数理解析研究所講究録 1282 巻 2002 年 179-183

決定論的拡散のルベーグスペクトル解析

独立行政法人通信総合研究所　梅野　健 (Ken Umeno)

Communications Research Laboratory, Independent Administrative Institution

1 はじめに

非可積分なハミルトン系の重要な特徴は、拡散が見られることである。この場合、純力学的に、確率論的振る舞いである拡散が得られる点で、ハミルトン系は様々な物理系で得られる拡散現象の重要なモデルである。一方、ハミルトン系をそのまま解析して、拡散現象の拡散係数といった統計量を、厳密に求めるのは非常に困難であることが知られている。本稿では、次式で与えられる系

$$\cdot \quad x_{n+1} = T(x_n) \cdots \text{力学系}$$
$$\cdot r(n+1) = r(n) + B(x_n) - \langle B\rangle$$

を決定論的拡散とし、その拡散係数を、力学系、関数 $B(x)$ との関係により導出することを目的とする。

2 条件

まず、この系の持つ条件として、

$\cdot r(0) = 0$
$\cdot T(\cdot)$　は混合性を持つ。
$\cdot T(\cdot)$　絶対連続な不変測度
　$\rho(x)dx$ を持つ。
$\cdot B(x) \epsilon L_2(\rho)$
$\Leftrightarrow$
$\| B \|^2 = \int_\Omega |B(x)|^2 \rho(x)dx < \infty$

を仮定する。従って以降は、この条件が自動的に満足されると仮定する。

3 問題

ここで、ターゲットとする問題を以下の様に設定する。

- 速い拡散　$\ll r^2(N) \gg = 0(N^{3-\alpha}) \quad 0 < \alpha < 2$
- 普通の拡散　$\ll r^2(N) \gg = 0(N)$
- 遅い拡散　$\ll r^2(N) \gg = 0(N^{1-2\rho}) \quad 0 < \rho < \frac{1}{2}$

を全て出す（パラメータ α, ρ を含む）決定論的拡散モデルを構築すること。

注1. 多自由度近可積分ハミルトン力学系で見られる拡散

$$\ll r^2(N) \gg = 0(N^\delta) \quad 0 < \delta < 1$$

遅い拡散 … 対応する現象→天体力学、その他多数。
結果： O.K.+おまけ ($\ll r^2(N) \gg = 0(1)$)

4 ルベーグスペクトル

以下の条件 (2) を満足する直交基底 $f_{\lambda,j}$ が存在する時、力学系 (M, μ, ϕ)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \phi(x_n) \\ Ug &\equiv g \circ \phi \end{aligned} \tag{1}$$

が Lebesgue Spectrum Λ を持つと言う。

$$\begin{array}{l} \cdot\ \text{定数函数}\ 1 \\ \cdot\, Uf_{\lambda,j} = f_{\lambda,j+1} \\ \text{for every } \lambda, j \quad (\lambda \epsilon \Lambda\ j \epsilon Z) \\ \text{が} \quad L_2(M, \mu)\ \text{の直交基底をなす。} \end{array} \tag{2}$$

定義により、以下のことが解る。

$$\langle f_{\lambda,j} | 1 \rangle = 0.$$

又、Λ の基数はユニークに決まる。重要なのは、Lebesgue Spectrum を持つ力学系は混合的であることである。証明は、Lebesgue Spectrum の直交性から導くことができる（証明略)。混合的性質を持つ Chebyshev 力学系は、それ自身が Lebesgue Spectrum を持つ完全直交関数系であることが最近著者によって構成的に示された[1]。よって以下では、完全な直交関数系を持つルベーグスペクトルを持つ力学系のみで話をすすめる。

5 拡散係数の導出

今、$B(x)$ をルベーグスペクトルの完全直交関数系 $\phi_{\lambda,j}$ により、以下の様に展開する（ステップ1)。

$$B(x) = \sum_{\lambda \epsilon \Lambda} \sum_{j=0}^{L(\lambda)} a_{\lambda,j} \phi_{\lambda,j}(x). \tag{3}$$

そして、次に自己相関関数をそのルベーグスペクトルによる展開係数の2次式として以下の様に求めることができることに注意をする (ステップ2)。

$$\begin{aligned} &\langle B, U^l B \rangle = \\ &\langle \textstyle\sum_{\lambda \epsilon \Lambda} \sum_{j=0}^{L(\lambda)} a_{\lambda,j} \phi_{\lambda,j}(x), \sum_{\lambda \epsilon \Lambda} \sum_{j=0}^{L(\lambda)} a_{\lambda,j} \phi_{\lambda,j+l}(x) \rangle \\ &= \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{m=l}^{L(\lambda)} a_{\lambda,m}\, a_{\lambda,m-l} \\ &\qquad \text{但し } L(\lambda) \geq l \end{aligned}$$

[1] K. Umeno, "SNR Analysis for Orthogonal Spreading Sequences", Nonlinear Analysis Vol. 48(2001)5753-5763

次に離散系の Green-Kubo 公式により、拡散係数はこの場合、

$$D = \frac{<B^2> - <B>^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\{<B, U^j B> - <B>^2\}$$

によって与えられるので、ステップ2で得られた自己相関関数を代入する（ステップ3）。すると、主結果として、以下が成立する。

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\lambda\in\Lambda}(\{\sum_{j=0}^{L(\lambda)} a_{\lambda,j})\}^2(\geq 0) \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda \cdots \quad \text{Spectral Decomposition of Diffusion Coefficient} \end{aligned}$$

where, $D_\lambda = \left\{\sum_{j=0}^{L(\lambda)} a_{\lambda,j}\right\}^2 \geq 0$. よって、この決定論的拡散の拡散定数（マクロパラメータ）が、ルベーグスペクトル展開係数（ミクロパラメータ）によって一意的に与えられることが解った。

6 例

$$\text{最初の例：} B(x) = T_1(x) - T_4(x)$$

$$\begin{aligned} \cdot\phi(x) = T_2(x) \quad \text{の場合} \quad B(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}T_1(x) - \sqrt{2}T_4(x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{1,0}(x) - \phi_{1,2}(x)) \\ D = D_1 &= (a_{1,0} + a_{1,2})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\phi_{q,j}(x) = \sqrt{2}\,T_{q,p^j}(x)$$

$$\begin{aligned} \cdot\phi(x) = T_4(x) \text{の場合} \quad B(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{1,0}(x) - \phi_{1,1}(x)) \\ D = D_1 &= (a_{1,0} + a_{1,1})^2 = \frac{(1-1)^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot\phi(x) = T_3(x) \text{又は} T_5(x) \text{の場合} \quad B(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{1,0}(x) - \phi_{4,0}(x)) \\ D = D_1 + D_4 &= (a_{1,0}^2 + (a_{4,0})^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

となる。これらは、もちろんチェビシェフ力学系による決定論的拡散の数値シミュレーションによって確かめられた。

7 遅い拡散

遅い拡散 $\ll r^2(N) \gg = 0(N^{1-2\rho})$ の導出

今、充分大きい正の整数Lに対して、

$$B(x) = \sum_{j=1}^{L} a_j \, \phi_{1,j}(x), \text{where}$$

$$a_j = \begin{cases} 1 & \cdots j = 1 \\ -\frac{1}{(j-1)^\rho} + \frac{1}{j^\rho} & \cdots j \geq 2 \end{cases}$$

とする。力学系を

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

とすると、

$$D = \left(\sum_{j=1}^{N} a_j \right)^2 = \frac{1}{N^{2\rho}}$$

が成立する。今、$\langle B, U^l B \rangle = 0 \quad for\, l \geq L$ に着目すると、
$N >> 1$ の $\ll r^2(N) \gg$ の評価は $L = N$ とおけば良い。よって、

$$D(N) = \left(\sum_{j=1}^{N} a_j \right)^2 = \frac{1}{N^{2\rho}}$$

となり、遅い拡散

$$\ll r^2(N) \gg = 2N \cdot D(N) = 2N^{1-2\rho} \quad 0 < \rho < \frac{1}{2}$$

を記述する。速い拡散の場合は略。

8 まとめ

[1] 決定論的拡散モデル

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= T(x_n) \\ r(n+1) &= r(n) + B(x) - < B > \\ r(0) &= 0 \end{aligned}$$

の拡散係数

$$D = \lim_{N\infty} \frac{\ll r^2(N) \gg}{2N}$$

は、以下の様なるルベーグスペクトルにより解析的に与えられる。

$$B(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j=0}^{L(\lambda)} a_{\lambda,j} \phi_{\lambda,j}(x)$$

$$D = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sum_{j=0}^{L(\lambda)} a_{\lambda,j} \right\}^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$$

[2]
(i) 遅い拡散 $(\ll r^2(N) \gg = 0(N^{1-2\rho})$ の構成を、この決定論的拡散モデルにより行った
これは、$B(x)$ が無限 tap 数の FIR(Finite Impulse Response) フィルタに相当する。

9 今後の課題

本稿で示したこれらの決定論的拡散のルベーグスペクトル解析は、カオスCDMAの干渉雑音評価,カオスモンテカルロ法のエラー解析[2]と密接な関係がある。また、本稿ではあまり説明しなかったが、完全直交関数系を持つカオス力学系の典型例は、加法公式に由来する可解カオス系に他ならない。今後は、その様なルベーグスペクトル解析の応用と共に、ハミルトン系で可解カオスと同じ様にルベーグスペクトル解析が可能な系を探っていきたい。

[2]K. Umeno, "Chaotic Monte Carlo Computation: A Dynamical Effect of Random-Number Generation", Jpn. J. Appl. Phys. Vol. 39 (2000) 1442-1456.