood and W.M.McGovern : Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algabras (Van Nostrand Reinhold, 1993)

[5] J.J.Duistermaat : Fourier Integral Operators (Prog. in Math. 130, Birkhäuser, 1996)

[6] S.T.Gaal : Linear Analysis and Representation Theory (Die Grund. math. Wiss. Einzel. 198, Springer-Verlag, 1973)

[7] R.Godement : *Fonctions holomorphes de careé sommable dans le demi-plan de Siegel* (Séminaire H. Cartan, 1957/58)

[8] Harish-Chandra : Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups (Lecture Notes in Math. 62 (1968), Springer-Verlag)

[9] R.Howe : *Wave front sets of representations of Lie groups* in Automorphic Forms, Representation Theory, and Arithmetic (Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math. 10 (1981) 117–140)

[10] T.Ibukiyama : *Poisson formula for Jordan algebra* (preprint)

[11] 垣田高夫：シュワルツ超関数入門 (日本評論社, 1985)

[12] A.Knapp : Representation Theory of Semisimple Groups (Princeton Univ. Press, 1986)

[13] R.P.Langlands : On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series (Lecture Notes in Math. 544 (1976), Springer-Verlag)

[14] D.Miličić : *Asymptotic behaviour of matrix coefficients of the discrete series* (Duke Math. J. 44 (1977), 59–88

[15] T.Ohta : *The closures of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities* (Tohoku Math.J. 43 (1991), 161–211)

[16] H.Rubenthaler : Algèbres de Lie et espaces préhomogènes (Travaux en Cours 44, Hermann, 1992)

[17] H.Rubenthaler : *Espace Préhomogenes de Type Parabolique* (Lec. in Math. Kyoto Univ. No.14, 189–221)

[18] I.Satake : Algebraic Structures of Symmetric Domains (Math. Soc. Japan, Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980)

[19] W.Schmid and K.Vilonen : *Characteristic cycles and wave front cycles of representations of reductive Lie groups* (Ann. of Math. 151 (2000), 1071–1118)

[20] J.Sekiguchi : *Remarks on nilpotent orbits of a symmetric pair*, (J.Math.Soc.Japan 39 (1987) 127–138)

[21] T.Shintani : *On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms* (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22 (1975) 25-65)

[22] R.Takahashi : *Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés* (Bull. Soc. Math. France 91 (1963), 289–433)

[23] K.Takase : *AS note on automorphic forms* (J.reine angew. Math. 409 (1990), 138–171)

[24] K.Takase : *A Note on Theta Functions* (Commentarii Math. UNiv. Sancti Pauli 43 (1994), 1–23)

[25] P.C.Trombi, V.S.Varadarajan : *Asymptotic behaviour of eigen functions on semisimple Lie group: the discrete spectrum.* (Acta. Math. 129 (1972), 237–280)

[26] D.A.Vogan:*Associated varieties and unipotent representations* (Harmonic Analtsis on Reductive Groups, Progress in Math. 101, W.Barker-P.Sally ed. Birkhäuser, (1991) 315–388)

[27] N.R.Wallach : *On the constant term of a square integrable automorphic form* (Operator algebras and representations, vol.II (1980), 227–237, Monographs Stud. Math. 18)

[28] G.Warner : Harmonic Analysis on Semi-Simple LIe Groups I,II (Die Grund. math. Wiss. Einzel. 188, 189, Springer-Verlag, 1972)

[29] J.A.Wolf : *Fine structure of Hermitian symmetric spaces* in Symmetrix Spaces (W.Boothby, G.Weiss ed. Marcel Dekker, (1972), 271–357)

[30] H.Yamashita : *Description of the associated varieties for the discrete series representation of a semisimple Lie group* (Commentarii Math. Univ. Sancti Pauli 47 (1998), 35–52)