

Standard mapping における Non-Birkhoff 型周期軌道と位相エントロピー

山口喜博*

谷川清隆†

平成 14 年 4 月 19 日

概要

Standard mapping において, 対称 Non-Birkhoff 型周期軌道の出現に関する 2 つの順序関係を得た. 対称 Non-Birkhoff 型周期軌道の順序関係より組み紐を構成した. 組み紐の情報より既約 Burau 行列表現を構成し, その固有値より位相エントロピーを評価した.

1 本報告の目的

ねじれ写像 [1] において「軌道の点列の順序関係が保たれる周期軌道」の存在は Birkhoff[2] によって最初に証明された. これよりこの軌道を「Birkhoff 型周期軌道」(BO) と呼ぶ. この概念は, 「ねじれ写像におけるある種の軌道の存在」の証明で中心的な役割を果たしてきた [3-6]. 一方 Non-Birkhoff 型周期軌道 (NBO) は, 「軌道の点列の順序が狂う周期軌道」として定義される (詳細は §2.2 を参照の事). Non-Birkhoff 型周期軌道は Boyland-Hall[7-10] により研究された. その結果, Non-Birkhoff 型周期軌道は「ねじれ写像におけるある種の軌道の非存在性」の証明で重要な役割を演じることが明らかにされた.

ここで $F: (x_n, y_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1})$ を円筒面 ($0 \leq x < 2\pi, -\infty < y < \infty$) で定義されたねじれ写像とする. ただし, ねじれ性 $\partial x_{n+1} / \partial y_n > 0$ が満たされているとする. このような性質をもったねじれ写像として, Standard mapping がある. 我々は既に Standard mapping を含む Standard 型の写像において対称な Non-Birkhoff 型周期軌道の出現順序関係を得ている [11-14]. また同様の順序関係が強制振動子にも成立することが分かっている [15]. 周期軌道の出現順序に関して最も有名な例は 1 次元写像における Sharkovskii の順序関係 [16] である. 順序関係の 2 次元写像ならびに常微分方程式系への拡張は多くの研究者によってなされてきた [17-21]. 特に Non-Birkhoff 型周期軌道の出現は, 系の可積分性の破れと関係している [13, 14]. また KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 不変曲線の崩壊とも関係している [8, 22]. この報告では, Standard mapping において我々が得た順序関係等の紹介を行う.

§2.1 において Standard mapping を紹介し, §2.2-5 では Non-Birkhoff 型周期軌道等の基本概念について述べる. §3 では定理の証明で使用する性質を証明する. Non-Birkhoff 型周期軌道の出現順序に関する我々が得た結果を §4 で述べる. §5 にて Non-Birkhoff 型周期軌道に対する組み紐を構成する. §6 では, 組み紐の情報をもとに既約 Burau 行列表現を構成し, その固有値より位相エントロピーを評価する. 今後の課題について §7 で述べる.

本原稿を作成するにあたり議論して戴いた松岡隆先生 (鳴門教育大学) に感謝いたします.

* 帝京平成大学 yy-chaos@jb3.so-net.ne.jp

† 国立天文台 tanikawa@exodus.mtk.nao.ac.jp

2 Standard mapping 並びに基本概念の紹介

2.1 Standard mapping

Standard mapping T は円筒面 ($0 \leq x < 2\pi, -\infty < y < \infty$) で定義されている.

$$y_{n+1} = y_n + af(x_n), \quad (1)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}. \quad (2)$$

ここで $f(x) = \sin x$ であり, a は正のパラメーターである. Standard mapping には2つの不動点 $P = (0, 0)$ と $Q = (\pi, 0)$ がある. P はサドルである. $0 < a < 4$ では Q は楕円点であり, $a > 4$ では反転型のサドルである. 以下の便宜のためにサドル $(2\pi, 0)$ を P' と記す.

周期軌道の特徴付ける最も簡単な方法は, 回転数 $\nu = p/q$ を利用することである. ここで q は周期数を表す. $p > 0$ ならば軌道は1周期の間に円筒面に対する普遍被覆面を $2\pi p$ だけ右に進む.

2.2 Birkhoff 型と Non-Birkhoff 型周期軌道

Birkhoff 型の周期軌道の定義を述べる. すべての議論は円筒面に対する普遍被覆面で行う. 先ず周期軌道の回転数を固定する. このとき T について不変な集合を Ξ とする. この集合より任意の2点 r, s を選び, 下記の関係が成立している場合, その周期軌道を Birkhoff 型周期軌道と定義する. もし下記関係を満たさない r, s が存在するならば Non-Birkhoff 型周期軌道と定義する [7-10].

$$\pi_1(r) < \pi_1(s), \pi_1(Tr) < \pi_1(Ts). \quad (3)$$

ここで $\pi_1(r)$ は r の x -座標を表す. また $\pi_2(r)$ は r の y -座標を表すことにする.

Birkhoff 型周期軌道の性質で利用する性質をまとめておく [6].

[1] 不変集合 Ξ には楕円型周期軌道 (反転型のサドルも含む) とサドル型周期軌道がある.

[2] r を楕円型周期軌道の点をと, 一方 s をサドル型周期軌道からとるとも上記の関係は成立している.

[3] 不変集合 Ξ はひとつのリプシッツ関数上に存在している.

ここで y -軸上にサドル・ノード分岐 (接線分岐とも呼ばれる) でサドル型と楕円型周期軌道が生じたとしよう. これらの2点がリプシッツ関数上にはないことは明らかであるから, これらの周期軌道は Non-Birkhoff 型であることが分かる (§2.3 参照).

次に Non-Birkhoff 型周期軌道には2つのタイプがある. ここでは r, s をサドル型または楕円型周期軌道の点より選び, $r = p_{k-1}, s = p_k = Tp_{k-1}$ とする. 次の関係を満たす k, k' が存在する軌道を 第1のタイプとする.

$$\pi_1(p_{k-1}) < \pi_1(p_k), \pi_1(p_k) \geq \pi_1(p_{k+1}), \quad (4)$$

$$\pi_1(p_{k'-1}) > \pi_1(p_{k'}), \pi_1(p_{k'}) \leq \pi_1(p_{k'+1}). \quad (5)$$

つまり上記関係を満たす軌道には, 軌道の途中で前進から後退へ, 後退から前進へ変わる点 $\{p_k, p_{k'}\}$ (引き返し点) が存在する. この軌道を後退型 Non-Birkhoff 周期軌道と呼ぶ. 可能な全ての回転数において, 後退型 Non-Birkhoff 周期軌道は存在する.

次に第2のタイプについて述べる. ひとつの軌道が他の軌道を追い越す場合にも Birkhoff 型の条件が破れる. 第2のタイプを「追い越し型 Non-Birkhoff 周期軌道」と呼ぶ. ここでの分類では, 追い越し型 Non-Birkhoff 周期軌道には引き返し点が存在しない. 追い越し型 Non-Birkhoff 周期軌

道は回転数 $\nu = p/q$ が, $|p| \geq 2$ の場合に可能である. 2つのタイプの違いを Fig. 1 に示す. このレポートでは後退型 Non-Birkhoff 周期軌道の出現順序を議論する. 追い越し型 Non-Birkhoff 周期軌道についても議論は可能であるが非常に複雑である.

後退型 Non-Birkhoff 周期軌道において, 引き返し点は偶数個ある. 周期が長くなれば引き返し点数が4以上の後退型 Non-Birkhoff 周期軌道も可能になる. 以下の議論では「引き返し点数が2である後退型 Non-Birkhoff 周期軌道」のみに制限することがある. この場合は, この条件を記す. 一般の後退型 Non-Birkhoff 周期軌道を扱う場合は, 条件を記さない.

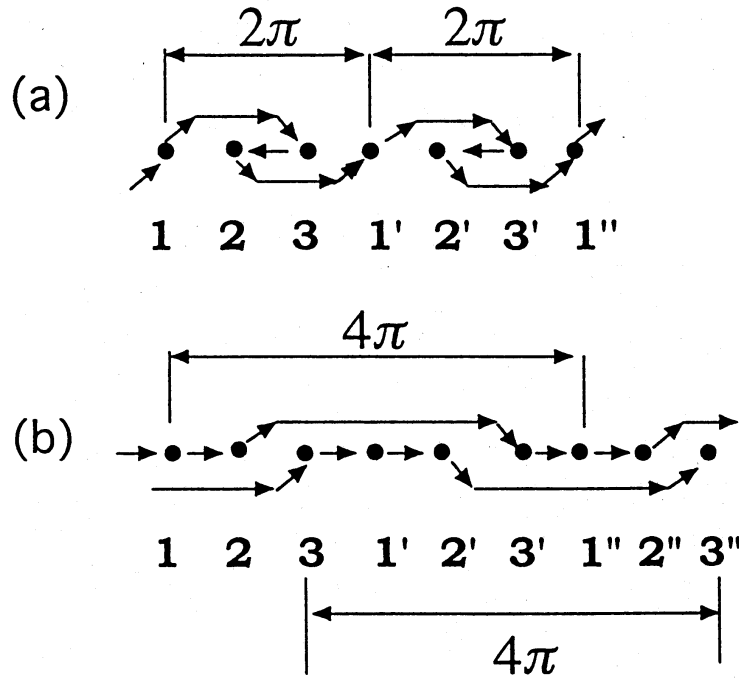


Fig. 1. (a) 引き返し点数が2の後退型 Non-Birkhoff 周期軌道 ($\nu = 1/3$). (b) 追い越し型 Non-Birkhoff 周期軌道 ($\nu = 2/3$). ここで $r = 2, s = 3$ ととれば, $Tr = 3', Ts = 1'$ となり, 条件 (3) が破れていることが確認できる. (a), (b) ともに普遍被覆面上での運動. 整数は軌道の空間的な順序を表す. また y 方向の変化は無視して描いてある.

2.3 対称線と周期軌道

写像が2つの対合 (Involution) の積に分解できるならば, その写像は Reversible である [23]. Standard mapping は2種類の形式に分解できるため, 2重に Reversible である [24]. 第1の形式は左右の対称性を表し, 第2の形式は上下の対称性を表す. ここでは主に次の第1の形式を利用する.

$$T = H \circ G, \quad (6)$$

$$G : (x, y) \leftrightarrow (-x, y + af(x)) \pmod{2\pi}, \quad (7)$$

$$H : (x, y) \leftrightarrow (-x + y, y) \pmod{2\pi}. \quad (8)$$

ここで $G^2 = id = H^2$ ならびに $\det \nabla G = \det \nabla H = -1$ である. 対合 H, G の不動点の集合は対称線と呼ばれる. 円筒面で, 対合 G は2つの対称線 $S_{1,2}$ を持ち, H は対称線 $S_{3,4}$ を持つ. 普遍被覆面では対称線は無数にある. そのため添字 m ($-\infty < m < \infty$: 整数) を導入して区別する. 対称線

は次のように表せる.

$$S_1^{(m)} : x = 2\pi m, \quad (9)$$

$$S_2^{(m)} : x = 2\pi m + \pi, \quad (10)$$

$$S_3^{(m)} : y = 2(x - 2m\pi), \quad (11)$$

$$S_4^{(m)} : y = 2(x - (2m + 1)\pi). \quad (12)$$

$y > 0 (y < 0)$ の領域にある対称線を指定する必要があるときは $+(-)$ の添字を付ける.

我々は対称線を通る周期軌道に興味がある. これらの周期軌道を対称周期軌道と呼ぶ. 対称周期軌道の時間的な順序を $\{p_0, p_1, \dots, p_{q-1}\}$ と記す. $p_q = p_0 + 2\pi p$ が成立している. 対称周期軌道が, どの対称線をどのような順で通過するかについては, 既に de Vogelaere [23] によって調べられている. ここではその結果を表 I にまとめておく.

表 I. 対称周期軌道と対称線の関係 ($k \geq 1$)

$p(\geq 0)$	q	p_0	通過軸	$p(\geq 0)$	q	p_0	通過軸
Odd	$2k$	S_1	$p_k \in S_2$	Odd	$2k + 1$	S_1	$p_{k+1} \in S_4$
Odd	$2k$	S_2	$p_k \in S_1$	Odd	$2k + 1$	S_2	$p_{k+1} \in S_3$
Odd	$2k$	S_3	$p_k \in S_4$	Odd	$2k + 1$	S_3	$p_k \in S_2$
Odd	$2k$	S_4	$p_k \in S_3$	Odd	$2k + 1$	S_4	$p_k \in S_1$
Even	$2k$	S_1	$p_k \in S_1$	Even	$2k + 1$	S_1	$p_{k+1} \in S_3$
Even	$2k$	S_2	$p_k \in S_2$	Even	$2k + 1$	S_2	$p_{k+1} \in S_4$
Even	$2k$	S_3	$p_k \in S_3$	Even	$2k + 1$	S_3	$p_k \in S_1$
Even	$2k$	S_4	$p_k \in S_4$	Even	$2k + 1$	S_4	$p_k \in S_2$

次に対称周期軌道の探索方法を紹介する. 例として軌道が出発する対称線を $S_{1+}^{(0)}$ とし, 周期数を 3 とする. $T^2 S_{1+}^{(0)}$ と $S_4^{(0)}$ との交点は周期 3 の周期点である. この交点は Birkhoff 型と Non-Birkhoff 型周期軌道の両者の点を含む. a を増加したとき, $T^2 S_{1+}^{(0)}$ が $S_{4-}^{(0)}$ と接し交差したとする. この接線分岐で生じた 2 つの交点のひとつが楕円点であり, 他方がサドルである. これらが Non-Birkhoff 型周期軌道の点であることを示そう. 生じ方から一方が Birkhoff 型で, 他方が Non-Birkhoff 型である可能性は排除してよい. 交点を A, B とする. A, B が $S_{4-}^{(0)}$ にあるから $\pi_1(A) = \pi_1(T^{-1}A) + \pi_2(A)$ と $\pi_2(A) < 0$ が成立する. よって A, B は回転数 $1/3$ の対称後退型 Non-Birkhoff 周期軌道の点である.

A, B が $S_{3+}^{(1)}$ にあるとする. $\pi_2(A) < \pi_2(B)$ ならば, $\pi_1(A) < \pi_1(B)$ である. $\pi_2(T^{-2}A) > \pi_2(T^{-2}B)$, $\pi_1(T^{-2}A) = \pi_1(T^{-2}B) = 0$ である. ねじれ性より $\pi_1(TA) > \pi_1(TB)$ である. これより $T^{-2}B$ から出た軌道が $T^{-2}A$ から出た軌道を追い越していることが分かる. 以上より A, B がともに回転数 $2/3$ の対称追い越し型 Non-Birkhoff 周期軌道である. また他の対称線から出発する軌道に関して同様のことが示せる. またこの結果は周期数の偶奇性に依存しない. この結果は対称 Non-Birkhoff 型周期軌道を探索するために必要な道具であるので, 性質 2-1 としてまとめておく:

性質 2-1. パラメーター a を増加したとき, ひとつの対称線の像が別の対称線と接触し交差したとする. 交差点は対称追い越し型または対称後退型 Non-Birkhoff 周期軌道の点である.

2.4 安定多様体と不安定多様体

2つのサドル P, P' には安定多様体と不安定多様体が存在する. それぞれのブランチに名前を付けておく (Fig. 2 を参照). P から右上に出ている不安定多様体を W_u^1 , P へ右下から入る安定多様体を W_s^2 , P' から左下に出ている不安定多様体を W_u^2 , P' へ左上から入る安定多様体を W_s^1 とする. W_u^1 と W_u^2 とは Q に関して互いに点対称な配置にある. 安定多様体についても同様である. Reversibility より安定多様体と不安定多様体は対合で関係付けられる.

$$GW_u^i = W_s^i, \quad (13)$$

$$HW_u^i = W_s^i. \quad (14)$$

ここで $i = 1, 2$.

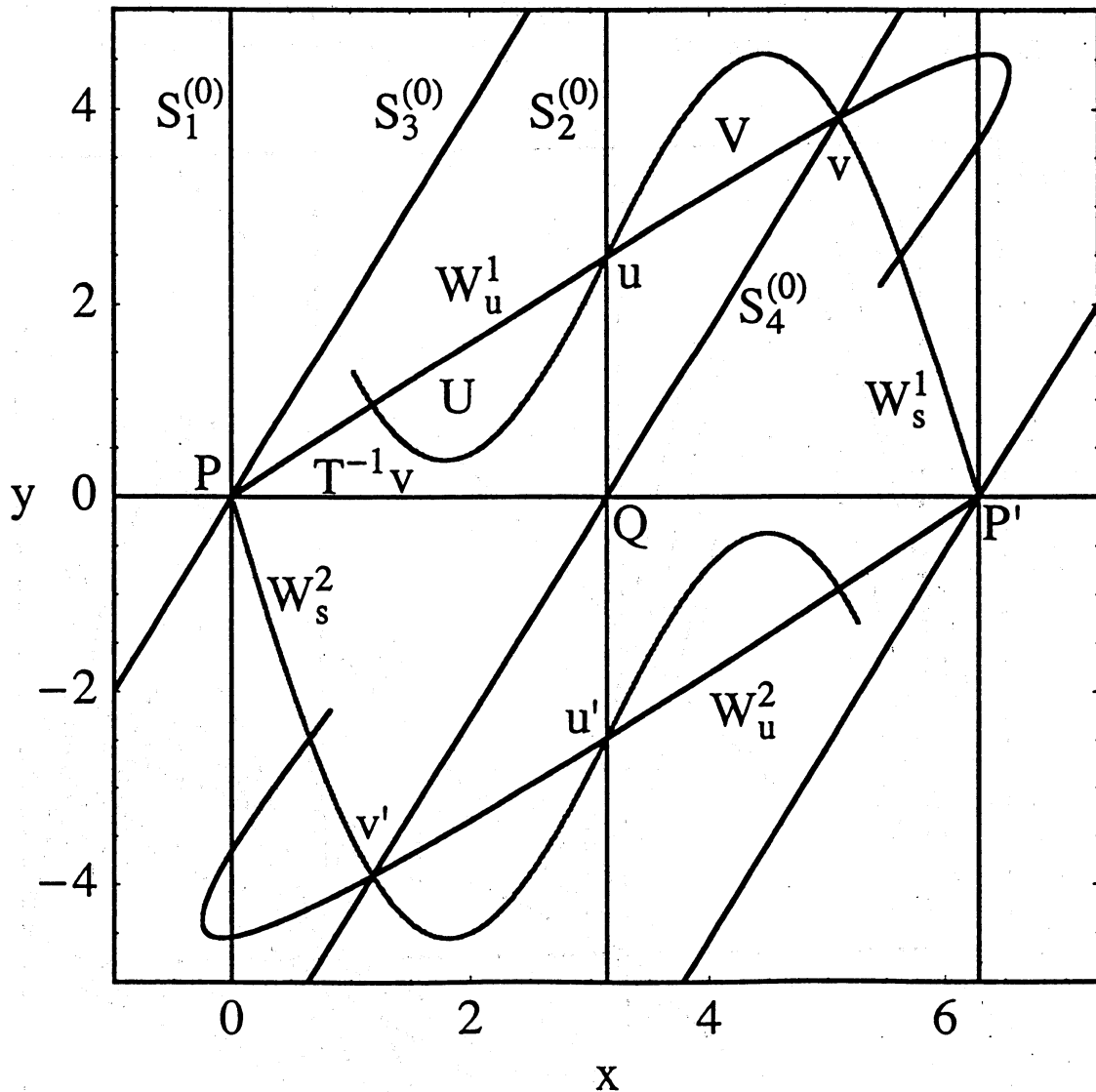


Fig. 2. Standard mapping における安定多様体と不安定多様体の構造 ($a = 3.2$). 対称線 $S_i^{(0)}$ ($i = 1, \dots, 4$) も描かれている.

安定多様体 W_s^1 と不安定多様体 W_u^1 の点 u における横断的交差は Lazutkin 等 [25] によって証明されている. 点 u は対称線 $S_{2+}^{(0)}$ 上にある. この点における安定多様体の傾きは不安定多様体の

傾きより大きい. 不安定多様体 W_u^1 と対称線 $S_{4+}^{(0)}$ との交点を v とする. u と v はホモクリニック点 (Primary homoclinic point) である [26]. u と v を結ぶ不安定多様体 W_u^1 の弧を $\gamma_u = [u, v]_{W_u^1}$ と, 安定多様体 W_s^1 の弧を $\gamma_s = [u, v]_{W_s^1}$ と記す. ここで γ_u と γ_s で囲まれた開領域をホモクリニックローブ (Primary homoclinic lobe) V と定義する. $T^{-1}v$ と u を結ぶ不安定多様体 W_u^1 の弧を $[T^{-1}v, u]_{W_u^1}$ と, 安定多様体 W_s^1 の弧を $[T^{-1}v, u]_{W_s^1}$ と記す. ここで $[T^{-1}v, u]_{W_u^1}$ と $[T^{-1}v, u]_{W_s^1}$ で囲まれた開領域をホモクリニックローブ U と定義する. 2つのホモクリニックローブは対合 G で関係付けられる.

$$U = GV. \quad (15)$$

2.5 区間ならびに臨界値の定義

ホモクリニックローブ V の逆像と対称線 $S_{1+}^{(0)}$ の交差より, $S_{1+}^{(0)}$ における开区間 I_n を定義する. 同様にその他の対称線上にも开区間が定義できる. Fig. 3 にいくつかの区間が描かれている.

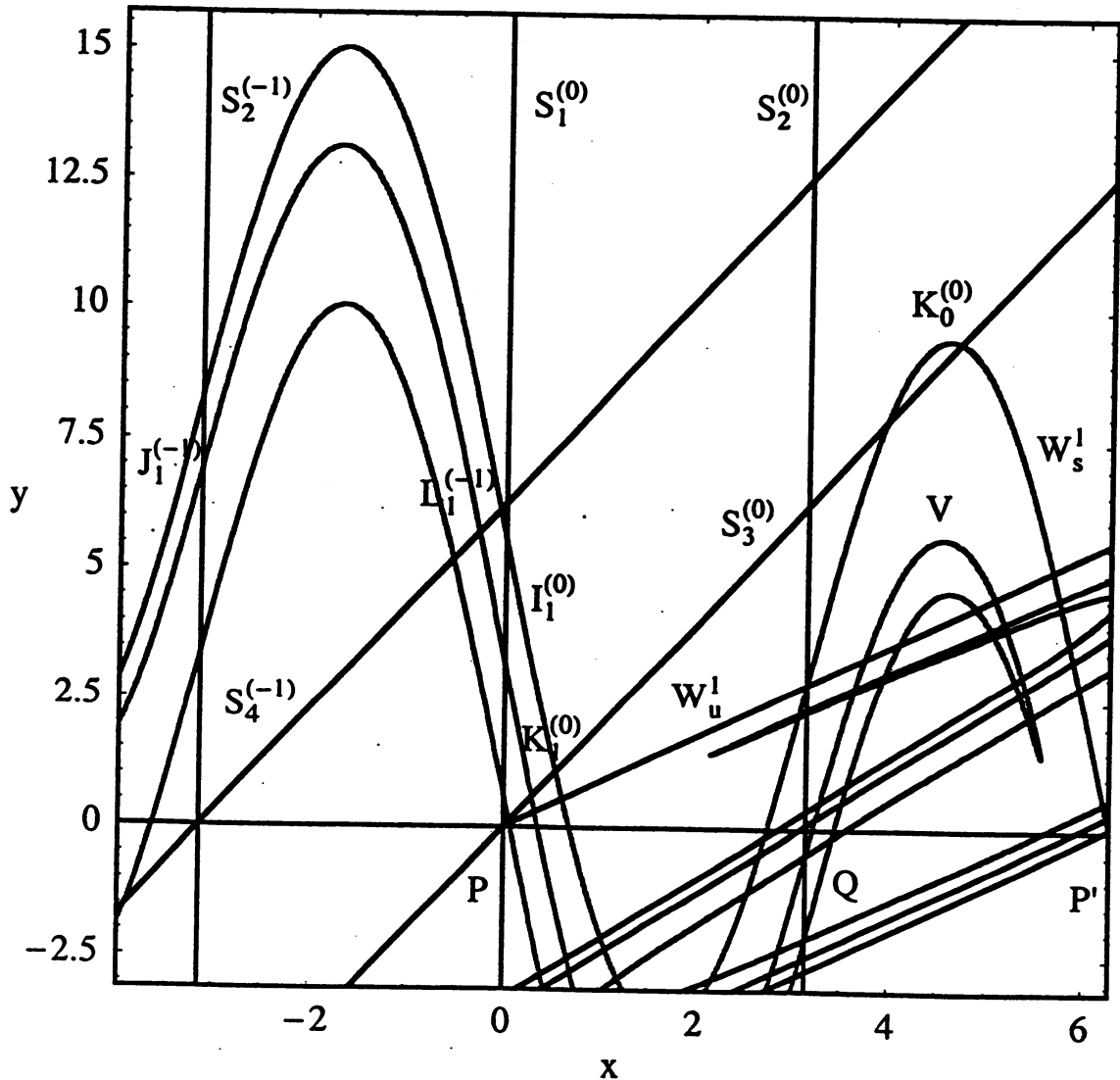


Fig. 3. 対称線上の区間の例 ($a = 8$).

$$I_n^{(-m)} = T^{-n}V \cap S_{1+}^{(-m)} \quad (m \geq 0, n \geq 1), \quad (16)$$

$$J_n^{(-m)} = T^{-n}V \cap S_{2+}^{(-m)} \quad (m \geq 1, n \geq 1), \quad (17)$$

$$K_n^{(-m)} = T^{-n}V \cap S_{3+}^{(-m)} \quad (m \geq 0, n \geq 0), \quad (18)$$

$$L_n^{(-m)} = T^{-n}V \cap S_{4+}^{(-m)} \quad (m \geq 1, n \geq 0). \quad (19)$$

以下の議論で次の略記号を用いる.

$$p/q \in I_n^{(-m)}. \quad (20)$$

この記号は「区間 $I_n^{(-m)}$ から出発する回転数 p/q の対称後退型 Non-Birkhoff 周期軌道 (SNBO) が存在する」という意味である. 他の区間から出発する回転数 p/q の SNBO についても同様の略記号を用いる.

最後に2つの臨界値を導入する.

[1] $a_c(p/q \in I_n^{(-m)})$: 区間 $I_n^{(-m)}$ から出発する回転数 p/q の SNBO が接線分岐で生じる臨界値.

[2] $a_c(I_n^{(-m)})$: 区間 $I_n^{(-m)}$ が生じる臨界値.

他の区間についても同様の記号を用いる.

3 基本的な性質

性質 3-1. r を V の中の点, s を U の中の点とする. 次の関係が成立する.

$$\pi < \pi_1(r) < 2\pi, \quad (21)$$

$$0 < \pi_1(s) < \pi. \quad (22)$$

証明: V の構成から, $\pi_1(u) = \pi$ であり $\pi < \pi_1(v) < 2\pi$ が成立する. 第2の関係は式 (15) より導かれる. Q.E.D.

性質 3-2. D を $B_1 = [Q, u]_{S_2^{(0)}}$, $B_2 = \gamma_u$, $B_3 = [v, P']_{W_s^1}$, $B_4 = [Q, P'] \in x$ 軸 で囲まれた開領域とする. Z は, D の外の領域にあり, かつ $y > 0$ と $y < 2(x - \pi)$ を満たす開領域とする. 下記の関係が成立する.

$$TD \cap Z = \emptyset. \quad (23)$$

証明: D の境界の T による像を調べる.

[1] TB_1 : これは D の中にある $y = (x - \pi)$ の線分. $TB_1 \cap Z = \emptyset$.

[2] TB_3 : これは W_s^1 の弧 $[Tv, P']$.

[3] s を $B_4 \setminus \{Q, P'\}$ 上の点とする. $\pi_2(Ts) < 0$ であることは簡単に示せる. これより $TB_4 \cap Z = \emptyset$ が導かれる.

[4] $TB_2 \cap TB_4 = \emptyset$ が成立するから, TV は TB_1 , $[Tu, P']_{W_s^2}$ と TB_4 で囲まれた領域にある. よって $TB_2 \cap Z = \emptyset$ が得られる.

以上の結果をまとめて性質 3-2 の証明は終わる. Q.E.D.

性質 3-3. ホモクリニックローブの中にある周期点は後退型 Non-Birkhoff 周期軌道の周期点である.

証明: $r \in V$ を回転数 $\nu = p/q$ の周期軌道の点とする. $\pi_1(r) - \pi_1(T^{-1}r) = \pi_2(r) > 0$ が成立するから, $T^{-1}r$ から r へ軌道は前進している. 回転数がゼロならば, 軌道はいずれ後退しなければなら

ない。また回転数が負でも同様である。よって回転数がゼロまたは負の場合は、この軌道は後退型 Non-Birkhoff 周期軌道である。以下では回転数が正 ($p > 0$) の場合を扱う。

性質 3-3 が成立しないとすると、次の関係が得られる。

$$\pi_1(r) \leq \pi_1(Tr) \leq \dots \leq \pi_1(T^q r) = \pi_1(r) + 2p\pi. \quad (24)$$

ある点 $T^k r$ ($1 \leq k \leq q-1$) が x 軸の下方にあるとすると、次の矛盾が生じる。

$$\pi_1(T^{k-1}r) > \pi_1(T^k r). \quad (25)$$

よって $\{r, \dots, T^k r\} \in D$ かつ $T^{k+1}r \in Z$ ($1 \leq k \leq q-1$) を満たす k が存在する。ここで D と Z は性質 3-2 で定義された領域である。しかし、このような k の存在は性質 3-2 に反する。Q.E.D.

性質 3-4. 区間 $I_n^{(-m)}$ は唯一つの成分で構成される。同様のことは他の区間についても成立する。証明: γ_s において u から v へ安定多様体によって x -座標を増加したとき、 γ_s の傾き ξ_s は狭義単調減少である [27]。よって $\xi_s(w) = 1$ を満たす高々 1 つの点 w が存在する。このことは曲線 $T^{-1}\gamma_s$ の傾きが発散する点 $T^{-1}w$ が高々 1 つあることを意味している。これより区間 $I_1^{(0)}$ は 1 つの連結成分で構成されていることが分かる。次に $I_2^{(0)}$ が 2 つの成分を持つとする。そうすると $T^{-2}\gamma_s$ には傾きが発散している点が少なくとも 3 点ある。これより $T^{-1}\gamma_s$ には傾きが 1 の点が少なくとも 3 点あることが分かる。曲線 $T^{-1}\gamma_s$ の連続性より、この曲線には傾きが発散する点が少なくとも 3 点ある。これは矛盾である。この手順をくり返して性質 3-4 は証明される。他の区間に関しても同様である。Q.E.D.

性質 3-5. 区間が出現する臨界値に対して次の不等式が成立する。

$$a_c(I_{n+1}^{(-m)}) < a_c(I_n^{(-m)}), \quad a_c(J_{n+1}^{(-m)}) < a_c(J_n^{(-m)}) \quad (m \geq 0, n \geq 1). \quad (26)$$

$$a_c(K_{n+1}^{(-m)}) < a_c(K_n^{(-m)}), \quad a_c(L_{n+1}^{(-m)}) < a_c(L_n^{(-m)}) \quad (m \geq 0, n \geq 0). \quad (27)$$

$$a_c(I_n^{(-m)}) < a_c(I_n^{(-m-1)}), \quad a_c(J_n^{(-m)}) < a_c(J_n^{(-m-1)}) \quad (m \geq 0, n \geq 1). \quad (28)$$

$$a_c(K_n^{(-m)}) < a_c(K_n^{(-m-1)}), \quad a_c(L_n^{(-m)}) < a_c(L_n^{(-m-1)}) \quad (m \geq 0, n \geq 0). \quad (29)$$

$$a_c(J_n^{(-m-1)}) > a_c(L_n^{(-m-1)}) > a_c(I_n^{(-m)}) > a_c(K_n^{(-m)}) \quad (m \geq 0). \quad (30)$$

$$a_c(K_n^{(-m)}) > a_c(I_{n+1}^{(-m)}) \quad (m \geq 0). \quad (31)$$

$$a_c(L_n^{(-m)}) > a_c(J_{n+1}^{(-m)}) \quad (m \geq 0). \quad (32)$$

証明: 区間の構成法ならびにラムダ補題 [28] より式 (26)-(30) が成立する。よって式 (31) を証明する。 $T^{-1}\gamma_s$ が $S_{3+}^{(0)}$ に接触した状況を考える。この状況では $T^{-1}\gamma_s$ は $y = x (x \geq 0)$ と交差している。この区間の逆像は区間 $I_2^{(0)}$ である。これより関係式 $a_c(K_1^{(0)}) > a_c(I_2^{(0)})$ が得られる。この手順をくり返して、式 (31) が証明される。式 (32) の証明も同様である。Q.E.D.

性質 3-6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_c(R_n^{(-m)}) = 0. \quad (33)$$

ここで R は次を意味する。

$$R = \{I, J\} \quad (m \geq 0, n \geq 1), \quad R = \{K, L\} \quad (m \geq 0, n \geq 0).$$

証明: ラムダ補題より $W_{u(s)}^1$ と $S_{1+}^{(-m)}$ の交差は $a = 0$ でない限り存在する. よって上記の区間は $a = 0$ でない限り存在するので題意は示された. Q.E.D.

性質 3-7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n R_n^{(-m)} = \gamma_u \quad (34)$$

ここで R の定義は性質 3-6 と同じ.

証明: すべての弧 $T^n I_n^{(-m)}$ ($n \geq 1$) は V の中に存在する. 上記の関係が成立しないとすると, γ_u と集積した極限の弧の間に隙間が存在する. これを W と記す. ラムダ補題より, $T^{-k}W \cap S_{1+}^{(-m)} \neq \emptyset$ ($k \geq k_0$) を満たす k_0 が存在することが分かる. これは $I_k^{(-m)}$ の像が $W \in V$ の中に存在することを意味し矛盾である. Q.E.D.

性質 3-8. ひとつの区間 $I_n^{(-m)}$ が存在すれば, その区間の中に SNBO の周期点が存在する. その他の区間 $J_n^{(-m)}, K_n^{(-m)}, L_n^{(-m)}$ についても同様である.

証明: ラムダ補題を利用すると, $j \geq j_0$ に対して $T^j \gamma_u \cap S_{2-}^{(0)} \neq \emptyset$ であるような正の整数 j_0 が存在することが分かる. もし $T^{j+n} I_n^{(0)} \cap S_{2-}^{(0)} \neq \emptyset$ が成立するならば, 交差点は回転数 $\nu = 1/(2j + 2n)$ の SNBO の周期点である. 次に $T^{j+n} I_n^{(0)} \cap S_{2-}^{(0)} = \emptyset$ の場合を考える. 性質 3-7 より $k \geq k_0$ に対して $T^{j+n+k} I_n^{(0)} \cap S_{2-}^{(0)} \neq \emptyset$ が成立するような正の整数 k_0 が存在することが分かる. 交差点は回転数 $\nu = 1/(2j + 2n + 2k)$ の SNBO の周期点である. 以上で SNBO の存在は証明された. 他の区間に関する証明も同様である. Q.E.D.

$I_n^{(-m)}$ を未来へ写像した像 $T^{n+1} I_n^{(-m)}$ が, パラメーター a の増加とともに対称線 $S_{2-}^{(0)}$ と接触し交差の仕方について注意しておこう. 像 $T^n I_n^{(-m)} \in V$ は対称線 $S_{2-}^{(0)}$ の右にある. 像 $T^{n+1} I_n^{(-m)}$ は対称線 $S_{2-}^{(0)}$ の右にあり, 対称線 $S_{2-}^{(0)}$ と接触交差していないとする. a を増加し, $T^{n+1} I_n^{(-m)}$ が対称線 $S_{2-}^{(0)}$ と接触するとき, $S_{2-}^{(0)}$ の右から接触する. また $y < 0$ の領域にある他の対称線と接触するときも同様である.

性質 3-9. SNBO が生じる臨界値に関して次の関係が成立する.

$$a_c(p/q \in R_n^{(-m)}) > a_c(R_n^{(-m)}), \quad (35)$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} a_c(p/q \in R_n^{(-m)}) = a_c(R_n^{(-m)}) \quad (36)$$

ここで R の定義は性質 3-6 と同じ.

証明: 回転数 $\nu = p/q$ の SNBO の周期点は区間 $I_n^{(-m)}$ の中に生じるから, 式 (35) が成立する. 次に $\lim_{q \rightarrow \infty} a_c(p/q \in I_n^{(-m)}) = a_c(I_n^{(-m)}) + \delta$ ($\delta > 0$) と仮定する. $a_c(I_n^{(-m)}) < a < a_c(I_n^{(-m)}) + \delta$ において, 区間 $I_n^{(-m)}$ は存在するが, SNBO は存在しない. しかしこれは性質 3-8 に矛盾する. よって式 (36) は証明された. 他の区間における SNBO の臨界値に関する証明も同様である. Q.E.D.

性質 3-10. 区間 $I_n^{(-m)}$ または $J_n^{(-m)}$ から出発する SNBO の最小周期は $2n+1$ であり, 区間 $K_n^{(-m)}$ または $L_n^{(-m)}$ から出発する SNBO の最小周期は $2n+2$ である.

証明: 定義より $I_n^{(-m)}$ から V まで n 回の写像が必要である. V から U までの最小の写像回数は 1 である. G に関する対称性より U から出発した軌道が 1 周期を完成するために更に n 回の写像が必要である. 以上で第 1 の主張が得られた. 同様に定義より $K_n^{(-m)}$ から V まで n 回の写像が必要である. V から U までの最小の写像回数は 1 である. H に関する対称性より U から出発した軌道が 1 周期を完成するために更に $(n+1)$ 回の写像が必要である. 以上で第 2 の主張が得られた. Q.E.D.

4 順序関係

以下で扱う SNBO は、引き返し点数が 2 で回転数が $\nu = p/q (p \geq 0, q \geq 2)$ の SNBO に制限する。

4.1 周期 2, 3 の SNBO に対する順序関係

§4.2 で証明される順序関係において周期 2 と 3 の SNBO が特別の位置にある。よってこれらの軌道の性質をまとめておく。順序関係を表すために利用する矢印記号の意味を例をもとに説明する。

$$\frac{1}{3} \in I_1^{(0)} \rightarrow \frac{1}{5} \in I_2^{(0)}, \quad (37)$$

$$\frac{0}{3} \in I_1^{(0)} \leftrightarrow \frac{3}{3} \in I_1^{(-1)}. \quad (38)$$

式 (37) は、 $I_0^{(0)}$ を出発する回転数 $\nu = 1/3$ の SNBO があれば、 $I_2^{(0)}$ を出発する回転数 $\nu = 1/5$ の SNBO があることを意味する。下矢印、左矢印も同様の意味である。式 (38) は、 $I_1^{(0)}$ を出発する回転数 $\nu = 0/3$ の SNBO と、 $I_1^{(-1)}$ を出発する回転数 $\nu = 3/3$ の SNBO が同時に生じることを意味する。

性質 3-11 より、周期 2 の SNBO の周期点是对称線 $K_0^{(-m)}$ と $L_0^{(-m)}$ の上にあることが分かる。周期 2 の SNBO の出現順序関係を表 II に示す [12].

表 II. 周期 2 の SNBO の出現順序関係.

$K_0^{(0)}$	←	$L_0^{(-1)}$	←	$K_0^{(-1)}$	←	$L_0^{(-2)}$	←
						0/2	←
						↓	↘
				0/2	←	1/2	←
				↓	↘	↓	↘
		0/2	←	1/2	←	2/2	←
		↓	↘	↓	↘	↓	↘
0/2	←	1/2	←	2/2	←	3/2	←
↓	↘	↓	↘	↓	↘	↓	↘
1/2	←	2/2	←	3/2	←	4/2	←

表 II の順序関係の略証. 周期 2 が生じる臨界値 $a_c(p/2 \in K_0^{(-m)})$ と $a_c(p/2 \in L_0^{(-m)})$ を評価すればよい。

$$a_c(p/2 \in K_0^{(-m)}) \approx 2\pi(3 + 4m - p) \quad (n \geq 0, 2m + 1 \geq p \geq 0), \quad (39)$$

$$a_c(p/2 \in L_0^{(-m)}) \approx 2\pi(1 + 4m - p) \quad (n \geq 1, 2m \geq p \geq 0). \quad (40)$$

式 (39) と (40) によって表 II の順序関係は得られる。生じる 2 つの周期点のひとつの x -座標が、近似的に $3\pi/2$ であることを利用して、臨界値を評価した。Q.E.D.

次に区間 $I_1^{(-m)}$ と $J_1^{(-m)}$ に生じる周期 3 の SNBO の順序関係を表 III に示す [11].

表 III. 周期 3 の SNBO の出現順序関係.

$I_1^{(0)}$	←	$J_1^{(-1)}$	←	$I_1^{(-1)}$	←	$J_1^{(-2)}$	←
						0/3	←
						↓	
				0/3	←	1/3	←
				↓		↓	
		0/3	←	1/3	←	2/3	←
		↓		↓		↓	
0/3	←	1/3	←	2/3	←	3/3	←
↓		↓		↓		↓	
1/3	←	2/3	←	3/3	←	4/3	←

表 III の順序関係の略証. 周期 3 が生じる臨界値 $a_c(p/3 \in I_1^{(-m)})$ と $a_c(p/3 \in J_1^{(-m)})$ を評価する.

$$a_c(p/3 \in I_1^{(-m)}) \approx 2(3m - p + 9/4)\pi \quad (i \geq 0, 2m + 1 \geq p \geq 0), \tag{41}$$

$$a_c(p/3 \in J_1^{(-m)}) \approx 2(3m - p + 3/4)\pi \quad (i \geq 1, 2m \geq p \geq 0). \tag{42}$$

表 III の順序関係は式 (41) と (42) で決定される. 生じる 3 つの周期点のひとつの x -座標が, 近似的に $3\pi/2$ であることを利用して, 臨界値を評価した.Q.E.D.

同時に複数の周期 3 が生じることが式 (41) と (42) より分かる. この同時発生を表 III に記すと複雑になるので省略してある.

4.2 2 つの順序関係

4.2.1 2 つの定理

定理 1 区間 $I_n^{(-m)}$, $J_n^{(-m)}$ に生じる SNBO の出現に対して次の順序関係が成立する. 但し $I_n^{(-m)}$ に対しては $0 \leq p \leq (2m + 1)$ であり, 区間 $J_n^{(-m)}$ に対しては $0 \leq p \leq 2m$ である.

$I_0^{(-m)}, J_0^{(-m)}$:	$p/3$	→	$p/4$	→	$p/5$	→	$p/6$	→
	↓		↓		↓		↓	
$I_1^{(-m)}, J_1^{(-m)}$:	$p/5$	→	$p/6$	→	$p/7$	→	$p/8$	→
	↓		↓		↓		↓	
$I_2^{(-m)}, J_2^{(-m)}$:	$p/7$	→	$p/8$	→	$p/9$	→	$p/10$	→
	↓		↓		↓		↓	

証明. 式 (41) と (42) が p に対する制限を与える. 次に区間 $I_n^{(-m)}$ に生じる SNBO に対する順序関係を証明する. 区間 $J_n^{(-m)}$ に生じる SNBO に対する順序関係の証明も同様であるので省略する. 以下の証明で用語として「交差」を用いる. この「交差」は横断的交差と考えると, 非横断的交差と考えるとよい. また接触と考えるとよい.

(1) $I_n^{(-m)}$: $p/k \rightarrow p/(k + 1)$ ($k \geq 2n + 1$) の証明.

[1-1] p と k が共に奇数.

周期が奇数で, p が奇数の場合, $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)}$ は $S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)}$ と交差する. パラメーターを増加したとき, $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)}$ は $S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)}$ の右側から接触し交差点を生じさせる. 以下のすべての場合において, 交差点の生じ方は同じである. $S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)}$ と $S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)}$ の位置関係から, $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)} \cap S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られ, $p/(k+1) \in I_n^{(-m)}$ が導かれた.

[1-2] p が奇数で, k が偶数.

上記と同じように仮定から $T^{k/2}I_n^{(-m)} \cap S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が導かれる. これらの交点は, ねじれ性より $S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)}$ の左へ写像される. これより $T^{(k+2)/2}I_n^{(-m)} \cap S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意が示された.

[1-3] p が偶数で, k が奇数.

この場合は, $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)}$ は対称線 $S_{3-}^{-(m-p/2)}$ と交差している. $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)} \cap S_{1-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意が示された.

[1-4] p と k が共に偶数.

$T^{k/2}I_n^{(-m)}$ は対称線 $S_{1-}^{-(m-p/2)}$ と交差している. ねじれ性より交点は対称線 $S_{3-}^{-(m-p/2)}$ の左へ写像される. よって $T^{(k+2)/2}I_n^{(-m)} \cap S_{3-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意が示された.

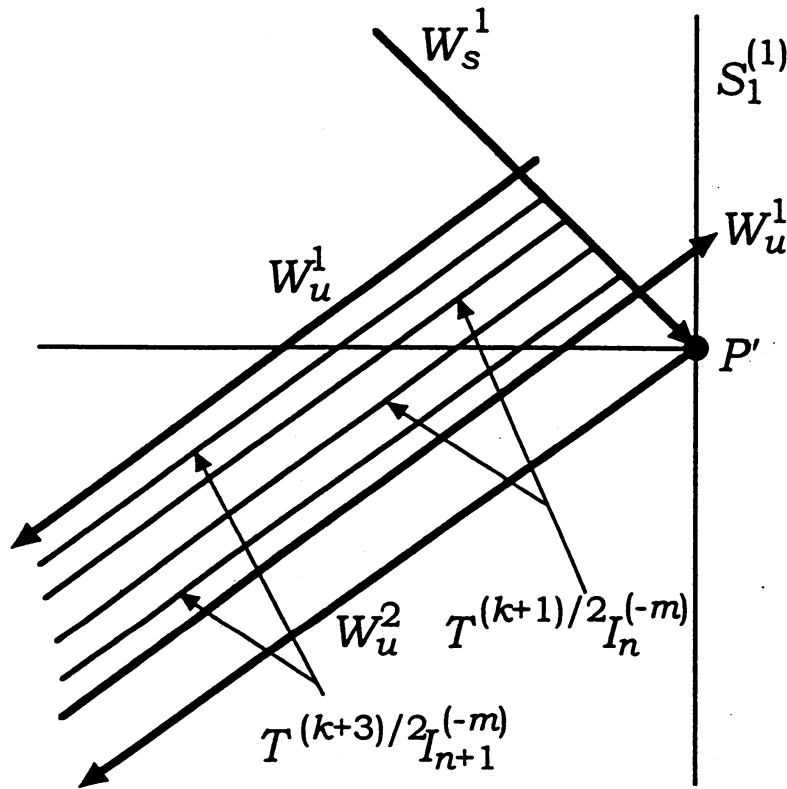


Fig. 4. $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)}$ と $T^{(k+3)/2}I_{n+1}^{(-m)}$ の位置関係.

(2) $p/k \in I_n^{(-m)} \rightarrow p/(k+2) \in I_{n+1}^{(-m)} : (k \geq 2n+1)$ の証明.

[2-1] p と k が共に奇数.

仮定 $p/k \in I_n^{(-m)}$ は, $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)} \cap S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ を意味する. $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)}$ と $T^{(k+3)/2}I_{n+1}^{(-m)}$ の位置関係は Fig. 4 に示されている. $T^{(k+3)/2}I_{n+1}^{(-m)}$ は $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)}$ の外側に

位置する. このような配置を $T^{(k+3)/2}I_{n+1}^{(-m)} + T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)}$ と表すことにする. この配置より $T^{(k+3)/2}I_{n+1}^{(-m)} \cap S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られ, $p/(k+2) \in I_{n+1}^{(-m)}$ が示された.

[2-2] p が奇数で k が偶数.

仮定より, $T^{k/2}I_n^{(-m)} \cap S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られる. また $T^{(k+2)/2}I_{n+1}^{(-m)} + T^{k/2}I_n^{(-m)}$ より, $T^{(k+2)/2}I_{n+1}^{(-m)} \cap S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意は示された.

[2-3] p が偶数で k が奇数.

仮定より $T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)} \cap S_{3-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られる. また $T^{(k+3)/2}I_{n+1}^{(-m)} + T^{(k+1)/2}I_n^{(-m)}$ より, $T^{(k+3)/2}I_{n+1}^{(-m)} \cap S_{3-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意は示された.

[2-4] p と k が共に偶数.

仮定より $T^{k/2}I_n^{(-m)} \cap S_{1-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られる. また $T^{(k+2)/2}I_{n+1}^{(-m)} + T^{k/2}I_n^{(-m)}$ より, $T^{(k+2)/2}I_{n+1}^{(-m)} \cap S_{1-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意は示された. Q.E.D.

定理 2 区間 $K_n^{(-m)}$, $L_n^{(-m)}$ に生じる SNBO の出現に対して次の順序関係が成立する. 但し $K_n^{(-m)}$ に対しては $0 \leq p \leq (2m+1)$ であり, 区間 $L_n^{(-m)}$ に対しては $0 \leq p \leq 2m$ である.

$K_0^{(-m)}, L_0^{(-m)}$:	$p/2$	\rightarrow	$p/3$	\rightarrow	$p/4$	\rightarrow	$p/5$	\rightarrow
	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
$K_1^{(-m)}, L_1^{(-m)}$:	$p/4$	\rightarrow	$p/5$	\rightarrow	$p/6$	\rightarrow	$p/7$	\rightarrow
	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
$K_2^{(-m)}, L_2^{(-m)}$:	$p/6$	\rightarrow	$p/7$	\rightarrow	$p/8$	\rightarrow	$p/9$	\rightarrow
	\downarrow		\downarrow		\downarrow		\downarrow	

証明式 (39) と (40) が p に対する制限を決める. 次に, $K_n^{(-m)}$ における SNBO の順序関係を証明する. $L_n^{(-m)}$ の SNBO に関しても同様に証明できる.

(1) $K_n^{(-m)}$: $p/k \rightarrow p/(k+1)$ ($k \geq 2n+2$) の証明.

[1-1] p と k が共に奇数.

仮定 $p/k \in K_n^{(-m)}$ は $T^{(k-1)/2}K_n^{(-m)} \cap S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ を意味する. これらの交点を写像すると, ねじれ性より $S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)}$ の左側に移る. よって $T^{(k+1)/2}K_n^{(-m)} \cap S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られ, $p/(k+1) \in K_n^{(-m)}$ が示された.

[1-2] p が奇数で, k が偶数.

仮定より $T^{k/2}K_n^{(-m)} \cap S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が成立する. 対称線 $S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)}$ と $S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)}$ の位置関係より, $T^{k/2}K_n^{(-m)} \cap S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意が示された.

[1-3] p が偶数で, k が奇数.

仮定より $T^{(k-1)/2}K_n^{(-m)} \cap S_{1-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が成立する. 交点はねじれ性より $S_{3-}^{-(m-p/2)}$ の左側に写像される. この結果 $T^{(k+1)/2}K_n^{(-m)} \cap S_{3-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意が示された.

[1-4] p と k が共に偶数.

仮定より $T^{k/2}K_n^{(-m)} \cap S_{3-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が成立する. よって $T^{k/2}K_n^{(-m)} \cap S_{1-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意が示された.

(2) $p/k \in K_n^{(-m)} \rightarrow p/(k+2) \in K_{n+1}^{(-m)}$: ($k \geq 2n+2$) の証明.

[2-1] p と k が共に奇数.

仮定より $T^{(k-1)/2}K_n^{(-m)} \cap S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が成立する. また $T^{(k+1)/2}K_{n+1}^{(-m)} + T^{(k-1)/2}K_n^{(-m)}$ も成立するから, $T^{(k+1)/2}K_{n+1}^{(-m)} \cap S_{2-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られ, $p/(k+2) \in K_{n+1}^{(-m)}$ が示された.

[2-2] p が奇数で k が偶数.

仮定より $T^{k/2}K_n^{(-m)} \cap S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が成立する. また $T^{(k+2)/2}K_{n+1}^{(-m)} \cup T^{k/2}K_n^{(-m)}$ も成立する. よって $T^{(k+2)/2}K_{n+1}^{(-m)} \cap S_{4-}^{-(m-(p-1)/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意は示された.

[2-3] p が偶数で k が奇数.

仮定より $T^{(k-1)/2}K_n^{(-m)} \cap S_{1-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が成立する. また $T^{(k+1)/2}K_{n+1}^{(-m)} \cup T^{(k-1)/2}K_n^{(-m)}$ も成立する. よって $T^{(k+1)/2}K_{n+1}^{(-m)} \cap S_{1-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意は示された.

[2-4] p と k が共に偶数.

仮定より $T^{k/2}K_n^{(-m)} \cap S_{3-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が成立する. また $T^{(k+2)/2}K_{n+1}^{(-m)} \cup T^{k/2}K_n^{(-m)}$ が成立する. よって $T^{(k+2)/2}K_{n+1}^{(-m)} \cap S_{3-}^{-(m-p/2)} \neq \emptyset$ が得られ, 題意は示された. Q.E.D.

ここで $DO_{R(-m)}^p$ と $DO_{R(-m)}^p(i, j)$ ($R = I, J, K, L$) の記号を導入する. ここで p は回転数の分子を表す. 前者は順序関係そのものを表し, 後者は順序関係の (i, j) 成分を表す. ただし $I^{(-m)}$, $J^{(-m)}$ に対しては $i \geq 1, j \geq 1$ であり, $K^{(-m)}$ ならびに $L^{(-m)}$ に対しては $i \geq 0, j \geq 1$ である.

4.2.2 臨界値の漸近

数値計算で得られた臨界値 $a_c(1/(2i+j) \in I_i^{(0)})$ を Fig. 5 に 3次元プロットで示す. Fig. 5 で, 最大値が示している臨界値は $a_c(1/3 \in I_1^{(0)})$ である. i または j を増加させるにつれて臨界値は減少する. i を固定し j を増加させた場合, 臨界値はそれぞれの区間が発生する臨界値に集積する (式 (36) を参照). j を固定し i を増加させた場合も, 臨界値はある値に集積する. 最初に j が奇数の列を考える. この場合, p_i は V の中にあり, $p_{i+(j+1)/2}$ は $S_{4-}^{(0)}$ 上にある. $a_c(1/(2i+j) \in I_i^{(0)})$ の漸近する値は, $T^{(j+1)/2}\gamma_u$ が $S_{4-}^{(0)}$ と接する臨界値である. この接触によって周期が無限に長い SNBO が生じる. j が偶数の列において, $a_c(1/(2i+j) \in I_i^{(0)})$ の漸近する値は, $T^{j/2}\gamma_u$ が $S_{2-}^{(0)}$ と接する臨界値である. これらの2つの臨界値の詳細は省略する. Fig. 6 に得られた臨界値 $a_c(I_i^{(0)})$ と $a_c(K_i^{(0)})$ は $i \gg 1$ は i に関してべき関数的に減少することが分かる.

$$a_c(I_i^{(0)}), a_c(K_i^{(0)}) \propto \frac{1}{i^\alpha} \quad (\alpha = 0.93). \quad (43)$$

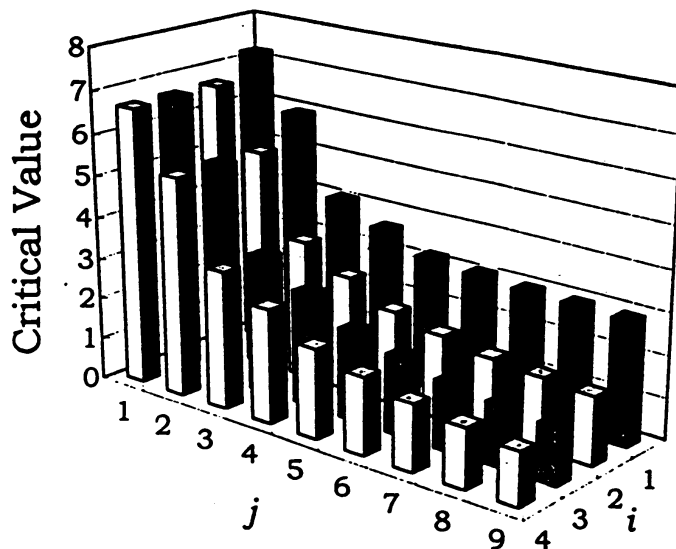


Fig. 5. 臨界値 $a_c(1/(2i+j) \in I_i^{(0)})$ の 3次元プロット.

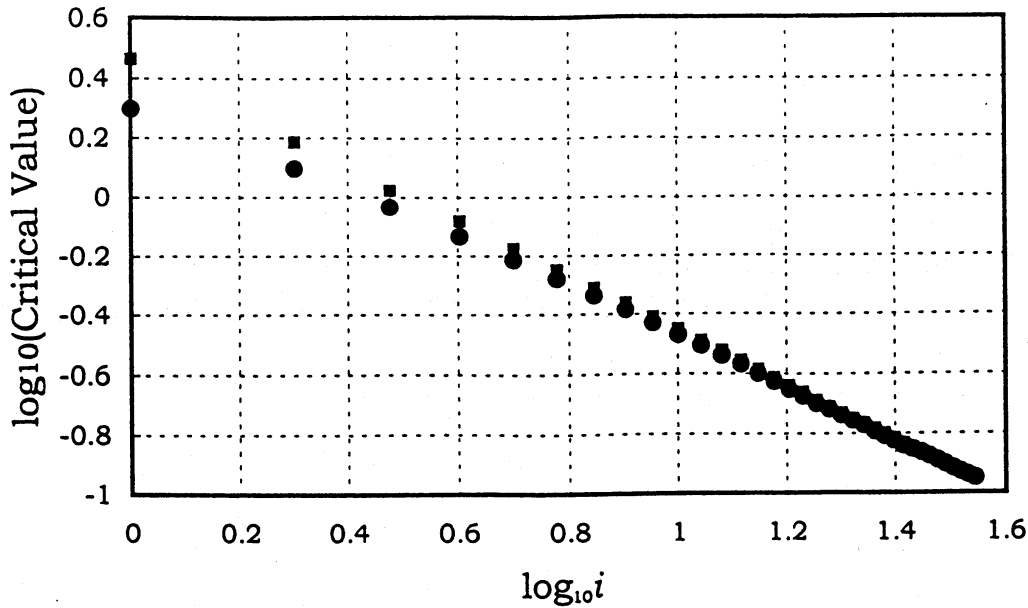


Fig. 6. 臨界値 $a_c(I_i^{(0)})$ (四角) と $a_c(K_i^{(0)})$ (丸) の i 依存性.

5 組み紐

ここでは順序関係 $DO_{I_3^{(0)}}^1$ における SNBO の軌道の情報から組み紐を構成する. 順序関係の SBNO で周期が奇数 $q = 2i + j$ ($j = 2k + 1, k \geq 0, i \geq 1$) の軌道は, 対称性を利用して4つのブロック A, B, C, D に分けられる.

$$\begin{aligned} A &= \{p_0, \dots, p_{i-1}\}, & B &= \{p_i, \dots, p_{i+k}\}, \\ C &= \{p_{i+k+1}, \dots, p_{i+2k+1}\}, & D &= \{p_{i+2k+2}, \dots, p_{2i+2k}\}. \end{aligned}$$

対称性より $A \setminus \{p_0\} = GD$ 並びに $B = GC$ が成立する.

Fig. 7 には区間 $I_3^{(0)}$ を出発する回転数 $\nu = 1/9$ の SNBO の軌道が描かれている. この軌道は $A = \{p_0, p_1, p_2\}$, $B = \{p_3, p_4\}$, $C = \{p_5, p_6\}$ と $D = \{p_7, p_8\}$ の4つのグループに分けられる. A は W_u^1 の左に位置し, C は W_u^1 の右に位置する. ここでは不安定多様体の進行する方向から見て左右を決めている. $S_2^{(0)}$ に関する対称性より, B は W_s^1 の右に, そして D は W_s^1 の左に位置する. 一般の場合の配置は Fig. 8(a) に描かれている. A, B, C, D の中の点に関して, 次の関係 1-5 が満たされていることに注意する.

関係 1 : B, C の中には引き返し点が1つある.

関係 2 : A と D の点に関して次の不等式が成立する.

$$\pi_1(p_m) < \pi_1(p_{m'}) \quad (0 \leq m < m' \leq i-1, i+2k+2 \leq m < m' \leq 2i+2k), \quad (44)$$

関係 3 : A と C の点に関して次の不等式が成立する. 互いに対応する点がない場合もある.

$$\pi_1(p_{i-1}) < \pi_1(p_{i+2k+1}), \quad (45)$$

$$\pi_1(p_{i-2}) < \pi_1(p_{i+2k}), \quad (46)$$

....

関係 4 : B と D の点に関して次の不等式が成立する. 互いに対応する点がない場合もある.

$$\pi_1(p_i) < \pi_1(p_{i+2k+2}), \quad (47)$$

$$\pi_1(p_{i+1}) < \pi_1(p_{i+2k+3}), \quad (48)$$

...

関係5 : B の各点の x -座標は, C のすべての点の x -座標より大きい.

関係2は A と D 中の点列は順序保存であることに対応している. 式(49)は p_{i-1} がホモクリニック点 $T^{-1}v$ の左にあり, p_{i+2k+1} がホモクリニック点 $T^{-1}v$ の右にあることより導かれる. 他の不等式も同様に得られる. 関係4は対称性より関係3より得られる. G に関する対称性より関係5が成立する.

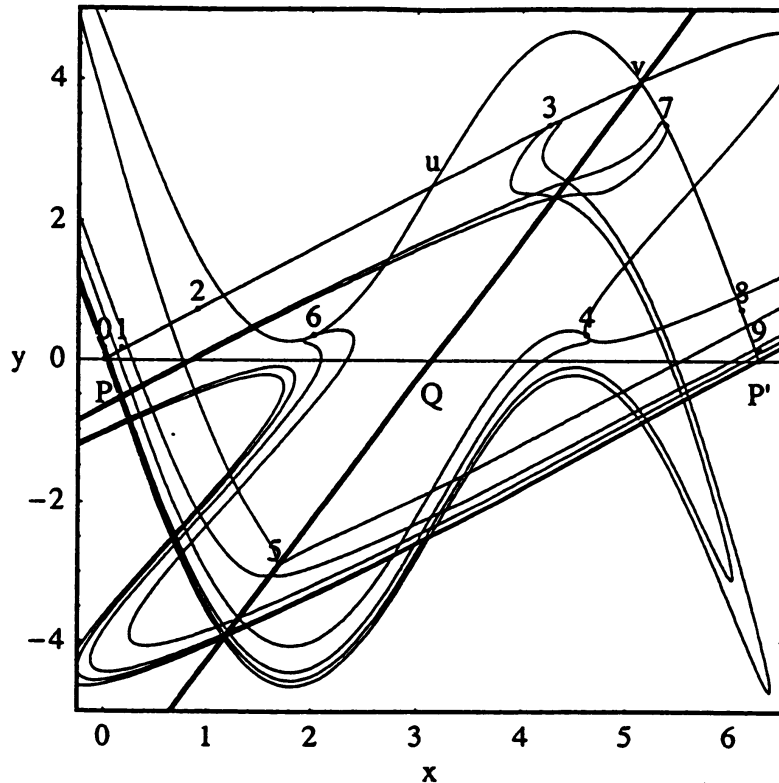


Fig. 7. 区間 $I_3^{(0)}$ を出発する回転数 $\nu = 1/9$ のSNBOの軌道. 整数 k は p_k の略記号である. 安定多様体と不安定多様体も描かれている.

周期軌道において x -座標のみに注目し軌道の順序関係を構成しよう. 上記の関係をみだし, かつ p_i と p_{i+k+1} が引き返し点であるように, 軌道の順序関係を1次元の列に並べたものを基本順序関係と呼ぶ (Fig. 8(b)). 奇数周期に対する軌道の順序 $O_o(i, j)$ は次のように得られる.

$$O_o(i, j) = (A \uparrow C \downarrow B \downarrow D). \quad (49)$$

ここで (i, j) は $DO_{I_3}^1$ の成分を表わす. ここでは参考のために不安定多様体等の位置を入れてある. 記号 \uparrow は W_u^1 の位置を, 記号 \downarrow は $S_2^{(0)}$ の位置を, そして記号 \downarrow は W_s^1 の位置を表す.

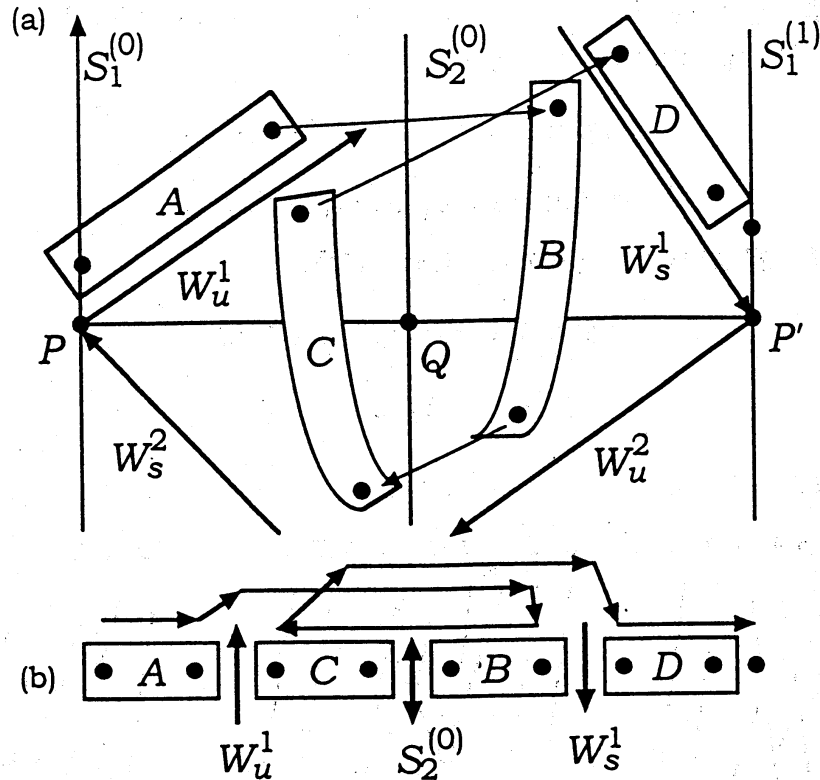


Fig. 8. (a) A, B, C, D の配置. (b) A, B, C, D を 1 次元の列に並べた基本順序関係.

Fig. 7 の基本順序関係は

$$O_o(3, 3) = (012654378). \quad (50)$$

関係 1-5 を満たす順序関係はこれ以外に 2 つある.

$$O'_o(3, 3) = (012563478), \quad (51)$$

$$O''_o(3, 3) = (015263748). \quad (52)$$

関係 3 と 4 より, $O''_o(3, 3)$ の 1 と 5, 4 と 8 を入れ替えることはできない. Fig. 7 に対応している順序関係は $O'_o(3, 3)$ である. この順序関係は基本順序関係と異なっている. これについては後で議論する.

軌道の順序関係より, 組み紐を構成する. 回転数 $\nu = 1/q$ の SNBO の組み紐の構成方法を紹介する. 最初のステップは 0 番から $(q-1)$ 番までの紐の構成である. 次のステップは $(q-1)$ 番から 0 番までの紐の構成である. 構成のルールを次に示す.

- [1] 第 1 ステップのルール. 2 つの紐が交差するとき追い越す紐が追い越される紐の下を通過する.
- [2] 第 2 ステップのルール. $(q-1)$ 番から 0 番への紐はすべての紐の下を通過する.

最初のルールは写像のねじれ性を意味する. また第 2 のルールは回転数 $\nu = 1/q$ の円筒面の回転を意味する. 周期軌道であることより紐は出発点に戻らなければならない.

$O_o(3, 3)$ より構成された組み紐が Fig. 9(a) である. 組み紐の生成元を利用すると, この組み紐は次のように表せる.

$$\beta(3, 3) = \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_6^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \zeta_9. \quad (53)$$

ここで $\zeta_9 = \sigma_8 \cdots \sigma_1$.

$O'_0(3,3)$ より構成された組み紐が Fig. 9(b) であり, $O''_0(3,3)$ より構成された組み紐が Fig. 9(c) である. これらの組み紐は次のように表せる.

$$\beta'(3,3) = \sigma_6^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_6^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \zeta_9, \quad (54)$$

$$\beta''(3,3) = \sigma_7^{-1} \sigma_6^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \zeta_9. \quad (55)$$

これらの3つの組み紐は Markov 変形で互いに移りあう.

$$\beta'(3,3) = \sigma_4 \sigma_6^{-1} \beta(3,3) \sigma_4^{-1} \sigma_6, \quad (56)$$

$$\beta''(3,3) = \sigma_3 \sigma_7^{-1} \beta'(3,3) \sigma_3^{-1} \sigma_7. \quad (57)$$

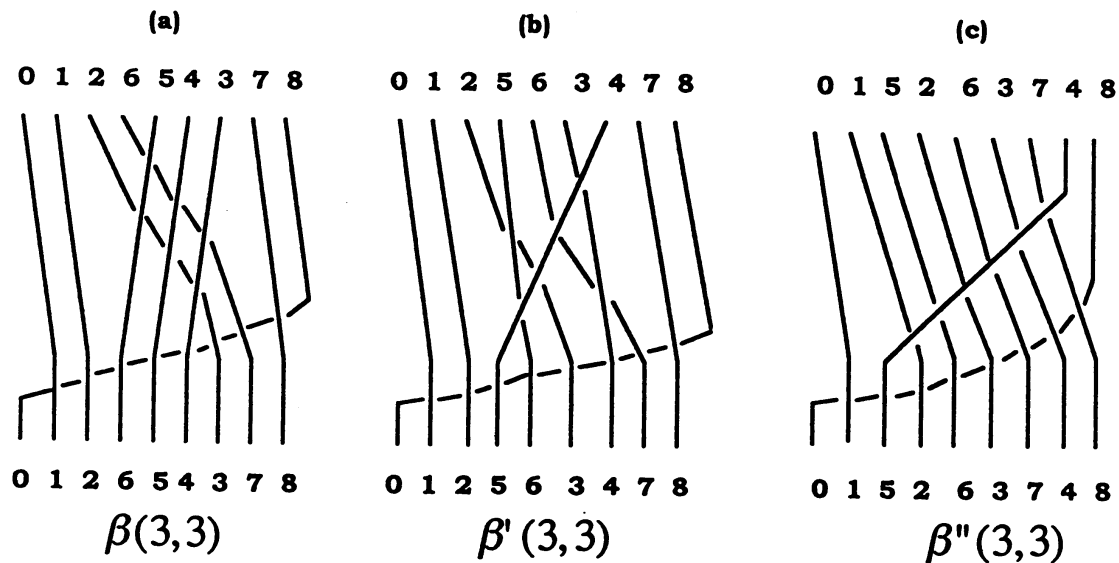


Fig. 9. 3つの順序関係から構成される組み紐. ここで整数 i は p_i の略記号.

ここでは $\beta''(3,3)$ を $\beta'(3,3)$ より構成する. $\beta'(3,3)$ の4と7の紐を入れ替える. 組み紐の上部で, 7から8への紐が4から5への紐を追い抜く. この結果, 交差が増える. $\beta'(3,3)$ の左に σ_7^{-1} を追加する. 下部で, 3から4への紐は6から7への紐とは交差しない. よって $\beta'(3,3)$ における交差を解消するために $\beta'(3,3)$ の右に σ_7 を追加する. 対称性より σ_3 と σ_3^{-1} を $\beta'(3,3)$ の左右に追加する. こうして得られた $\beta''(3,3)$ は, $\beta'(3,3)$ と Markov 変形のもとで同値な組み紐である. 次に, 関係 [3] と [4] を満たさない入れ替えを考える. $\beta(3,3)$ において, 3と7の紐を入れ替える. 対称性より2と6の紐も入れ替える. 入れ替え後の順序関係は (016254738) となり, 組み紐は $\sigma_7^{-1} \beta(3,3) \sigma_3^{-1}$ となる. 新しい組み紐の交差数は, もとの組み紐の交差数と異なる. よって $\beta(3,3)$ とは異なった組み紐であることが分かる. 以上より関係 [1]-[5] のもとで構成される順序関係で, 最も構成が用意である基本順序関係を利用し組み紐を構成する.

基本順序関係を構成する方法を紹介する. B と D は $W_3^!$ の左右にある. ここでは安定多様体が y -軸に, 不安定多様体が x -軸になる変換を考え, 適当な射影を考えれば基本順序関係が構成できる. 次にいくつかの例を示す.

$$O_0(1,1) = (021), \quad O_0(1,3) = (04321), \quad (58)$$

$$O_0(2,1) = (01324), \quad O_0(2,3) = (0154326). \quad (59)$$

偶数周期 $q = 2i + j$ ($j = 2k, k \geq 1$) の SNBO の軌道の点に関しても下記のように分割できる.

$$O(i, j) = (A \uparrow C(i \hat{+} k) B \downarrow D). \quad (60)$$

この式で記号 $(i \hat{+} k)$ は p_{i+k} が $S_2^{(0)}$ の上にあることを意味している.

$$\begin{aligned} A &= \{p_0, \dots, p_{i-1}\}, & B &= \{p_i, \dots, p_{i+k-1}\}, \\ C &= \{p_{i+k+1}, \dots, p_{i+2k}\}, & D &= \{p_{i+2k+1}, \dots, p_{2i+2k-1}\}. \end{aligned}$$

例を示す.

$$O_e(1, 2) = (03\hat{2}1), \quad O_e(1, 4) = (054\hat{3}21), \quad (61)$$

$$O_e(2, 2) = (014\hat{3}25), \quad O_e(2, 4) = (01654\hat{3}27). \quad (62)$$

$O_0(2, 3)$ ならびに $O_0(2, 4)$ より構成された組み紐を示す.

$$\begin{aligned} \beta(2, 3) &= \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1, \\ &= \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \beta(2, 4) &= \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_6^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_7 \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1, \\ &= \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_6 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \cdot \sigma_7^{-1}. \end{aligned} \quad (64)$$

各々の組み紐の式で 2 番目の式を得るために, 最初の式に対して Reidemeister 変形と Markov 変形 [29] を行った.

一般の $O(i, j)$ に対する組み紐の表式は次のように得られる.

$$\beta(i, j) = \zeta_{j+1}^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \zeta_{2i+j} \quad (65)$$

ここで $\rho_{2i} = \sigma_1 \cdots \sigma_{2i-1}$, $\zeta_{2i} = \sigma_{2i-1} \cdots \sigma_1$, $\zeta_{2i+j}^{-1} = \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{2i+j-1}^{-1}$.

Boyland [9,10] が研究した組み紐と, ここで導出した組み紐 $\beta(i, j)$ の相違について述べる. $\zeta_{j+1}^{-1} \rho_{j+1}^{-1}$ は, 第 1 の紐を第 2 から第 $j+1$ 番目の紐の後方を通し, 次にこれらの前を通過してもとに戻すことを表している. この部分が Non-Birkhoff 型の特徴である. 次に ζ_{2i+j} は, 紐全体が回転数 $\nu = 1/(2i+j)$ だけねじられていることを示している. これは Birkhoff 型周期軌道の組み紐を表している. $\beta(j, 1)$ は Boyland による組み紐と同じ構成である. これら以外の組み紐は Boyland の組み紐の拡張に相当する.

6 位相エントロピー

順序関係 $DO_{I(0)}^1$ の SNBO から構成される組み紐を利用して位相エントロピーを評価する.

位相エントロピーの下限 $h(\beta)$ は, 既約 Burau 行列表示の固有値 λ_i の絶対値の最大値 $\lambda_{max} (= \text{Max}(|\lambda_i|))$ で評価される [30,31].

$$h(\beta) = \ln \lambda_{max}. \quad (66)$$

3 次の組み紐の場合, $t = -1$ と置いた既約 Burau 行列表示が λ_{max} を与える [11]. 4 次以上の場合は数値計算が必要である. 実際の計算は MATHEMATICA [32] によって既約 Burau 表現を構成し, その固有値を計算した [付録を参照]. Fig. 10 は, 固有値の絶対値の $\theta (t = \exp(i\theta), 0 \leq \theta < 2\pi)$ 依存性を調べた計算結果である.

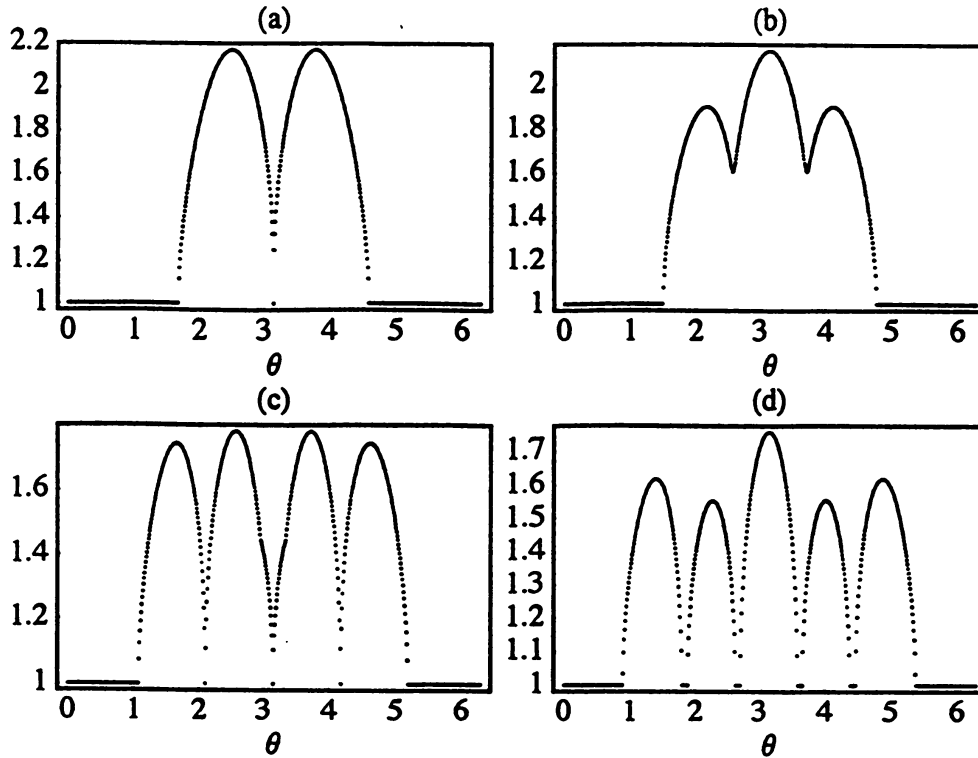


Fig. 10. $\text{Max}(|\lambda_i|)$ の角度 θ 依存性. (a) $1/4 \in I_1^{(0)}$, (b) $1/5 \in I_1^{(0)}$, (c) $1/6 \in I_2^{(0)}$, (d) $1/7 \in I_2^{(0)}$.

我々は数値計算より次のことを確認した。

数値計算の結果、 $\text{DO}_{j^{(0)}}^1$ の奇数周期に対する既約 Burau 行列表示の λ_{\max} は、 $t = -1$ に対する固有方程式の実根の絶対値の最大として得られる。

この結果は偶数周期については成立しない。よって以下では奇数周期の固有方程式のみを調べる。

$\text{DO}_{j^{(0)}}^1$ の第 1 行目の $(1, j)$ 成分に対する固有方程式は次のように得られる。この結果を得るために必要なプログラムも付録にある。

$$\lambda^{j+1} + 3 \sum_{k=1}^j (-\lambda)^k + 1 = \frac{(\lambda - 2)(\lambda^{2j} - 2) - 3}{\lambda + 1} = 0. \quad (67)$$

ここで $j (\geq 1)$ は奇数である。極限 $j \rightarrow \infty$ では、 $\lambda_{\max} = 2$ に漸近していく。

$j > i$ を満たす (i, j) 成分の固有方程式は次のように得られる。

$$\sum_{k=0}^{2i-2} (2k+1)(-\lambda)^k + (4i-1) \sum_{k=2i-1}^j (-\lambda)^k + \sum_{k=j+1}^{2i+j-1} (4i+2j-2k-1)(-\lambda)^k = 0. \quad (68)$$

我々は、 $i, j \rightarrow \infty$ の極限における位相エントロピーの減少の仕方に興味がある。そのため $j \rightarrow \infty$ として、式 (68) で最も発散の強い項を集め、それらをゼロと置く。

$$\lambda^{2i-1}(\lambda - 1) = 2. \quad (69)$$

次に $j < i$ の場合の固有方程式は

$$\sum_{k=0}^{j-1} (2k+1)(-\lambda)^k + (2j+1) \sum_{k=j}^{2i-1} (-\lambda)^k + \sum_{k=2i}^{2i+j-1} (4i+2j-2k-1)(-\lambda)^k = 0. \quad (70)$$

と得られ, $i \rightarrow \infty$ の極限を考え

$$(-\lambda)^j(1-\lambda) = 2. \quad (71)$$

を得る. $j = 2i - 1$ を満たす行と列の極限の位相エントロピーの値は同じである. ここで極限 $i, j \rightarrow \infty$ を考える. そのために $\lambda = 1 + \epsilon (\epsilon > 0)$ と置く. $\epsilon \ll 1$ より, $h \approx \epsilon$ が成立する. $k = 2i - 1$ とおいて, 式 (69) は以下のように書ける.

$$k \ln(1 + \epsilon) = \ln(2/\epsilon) \quad (72)$$

$k \rightarrow \infty$ の極限における位相エントロピー \hat{h} は次式で得られる.

$$\hat{h} = \frac{\ln(2k)}{k} + O\left(\frac{\ln(\ln(2k))}{k}\right). \quad (73)$$

この結果は Fig. 11 の数値計算の結果と一致している.

$i \rightarrow \infty$ かつ $j \rightarrow \infty$ の極限は, $a \rightarrow 0$ つまり積分可能系への漸近と対応している. 式 (73) は積分可能系へ漸近するに従い, 位相エントロピーがゼロに収束することを意味している. また $a > 0$ では系が pseudo-Anosov[33] であることも表している. 式 (43) と (73) を一緒にして, $a \rightarrow 0$ での位相エントロピーの減少の仕方が分かる.

$$h \propto \frac{\ln(1/a)}{(1/a)^{1/\alpha}}. \quad (74)$$

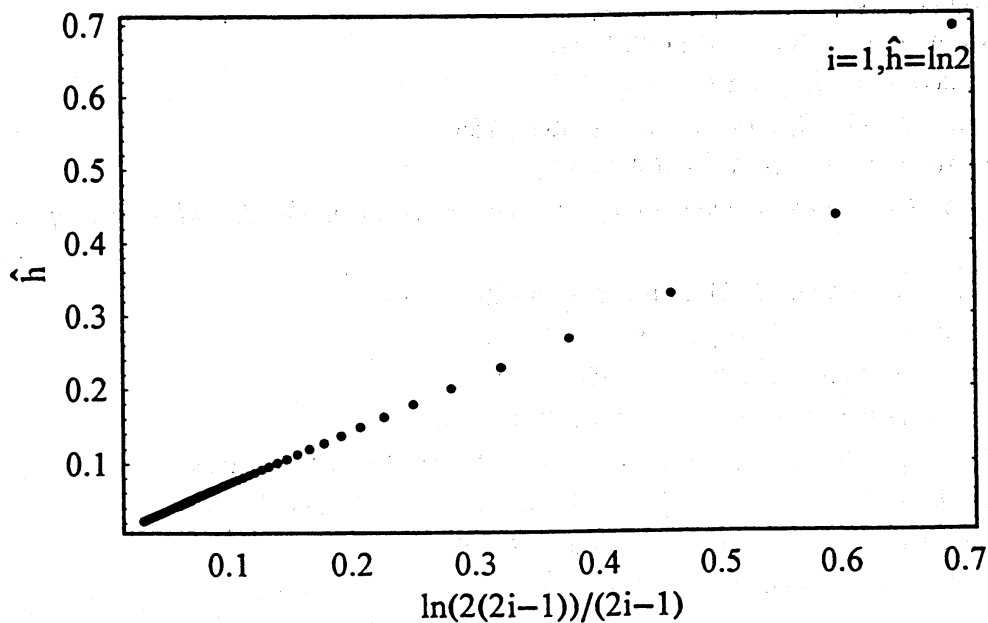


Fig. 11. 位相エントロピー \hat{h} .

7 今後の課題

(1) 下記に挙げた Non-Birkhoff 型周期軌道に対する順序関係を明らかにし, それらより評価される位相エントロピーを調べる必要がある.

- [1] 引き返し点数が $2n$ ($n \geq 2$) の後退型 Non-Birkhoff 周期軌道.
- [2] 追い越し型 Non-Birkhoff 周期軌道.
- [3] 対称線を通過しない Non-Birkhoff 型周期軌道.

- (2) 対称線を通過しない Non-Birkhoff 型周期軌道の生じ方の解明. 周期が3の対称線を通過しない Non-Birkhoff 型周期軌道については, 対称な Non-Birkhoff 型周期軌道の等周期分岐または偶数個のサドル・ノード分岐によって生じることが分かっている. この事実が, 周期が長い軌道に関して成立しているかどうか現時点では分かっていない.
- (3) KAM 曲線の崩壊を議論するためには, 追い越し型 Non-Birkhoff 型周期軌道の性質を明らかにする必要がある.
- (4) 左右の対称性が存在しない系における Non-Birkhoff 型周期軌道の出現順序関係の導出. 対称性を破る摂動が小さければ, 我々が得た順序関係は成立すると思われる.
- (5) 組み紐の構造から Non-Birkhoff 型周期軌道の出現順序関係の導出. これは, 我々が行った方法の逆のアプローチである.
- (6) 多くの系で同様の順序関係 (定理 1,2) が得られている. この中には1次元円写像の系も含まれる [34]. これらの系には「局所的な運動と, 大域的な運動が混在する」という共通な性質がある. 混在の仕方が系の位相エントロピーの大小を決めているのではないだろうか. 順序関係のもつ普遍性の議論は今後の課題である.

参考文献

- 1) K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem* (Springer, 1991).
- 2) G. D. Birkhoff, *Acta. Math.* **43** (1920), 44.
- 3) J. Mather, *Publ. I. H. E. S.*, **83** (1986), 153.
- 4) A. Katok, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **2** (1982), 185.
- 5) M. R. Herman, *Astérisques*, **103-104** (1983).
- 6) P. Le Calvez, *Dynamical Properties of Diffeomorphisms of the Annulus and of the Torus* (AMS, 2000).
- 7) G. R. Hall, *Ergod. Theor. & Dynam. Sys.* **4** (1984), 585.
- 8) P. Boyland and G. R. Hall, *Topology* **26** (1987), 21.
- 9) P. L. Boyland, *Contemp. Math.* **81** (1988), 119.
- 10) P. Boyland, *Topology and its Appl.* **58** (1994), 223.
- 11) Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **104** (2000), 943.
- 12) Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **106** (2001), 691.
- 13) K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, *Chaos* **12** (2002), 33.
- 14) Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* (to appear).
- 15) Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **106** (2001), 1097.
- 16) A. Sharkovskii, *Ukr. Mat. Z.* **16** (1964), 61.
- 17) L. Alsedà, J. Llibre and M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One* (World Scientific, 1993).
- 18) T. Matsuoka, in *Dynamical System 1* (World Scientific, 1986), p. 58; *Contemp. Math.* **152** (1993), 229. See also *物性研究* **67** (1996), 1.
- 19) S. Baldwin, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **11** (1991), 249.
- 20) M. Handel, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **17** (1997), 593.
- 21) J. Los, *Publ. I.H.E.S.* (1997), 5.
- 22) I. Leage and R. S. Mackay, *Phys. Lett. A* **118** (1986), 274.

- 23) R. de Vogelaere, in *Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations* Vol.IV (Princeton University Press, 1957).
- 24) K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, *J. Math. Phys.* **28** (1987), 921: **30** (1989), 608.
- 25) V.F.Lazutkin, I.G.Schachmannski and M.B.Tabanov, *Physica D*, **40** (1989), 235.
- 26) S. Wiggins, *Chaotic Transport in Dynamical Systems* (Springer-Verlag, 1991).
- 27) Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000), 1127.
- 28) J. Palis and W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems* (Springer, 1982).
- 29) S. Moran, *The Mathematical Theory of Knots and Braids* (North-Holland, 1983).
- 30) D. Fried, in *Geometric Dynamics*. ed. J. Palis Jr. *Lecture Notes in Mathematics* **1007** (Springer-Verlag, 1983). p. 261.
- 31) B. Kolev, *C. R. Acad, Sci. Paris*, **309**, Ser. I (1989), 835.
- 32) S. Wolfram, *THE MATHEMATICA BOOK*, Fourth Edition (Cambridge University Press, 1999).
- 33) A. J. Casson and S. A. Bleiler, *Automorphisms of Surface after Nielsen and Thurston* (Cambridge University Press, 1988).
- 34) Y. Yamaguchi and K. Tanikawa (Submitted to *Prog. Theor. Phys.*).

付録 MATHEMATICA のプログラム

サンプルプログラムは、組み紐型 $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$ の固有値を計算する。

(* 第1ブロック 組み紐の次数 (n) の入力, 角度の分割数 (ma) の入力 *)

n = 4;

ma = 360;

(* 第2ブロック s[1] - s[n - 1] , is[1] - is[n - 1] の構成*)

Clear[t];

nn = n - 1; m = 1; v = {0};

Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];

Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];

d[m] = ReplacePart[d[m], -t, m];

d[m] = ReplacePart[d[m], 1, m + 1];

s[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}];

m = 1; v = {0};

Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];

Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];

d[m] = ReplacePart[d[m], -1/t, m];

d[m] = ReplacePart[d[m], 1/t, m + 1];

is[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}];

Do[v = {0};

Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];

Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];

d[m] = ReplacePart[d[m], t, m - 1];

d[m] = ReplacePart[d[m], -t, m];

```

d[m] = ReplacePart[d[m], 1, m + 1];
s[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}], {m, 2, nn - 1}];
Do[v = {0};
  Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
  Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];
  d[m] = ReplacePart[d[m], 1, m - 1];
  d[m] = ReplacePart[d[m], -1/t, m];
  d[m] = ReplacePart[d[m], 1/t, m + 1];
  is[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}], {m, 2, nn - 1}];
m = nn; v = {0};
Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];
d[m] = ReplacePart[d[m], t, m - 1];
d[m] = ReplacePart[d[m], -t, m];
s[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}];
m = nn; v = {0};
Do[v = Append[v, 0], {k, 1, nn - 1}];
Do[d[i] = ReplacePart[v, 1, i], {i, 1, nn}];
d[m] = ReplacePart[d[m], 1, m - 1];
d[m] = ReplacePart[d[m], -1/t, m];
is[m] = Table[d[k], {k, 1, nn}];
(* 第3ブロック 組み紐型の入力 *)
b = s[1].is[2].is[3];
(* 第4ブロック 固有値の計算 *)
Do[
  theta = 2Pi/ma*k;
  t = Cos[theta] + I*Sin[theta];
  gg = Eigenvalues[N[b]];
  Do[e[i] = Abs[Part[gg, i]], {i, 1, nn}];
  y[k] = Max[Table[e[k], {k, 1, nn}]];
  x[k] = N[theta], {k, 0, ma};
(* 出力 *)
g1 = Table[{x[k], y[k]}, {k, 0, ma}];
ListPlot[g1, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}];
gg = Table[y[k], {k, 0, ma}];
Max[gg]

```

$t = -1$ の場合の固有方程式を出力するためには、第4ブロックを削除し次のプログラムを利用する。

```

(* 固有方程式:  $f(x) = 0$ . 出力  $f(x)$ . *)
t = -1; Det[b - x*IdentityMatrix[n - 1]]

```