

複素エノン写像における不変円

立命館 総合理工学研究機構

黒崎 暁¹

1 はじめに

本稿はエノン写像の相空間が複素数に拡張された力学を考える。どうして複素相空間なのか?少し弱い、力学系への興味からは実数より一般的な複素数について調べる方が見通しがよくなっていいのは当然ではある。本論では力学系的興味で閉じてしまうが、一般的な視野からは近可積分系でわざわざ複素相空間を調べることの意義は近可積分系の量子古典対応を考えるとき強く出て来る。近可積分系では不変トーラス上の規則的な運動とカオスとが共存しており、特に2自由度の系では軌道はトーラスを越えることができず、力学的に障壁ができ、トーラスの向こう側に古典的禁止領域をつくる。一方量子力学では禁止領域にまで確立振幅の浸みだしがあり、これは例えば標準写像のような近可積分系の代表的なモデルでも観測されている [1] [2]。古典カオスのある系では確立振幅の浸みだしに複雑な構造が見られ、可積分系に見られる指数関数の単調で速やかな減衰と異なるのだが、これが首藤・池田両氏により半古典論で調べられた [3]。古典力学での禁止領域についてもプロパゲータの停留位相近似を考えるので、実軌道による寄与は当然なく、複素古典力学の軌道が物理的に寄与する候補になる。この候補から物理的に寄与するものを選んで構成された、半古典的な波動関数は禁止領域への浸みだしの複雑な構造をよく再現することが示された。この寄与する複素古典軌道の候補の初期値を視覚化したもの (M-集合) は大変きれいで、近可積分系の複素相空間のリッチさが印象づけられる。

相空間構造を理解する基本的な方法は、周期点なり、不変円なりの代表的な不変集合の一つを局所的にパラメタについて系統的に調べることである。近可積分系は非双曲的で、実の力学にしる複素の力学にしる、その非双曲性が最も明確に現れるのは不変円の周辺と考えられる。複素相空間での不変円が実力学のそれと同様の性質を持つか否か、少なくとも数値計算レベルでそのことは確立しておくべきで、それが本稿の最初の目的である。とくに、実平面上の力学の場合、滑らかな不変円は近傍軌道にスケールの異なる長さの安定時間を与える要因になり [4]、このことの複素相空間での対応は重要である。本稿のほとんどは複素相空間で不変円を調べるための技術的な点についてのものだが、最後に安定時間について議論する。

文献 [12] 以来、複素相空間の不変円これまで調べられているのは、実平面上の不変円の共役関数の解析接続で得られるものである。複素の不変円はこれしかないわけではない。以下、導入部の残りは停留点集合の断面を見ながら、どのような複素不変円について調べるか述べる。

図 (1-a) は数値計算で得た停留点集合 K のある断面 (複素対称線 $\text{Fix}(\text{TS})$ によるもの) と、いくつかの symmetric な周期点を示す。対称線, symmetry については、2-2 節で簡単に説明する。図 (1-a) のそれぞれの周期点は、それが実面にあったときの回転数で特徴づけられる。これらの周期点が、その回転数の大きさの順に停留点集合 K に沿って並んでいる曲線を考えることができ、それは大雑把に言って K の端から始まり、実面の楕円型不動点 $x = y = 1 - \sqrt{1+c}$ ($-1 < c < 3$) にいたる。

¹2002 年 4 月現在 立命館 理工学部 物理 池田研 居候

パラメタを変化させると、実面の楕円型不動点の回転数に合わせて、この複素の周期点の列は実面へ順番に送り出される。図 (1-b) はエノン写像のパラメタ $c = 1.9142$ での実面近くの滞留点集合を示し、この c の値は不動点の回転数が丁度 $3/8$ になる値の直下になる。図 (1-a) に比べて、回転数 $3/8$ の周期点がよく発達した滞留点集合を従えて実面直上にまで移動しているのが見える。典型的な短い周期の周期点はこのような放射状によく発達した K 集合を伴う。また、周期点の列の順番は保たれている。この複素の周期点の列は、面積保存写像の周期点の分岐を記述する標準系 (バーコフ級数に最低次の共鳴を取り込んだもの、2-1 節参照) でいうと [6]、その作用変数が負の平衡点の列にあたる。

この複素周期点列をまず調べる。なぜかという、実のエノン写像の力学では、(3,4 次の低次共鳴を除いて、) 不変円とその間の周期点が、回転数の大きさの順にそのまま同心円状に並んでいるのが知られていて、Greene による先駆的な仕事 [7] 以来、無理数を有理数の列で近似する要領で、この実の周期点の列の極限として実の不変円を調べる方法が確立されている。同様に、複素の周期点列の極限として、先の曲線の上に複素不変円が順に並んでいることが予想されるためである。またエノン写像でもっとも周期の短い周期点のグループの一つのとり方になっており、簡単な設定が望ましい点からもこの周期点列を選んだ。本稿の前半では、注目する回転数を固定して、この添数をパラメタ c とする複素不変円の族を調べる。

実の力学の場合、KAM 曲線の摂動パラメタの族では (可積分系からの摂動ではないという意味で少し違うが、エノン写像なら添数 c の不変円の族、ここでは可積分系からの摂動を表すのに使う ϵ をあてる) KAM 曲線の崩壊点が注目された。というのは、Greene が KAM 曲線の崩壊するしきい ϵ_c で自己相似性を発見したからで、それを特徴づける相似則がいろいろと調べられた [7] [8] [9]。先の複素不変円に話を戻すと、パラメタ c を一方へ変化させると、この複素不変円は虚数部分の大きい、変数が共に実の面から見て深いところへ潜っていくのが数値的に観察される。この傾向が続けば、いつか滞留点集合の縁に到着し、一変数の写像のジュリア集合の場合との類推から、なにがしかの自己相似性が見られるだろうことが期待される。実面でのパラメタ ϵ についての不変円の族のシナリオをそのまま折り返しにした形のもが見られる可能性もある。ここを前半の目標にする。具体的には摂動パラメタに関する相似則を出すことである。複素と実の場合の近似周期点の対称性の違いから golden mean の回転数では出来なかったが、silver mean の場合にはその相似則が見られた。

ところで、前半で調べる複素不変円 (標準形で作用負にあたるもの) とは別に、実不変円の経数表示の解析接続で得られる複素不変円が、これも Greene らによって調べられている [12]。

KAM 曲線の経数表示したものを念頭において、仮に 1 変数の実解析的な周期関数を考える。関数が解析的になる、変数の実軸に関して対称な帯状の領域をとることが出来る。摂動下の解析的な KAM トーラスの保存についての証明では、トーラスをより滑らかな、可積分なトーラスに近いものにする正準変換を繰り返した後に、その正準角変数の複素平面上で解析性の帯領域の幅を有限に残す様にする段階がある [10] [11]。一方で、近可積分ハミルトン系の離散時間版である写像では、崩壊点 ϵ_c で KAM 曲線が自己相似性を持つ [7]。もちろん、このとき KAM 曲線の解析性は失われている。先の帯領域の幅を有限に残す、ということとの対応を考えると興味深い。Greene, Percival らは写像で正準角変数の複素平面に対応するものを調べた [12]。写像では KAM 曲線は無理数回転 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi\rho$ との位相共役の満たす差分方程式の解として表される。彼らはこの解のフーリエ級数を調べ、 θ 平面で帯領域の自然境界を見付け、この対応は解析的なハミルトン系に一般的なものである、と予想した。後に Berretti らは、KAM 曲線の崩壊するしきいまで摂動パラメタが変化するとき、 θ 平面の帯領域について自然境界までの幅が線形に減少することをいくつかの写像で確かめた [14]。また先の差分方程式の解は摂動パラメタとの二重級数になっており、摂動パラメタの複素平面でも自然境界が見られた [13]。この自然境界と実軸との交点は ϵ_c の下界になる。エノン写像でも、不変円について等価になる差分方程式の解の級数解を求める漸化式が

得られる場合について調べられている [15]。

本稿後半ではこの位相共役の解析接続について、実面の外の不変円の初期値を精度よく決めることを試みた。特に、前半部と同じ興味から、 θ 平面の自然境界にあたる不変円に興味がある。級数展開はこのような計算 (シャープなしきい値の決定) には向かないので、 θ の虚部を摂動パラメータに見立てて文献 [7] と類似の方法を提案する。 θ の虚部の変化に対して周期点は連続して存在しないので、不変円の満たす対称性をもつような有限の長さの近似軌道の列を用いる。結果、添数が θ の虚部である不変円の族 (位相共役の解析接続) の初期値が得られる。ここで用いる近似軌道は不変集合ではないので、そんなもので不変円を近似するのは不自然だと思われるかも知れない。が、実は θ の虚数部が零でないと、全ての対称線と交わりを持たなくなることが数値的に観察される。これはここで周期点列を使わない方針でいった、もしくは周期点はもし使っても複雑になりそうだと考えた理由の一つである。(一方で、前半部で調べた不変円は複素対称線と交わりを持ち、近似周期点も探索が容易なものを使った。) 提案する方法の妥当性の主張と、自然境界にぶちあたる θ の虚部のしきい値にあたる初期値を求むことが本稿の後半部の目的である。本稿で使った文献 [7] と類似の方法は対象にしている不変円の不安定化を決めているのであって、解析性のチェックとは直接の関係はない。不安定化のしきいと自然境界との関係づけは今後の課題に残されるが、ここでは前者が後者のよい目安になると考えている。

前・後半部の結果を総合すると、面積保存写像で一つの回転数 ρ を固定して考えるとき、前半で調べるのは添数摂動パラメータ ϵ の複素不変円の族であり、中心の楕円不動点の回転数が ρ になるようなパラメータ ϵ_ρ を中央において、両端にそれぞれ実、複素の不変円の崩壊点がある。さらに ρ によっては両端にパラメータに関する相似則が観察される。本稿後半で調べるのは、一つの ϵ の値について実の不変円の回転との位相共役を考えたときの、その解析接続で、添数が θ の虚数部の不変円の族になる。当然各々の ϵ の値にこの族があり、この点から見ると前半部の複素不変円の位相共役の解析接続の存在も当然期待される。(こちらはまだ片付いてない。) 最後に、この面積保存写像の不変円の族の在りようは、エノン写像の楕円型不動点に限ったものではなく、面積保存写像の楕円型不動点に一般的に見られるものと考えられる。

2 複素不変円 (symmetric) とその相似則

実不変円の崩壊のしきい値 c^* を数値的に決定する方法の内、Greene の residue criterion は精度の点で最良のものである。この方法には不変円の近似列になっている周期点列が必要である。近似列の取りかたは目的による。面積保存エノン写像でなるべく単純な複素不変円を近似する周期点列を得ることをはじめの目的にする。次に複素不変円の崩壊時に、パラメータに関する相似則が得られるように近似周期点を選ぶことにする。

まず、一つ回転数 ρ を固定して実の不変円の 1 パラメータ族を考える。添字はパラメータ c 。よく知られているようにその崩壊点 c^* から c_ρ (不動点の回転数が ρ になる) へ向かってパラメータ c を変化させていくと不変円は縮んでいき c_ρ では一点に潰れ、実面から消えてしまう。この先のパラメータ領域での不変円が、ここで調べる対象になる。まず 2-1 節では面積保存写像の楕円型不動点の分岐を記述する標準形から簡単な考察を行う。2-2 節ではエノン写像で近似周期点による不変円の近似を行う。複素不変円の 1 パラメータ族が数値的に得られる。2-3 節ではその不変円の線形安定性が調べられ、2-4 節ではパラメータに関する自己相似性を表す相似則を得る。

2.1 分岐図の複素の枝

2 自由度ハミルトン系の周期点の分岐を記述する標準形を考える ([6] など)。実軌道の分岐を調べるときは、標準形の実の停留点が中心の周期軌道とその分岐を表す。2-2 で使うエノン写像の複素

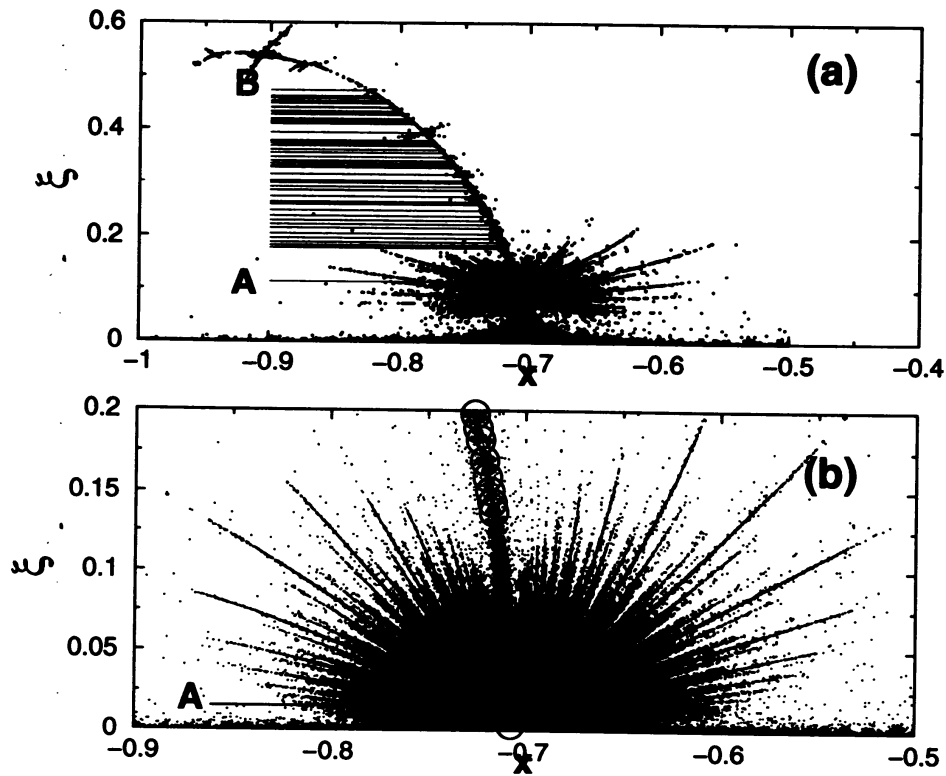


Figure 1: 計算機による滞留点集合 K といくつかの複素周期点。(a) $c = 1.9$, (b) $c = 1.9142 \approx c_{3/8}$ のそれぞれの場合で対称線 $\text{Fix}(\text{TS})$ による K の断面をとったもの。各点は $|Z_n| \leq 10$ ($0 \leq n \leq 7000$) なる初期値に対して打った。図 (a) の 43 本の水平な線分は、Farey 級数の内、 $3/8 \leq p/q \leq 7/18$, $q < 100$ なる有理数のそれぞれに一本ずつひかれ、その右端は回転数 p/q の symmetric な周期軌道の初期値を表す。A, B とラベルをつけた線分はそれぞれ $p/q = 3/8$, $p/q = 7/18$ の場合を示す。他の線分はその有理数 p/q の大きさの順に並んでいる。図 (b) では、それぞれの丸印 \circ は上に述べた symmetric な周期点のうちの一つである。A とラベルされている丸印は $p/q = 3/8$ の周期点を示し、図 (a) と同じく対応する回転数の順に丸印は並んでいる。

近似周期点は、標準形の作用を負にした複素の平衡点にあたり、数値計算の結果と定性的に一致する。

$\rho = \frac{l}{k} + \epsilon$ を楕円型周期点の回転数とする。ここに $\frac{l}{k}$ は有理数で $k \geq 5$ を仮定する。小さいパラメタ ϵ は k 次共鳴の分岐からのずれを示す。中心の周期軌道のまわりの解は時間周期的な 1 自由度ハミルトン系の解になる。系に特殊な対称性などがなければ、最低次の共鳴のみを取り込んだ近似可積分ハミルトニアンはこうなる、

$$g_k(I, \theta) = \epsilon I + a_2 I^2 + \dots + b I^{\frac{k}{2}} \sin(k\theta), \quad (1)$$

ここで (I, θ) は正準極座標で a_2 と b は ϵ のゆっくり変化する実関数。 ϵ, I が小さければ小さいほど、この近似 (1) はより良くなる。関数 g_k の停留点は元の系の閉軌道になる。

次の等式

$$\frac{\partial g_k}{\partial I}(I_0, \theta_0) = \frac{\partial g_k}{\partial \theta}(I_0, \theta_0) = 0, \quad (2)$$

の $I > 0$ の制限のもとでの根 $(I_0, \theta_0) \neq (0, 0)$ は実軌道の分岐の一般的なクラスを記述する。 k 個づつの安定な根と不安定な根があり、回転数 $\rho = l/k + \epsilon$ より、 k 個の安定な根は元の系の一つの安定軌道であり、 k 個の不安定な根は元の系の一つの不安定軌道である。つまり、一対の実軌道がそれぞれの k についてある。

ここで分枝と中心の周期軌道の距離 d と $I > 0$ の制限との関係を考えてみよう。 $\Delta c = c_{l/k} - c$, ここに c は元の系のパラメタ、 $c_{l/k}$ は共鳴 $\epsilon = 0$ に対応するパラメタ値とす。線形近似で $\Delta c = (\text{正の定数}) \times \epsilon$ となり、 a_2 の符号は変化しないとできる。 $a_2 < 0$ とする。 $k \geq 5$ の場合、式 (2) から I_0 について $-\epsilon = 2a_2 I_0 + \dots$, が要求される。そして分枝は $\Delta c > 0$ でのみ存在する。 $I_0 = \frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2)$ なので、距離 d は $d \propto \sqrt{\Delta c}$ と評価できる。ここで正準座標 (p, q) は元の系の周期軌道のまわりでの Poincaré 写像のそれである。

いま仮に制限 $I > 0$ を無視すると、 $\Delta c < 0$ の領域では $I < 0$ の純虚数解がある、つまり、 $\Delta c = 0$ で p_0 (または q_0) 平面での $\pm\pi/2$ だけねじれた (2) の根が続く。次節の数値計算のように、実際には原点がずれるので純虚数解にはならない。また距離 d は $d \propto \sqrt{|\Delta c|}$ を満たす。

式 (2) の $I < 0$ の解と $I > 0$ の解はパラメタ c に連続になる。つまり、一般的な 2 自由度実ハミルトン系の楕円型周期点のまわりでは 1 対の実軌道の初期値 $2k$ 個から 1 対の複素軌道のそれへつなげることを考えることが出来る。実際にエノン写像の分岐図でこの複素の枝がどうなっているかみてみよう。

2.2 エノン写像での不変円の近似周期点

以下、面積保存エノン写像 $T: C^2 \rightarrow C^2$,

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= Y^2 - c - X, \end{aligned} \quad (3)$$

ここでパラメタ c は実で、 $X = x + i\xi, Y = y + i\eta$, を調べる。逆写像 T^{-1} も定義される。初期値 $Z_0 = (X_0, Y_0)$ の複素の軌道は大文字 $Z_n = T^n Z_0$ で書いて、実の軌道は小文字 $z_n = T^n z_0$ で書く。無理数回転数 ρ の不変円を記号 $\Gamma(\rho)$ で表す。記号 $\Gamma_n(\rho)$ は $\Gamma(\rho)$ の第 n 近似とし、これは同一の有理数 p_n/q_n を回転数とする、数本の周期軌道からなる。ここで有理数 p_n/q_n は回転数 ρ の近似で、2-4 を除いて ρ の連分数を使う。2-4 では目的の相似則を出すために少し違うものを使う。

数値計算のコストからいって $\Gamma_n(\rho)$ のために近似の次数 n が大きくても q_n の短い有理近似列が欲しい。 $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とその対等な数は最も q_n の増加率が小さい点が適当である。以下、写像に合わせて回転数 γ^{-2} を調べる。2-4 でのみ、目的の相似則を出すために silver mean の回転数を調べる。

エノン写像の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ について述べる。写像 (3) では、その対称性を利用して容易に周期点を見付けることができることが知られている [9]。また実面での不変円の研究は、これらの対称性から見付けた周期点で成功しているので、まずはこの symmetric な軌道を使ってみる。周期点を見付ける方法について直接必要な部分だけ述べる。

実面上の写像 (3) と次の変換 S

$$\begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (4)$$

を考える。 $\det S < 0, S^2 = (TS)^2 = \text{id}$. なので、文献 [9] にならって写像 T は symmetry S をもつといい、下の表にあげる条件で S (または TS) の不動点集合 $\text{Fix}(S)$ ($\text{Fix}(TS)$) 上に周期 q の周期点がある。というのは、例えば、 $T^h z_0 \in \text{Fix}(S)$ かつ $z_0 \in \text{Fix}(S)$ の場合だと、 $T^h z_0 = ST^h z_0 = T^{-h} S z_0 = T^{-h} z_0$ なので $z_0 = T^{2h} z_0$ となる。他の場合も同様。

q	z_0	z_h	h
odd	$\text{Fix}(S)$	$\text{Fix}(TS)$	$(q+1)/2$
odd	$\text{Fix}(TS)$	$\text{Fix}(S)$	$(q-1)/2$
even	$\text{Fix}(S)$	$\text{Fix}(S)$	$q/2$
even	$\text{Fix}(TS)$	$\text{Fix}(TS)$	$q/2$

写像 (3) の実面の外でも変換 $(X, Y) \mapsto (Y, X)$ を S とかいて使うことにする。表と同じルールが導けるからので、そのような複素の軌道も、以下では symmetric であると言うことにする。

図 (2) は symmetric な周期軌道のいくつかについての分岐図の、 $\text{Fix}(S)$ (したがって $Y = X$) による断面を示す。記号 FP は実の不動点 $x = y = 1 - \sqrt{1+c}$ ($c \geq -1$) を示し、 $c < 3$ ではそれは楕円型になる。不動点 FP の分枝の回転数をそれぞれ有理数 p/q で示している。 p/q は γ^{-2} の連分数

$$\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \dots, \frac{1597}{4181}, \frac{2584}{6765}, \dots \right\},$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{F_n}{F_{n+2}}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

に選んでいる。ここで F_n はフィボナッチ数

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad F_0 = 0, F_1 = 1. \quad (6)$$

有理数列 $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ は

$$|\gamma^{-2} - p_n/q_n| \sim q_n^{-2}, \quad (7)$$

と γ^{-2} に収束し、 p_n/q_n は γ^{-2} の最良近似になっている [16]。回転数 p_n/q_n の周期軌道は、十分周期が長いなら $\Gamma(\gamma^{-2})$ のいい近似になっていると仮定する。実面に滑らかな不変円があるなら、これは正しい。これから行うことは、複素の滑らかな不変円についても、それが正しいことを数値計算の範囲で示していくことである。

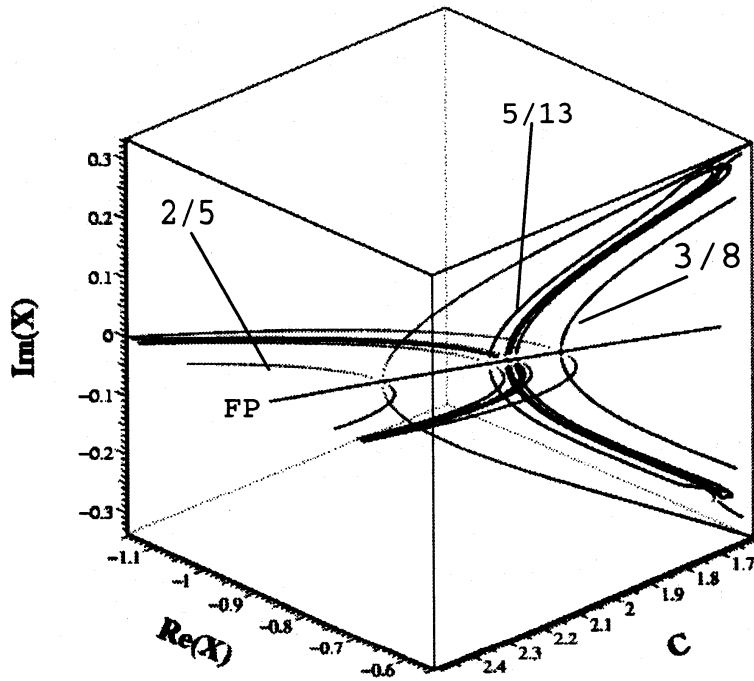


Figure 2: エノン写像の分岐図の $X = Y$ による断面で、FP: 不動点 $x = y = 1 - \sqrt{1+c}$ とその分枝 $2/5, 3/8, 5/13, \text{etc}$ を示す。有理数はそれぞれの分枝が実であったときの回転数を示し、各曲線は分母 6765 までの γ^{-2} の最良近似について、それを回転数とする分枝の初期値を示す。

複素の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ は次のように決めた。図 (2) で、ある p/q について見てみ
が FP から

$$c_{p/q} = 4 \sin^4\left(\frac{p}{q}\pi\right) - 1,$$

で生えている。ほぼ 90 度ひねって逆方向に複素の枝が生えているのも見える
symmetric な軌道の初期値を示す。図 (2) で c を一つ固定して、 q が偶数なら
は一つの軌道に属し、もう一本は Fix(TS) 上にある。もし q が奇数なら、周
れぞれが別の軌道の上にある。パラメタ c が $c_{p/q}$ に近い範囲では同じ周期を
は見られないので、実の枝でしか定まらない回転数でもって、複素の枝につ
しても問題ない。以下では回転数 p_n/q_n を持つこの一対の symmetric な周期
く。図 (2) の数値計算は前節の議論と一致している。

図 (2) の $1.8 \leq c \leq 2.0$ の領域での分岐図の振舞は複素の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の収束
近での乱れは $\Gamma(\gamma^{-2})$ の何らかの乱れを示唆している。図 (3) はいくつかの
の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の収束を示している。ここでは Fix(TS) 上の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の初期値
いる。

もしパラメタ c がある値 $1.628\dots$ にそう近くない場合、点列 $Z_{0,n}$ は明白
(3) の破線から n が大きいと

$$\Delta Z(n) \propto q_n^{-2} \propto \gamma^{-2n},$$

であり、これは可積分極限である式 (7) と同じである。これらの場合と異なり
 $\Delta Z(n)$ は式 (9) からはずれ、 1.62801 は c^* に近いのではないかと期待でき
 $c > c^*$ での次の節の安定性の結果とから、 $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の列は $\Gamma(\gamma^{-2})$ へ収束する

次に S^1 上の回転との位相共役をチェックする。回転 $r_\rho: S^1 \rightarrow S^1$ は $r_\rho(\rho$
 $2\pi))$, で、同相写像 $h: S^1 \rightarrow \Gamma \subset C^2$, s. t.

$$h \circ r_\rho = T|_\Gamma \circ h,$$

ここで Γ は写像 (3) の円に同相の不変集合、が複素 $\Gamma(\rho)$ の位相共役になる。
況にある $c=1.90$ と c^* に近い $c=1.6282$ の 2 つのパラメタ値についての関数

図で用いた関数 h の近似は $\Gamma_{18}(\gamma^{-2})$ ($q_{18} = 6765$) の一つの周期軌道 $\{Z_n$
べ替えで得た。それぞれの n で、点列 $\{\tau^m Z_0\}_{m=0}^{q-1}$, ここで $T^{q-2} = \tau$, は関数
点 $\tau^m Z_0$ についての回転の方の変数 θ の対応する値 $\theta_m/2\pi$ は m/q_n (n : 偶
 n : 奇数) である (例えば次の等式は図 (4) の場合にあたる、 $\frac{p_{18}}{q_{18}} \times q_{16} = \frac{2584}{6765} \times$
位相共役 (10) の θ の初期値の不定性の分は周期軌道から Z_0 をどれにとるか
 $c = 1.90$ (図 (4-a)) の場合、より短い周期の周期点による近似もほとんど
明らかに数値計算の位相共役 h は滑らかである、つまり、滑らかな複素不変
る。一方で $c = 1.628$ (図 (4-b)) では位相共役 h の小さい振動が見られる。
円 $\Gamma(\gamma^{-2})$ の崩壊で知られている。この仕事では確かめてないが、複素不変円
の方の自己相似性が期待できる。

2.3 複素不変円の安定性

不変円 $\Gamma(\gamma^{-2})$ の安定性を調べるために、複素の近似周期軌道の線形安定性の
の指標は Greene が [7] で用いた指標とほぼ同じもので、彼にならって resid

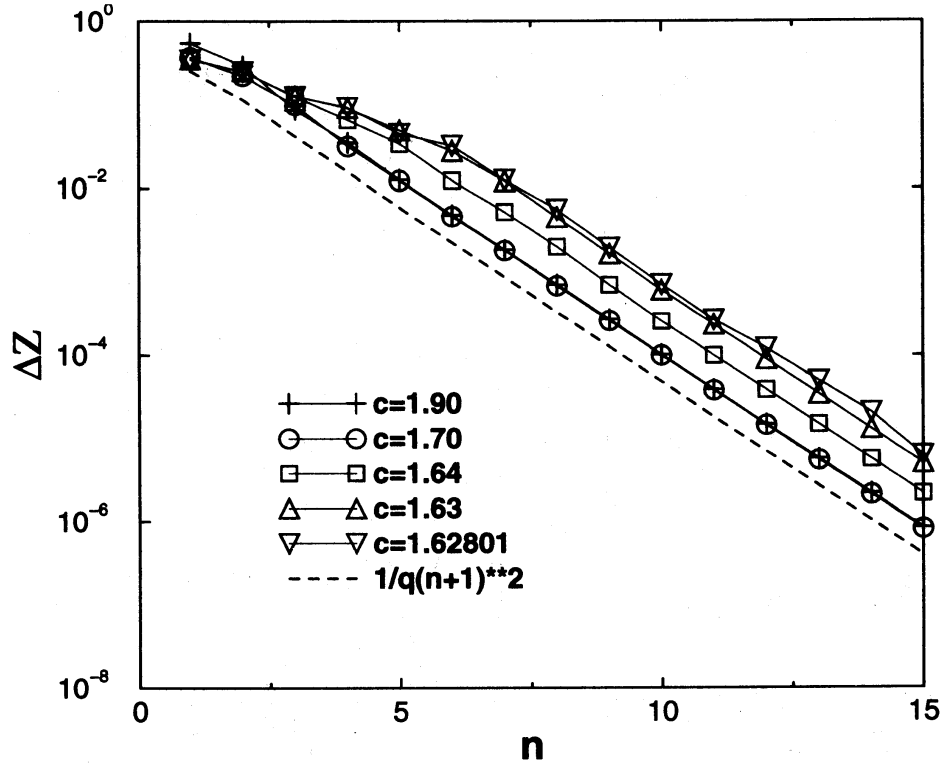


Figure 3: 回転数 γ^{-2} の複素不変円の近似列 $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の収束。第 n 次近似周期軌道の $\text{Fix}(\text{TS})$ 上の初期値を $Z_{0,n}$ として、 $\Delta Z(n) = |Z_{0,n} - Z_{0,n+1}|$ をいくつかのパラメタ c の値についてプロットした。図 (5) に示す $\text{Fix}(\text{TS})$ 上の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の線形安定性も参照のこと。

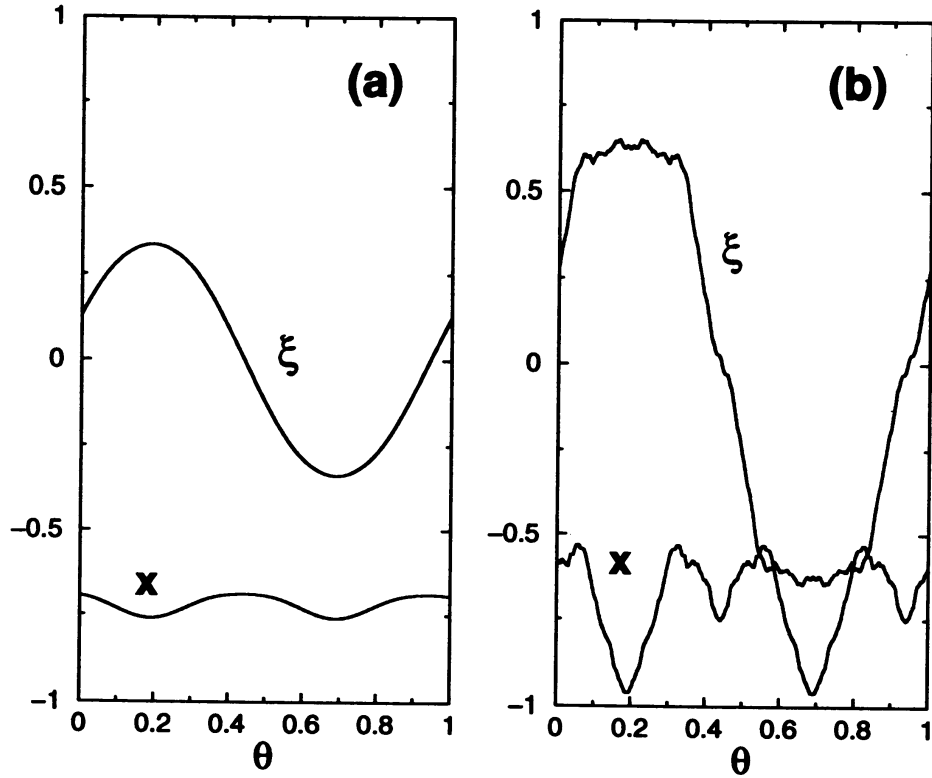


Figure 4: 回転との位相共役 h の近似、(a) $c = 1.90$, (b) $c = 1.628 \approx c^*$. h の X 成分の近似の実部 x と虚部 ξ をそれぞれ回転の変数 θ の関数としてプロットした (横軸は $\theta/2\pi$ の間違い)。近似周期点の回転数は $\frac{2584}{6765} \approx \gamma^{-2}$.

$\lambda, \lambda^{-1} \in C$ を周期 q の周期軌道で評価したヤコビ行列 M

$$M = D(T^q) = \prod_{i=0}^{q-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2Y_i \end{pmatrix}, \quad (11)$$

の 2 つの固有値とする。実の周期軌道の場合次の 3 つの安定性の型がある。

- (i) 楕円型: λ と λ^{-1} は 1 と -1 を除く単位円上にある
- (ii) 双曲型: λ と λ^{-1} は 1 と -1 を除く実軸上にある
- (iii) 放物型: $\lambda = \pm 1$

以後 (i), (ii) はそれぞれ記号 **e, h** で表す。複素の周期軌道の場合 λ が複素数の双曲型軌道もあるのでこの型を記号 **ch** で表す、

- (iv) (複素) 双曲型: $|\lambda| \neq 1$ かつ λ は実でない。

次は $c = c_{p_n/q_n}$ から最初に安定性の型が変わるまでのパラメタ領域での、 $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の複素近似周期軌道の安定性の型を数値的に決めたものを示す。

q	Z_0 lies on	stability type
odd (up to 6765)	Fix(TS)+	ch
	Fix(TS)-	ch (c.c. of the above orbit)
even (8,144,2584)	Fix(S)	h
	Fix(TS)	e
even (34,610)	Fix(S)	e
	Fix(TS)	h

q は γ^{-2} の最良近似 p/q のうち 6765 までの分母で、対応して 2 本の複素近似周期軌道 $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ のそれぞれの安定性の型を示している。軌道を特定するために、 \pm でそれぞれ条件 $\xi > 0(+)$ または $\xi < 0(-)$ を指定している。

上から、複素の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ については、一つの安定性の型だけで回転数 p_n/q_n の列をすき間なく埋めることは出来ない。これは実の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ では、 p_n/q_n の列がすき間なく埋まるような **e** 型の軌道のみ (または **h** 型の軌道のみ) の近似列がとれるのと異なっている。この複素の symmetric な周期軌道列では偶数周期の軌道に特徴があることは後で使うのでここで簡単な考察をしておく。

例外的な場合を除けば、複素の symmetric な周期点は Fix(S) (または Fix(TS)) 上の複素共役として発生する。このとき偶数周期 q の複素の symmetric な周期点では、もし Z_0 が Fix(S) (or Fix(TS)) 上にあるなら、 Z_h はその複素共役 \bar{Z}_0 になる。そのような軌道の半分 $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_h\}$ はもう半分 $\{Z_h, Z_{h+1}, \dots, Z_{2h}\}$ の複素共役で、対応するヤコビ行列 $M^{(e)}$ は次の形に書ける、

$$M^{(e)} = M_h \bar{M}_h, \quad M_h = \prod_{i=0}^{h-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2Y_i \end{pmatrix}. \quad (12)$$

こうして $M^{(e)}$ の跡は実になり、軌道は **ch** 型となれない。

話を本筋に戻す。residue R

$$R = \frac{1}{4}(2 - \lambda - \lambda^{-1}), \quad (13)$$

は実周期軌道の線形安定性の指標であり、 $0 < R < 1$ で軌道は安定になる (2-1 での $k=3$ または 4 にあたる場合を除く)。 $\Gamma_n(\rho)$ の一つの適切な軌道の residue を R_n としたとき、ある与えられたパラメタ値 c で R_n の列の極限が 0 になるのは、滑らかな不変円が存在するときで、またそのときにかぎる、とされる。以下、複素の軌道でも同じ residue の定義を使い、 R は複素数になり得るので、その絶対値を指標にする。

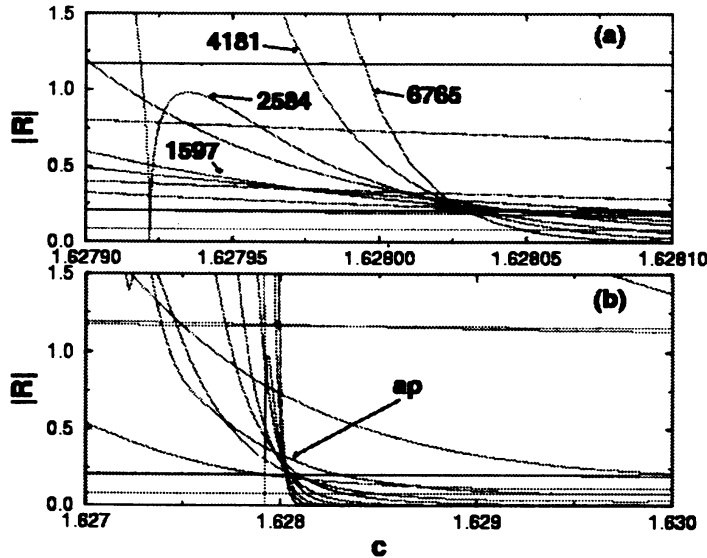


Figure 5: $\Gamma(\gamma^{-2})$ の不安定化。(a) 不安定化点付近の $|R_n| - c$ 曲線。各整数は軌道の周期を示す。(b) より広い領域 $1.627 \leq c \leq 1.630$ での $|R_n| - c$ 曲線。大きい n については曲線は大体一点で交わっている。図では、 $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ のうち、 $\text{Fix}(\text{TS})(\xi > 0)$ 上の周期点を使った。

図 (5) は $c = 1.628$ 付近で複素不変円 $\Gamma(\gamma^{-2})$ が不安定化していることを次近似 $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の $|R_n| - c$ 曲線を描いており、図では $\text{Fix}(\text{TS})$ 上の $\xi > 0$ の期点を用いた。

ほとんどの $|R_n| - c$ 曲線では、 $|R_n|$ はパラメタ c の減少関数で $c = 1.628$ 付近で極小点で 1 に達する。ここで軌道は e 型から e 型へ変わり、図 (5 a) の $|R_{16}| - c$ 曲線は単調減少になる。他の e 型の軌道も同様の振舞は系の対称性を帯びた周期軌道には時々見られるものである。 $|R_n|$ 同一周期の他の軌道との分岐が起こり、これ以降は $\Gamma_{16}(\gamma^{-2})$ を構成する軌道義しなければならないが、本稿ではそこまでの意味はないと考えて、ものを一本として曲線を描かせて済ませている。

さて、図 (5b) の右側の部分では、 c を固定したときの列 $|R_n|$ は n に対する。以上、図 (3 - 4) の結果と合わせて、滑らかな複素不変円 $\Gamma(\gamma^{-2})$ の存在する。一方で、 $c = 1.628$ の付近のある c の値以下では、数列 $\{|R_n|\}$ は発散し、ここでは不変円は不安定化し、さらに不変円そのものが消えている可能性が

ここまで「 $c = 1.628$ の付近のある c の値」というまどろっこしい言いか壊点 c^* をどう定義するか、そもそも点なのかという問題もあるけれども) にはいくつか状況をそろえる必要があるのだが、複素不変円 $\Gamma(\gamma^{-2})$ の場合である。この節の残りは、その点について述べる。

本稿では条件 $|R_n| = 1$ で定められるパラメタ値 c_n の列の極限を c^* とし、やいくつかの (実) 標準写像の回転数 γ^{-1} または γ^{-2} の場合について、次の

られている、

$$\frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} \sim \delta. \quad (14)$$

ここで定数 δ はいくつかの異なる写像で同じ値になる [9] [8]。この普遍的なパラメタ c に関する自己相似性はそれ自身が面白い。また、相似則 (14) を仮定するなら有限の近似次数からの外挿が保証されること、 n について指数関数で精度がよくなることも、有限次数しか使えない数値計算では (技術的なことですが) 重要である。いくつかの周期 1 の 2 次無理数、例えば $\gamma^{-1} = [0, 1, 1, 1, \dots]$ や $\sigma = [0, 2, 2, 2, \dots]$ など、で相似則 (14) はしばしば観察され、そして c^* が正確に決定されている。

ところで、 c_n つまり R_n の定義から、相似則 (14) の観測には同一の安定性の型を持つ近似軌道の列が必要になる。しかしこの節の表で見たように、写像 (3) の複素の $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ はこの点で適当でなく、 c^* が精度よく決められない。

2.4 複素不変円 (symmetric) の相似則

写像 (3) の複素周期軌道を使って相似則 (14) を観測するのがこの節の目標である。前節の表では、周期 q が偶数か奇数かが軌道の安定性の型を決めていたので、この節では分母が奇数のみの別の有理近似の列 $\{p'_n/q'_n\}$ を調べる。

相似則 (14) の鍵は 2 次無理数の連分数展開の周期性にあると考えられ、これが相空間に入れ子状に近似周期点列を配置する [8]。もう少し正確に言うと、次の線形ツイスト写像 $f_0: R \times T \rightarrow R \times T$

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ x' &= x + y', \quad (\text{mod } 1), \end{aligned} \quad (15)$$

で $\rho = \gamma^{-1}$ の場合を考えると、もし初期値 $(y_n^0, x_n^0) = (p_n/q_n, 0)$ で回転数 F_{n-1}/F_n の周期点を $\Gamma_n(\gamma^{-1})$ にとるなら、 n が十分大きいとき次が成り立つ、

$$\frac{y_n^0 - y_{n-1}^0}{y_{n+1}^0 - y_n^0} \sim -\gamma^2, \quad \frac{x_n^c}{x_{n+1}^c} \sim -\gamma, \quad (y_n^c, x_n^c) = f_0^{F_{n-1}}(y_n^0, x_n^0). \quad (16)$$

重要なのは近似の正確さではなく、この入れ子構造がつくられることで、実際に γ^{-1} の最良近似でない回転数の列でも相似則 (14) に従う近似列 $\{\Gamma'_n(\gamma^{-1})\}$ を得ることは出来る。例えば漸化式 (6) で $(F_1^{(1)}, F_2^{(1)}) = (1, 3)$, $(F_1^{(2)}, F_2^{(2)}) = (1, 4)$ または $(F_1^{(3)}, F_2^{(3)}) = (2, 5)$ としたもののから、 γ^{-1} の有理近似列 $\{F_{n-1}^{(i)}/F_n^{(i)}\} (i=1, 2, 3)$ を得る。これら 3 つの列は γ^{-1} の最良近似列ではないが、それぞれの $F_n^{(i)} (i=1, 2, 3)$ 列で漸近式 (16) が成り立つ。さらに、これらの有理数列を使って標準写像で [7] に沿った数値計算をやると、同じ δ の値で相似則 (14) が得られる。この経験則から式 (6) のような漸化式で、奇数のみ (もしくは偶数のみ) 与えるような初期値を探してみることにする。

ここでは漸化式 (6) と silver mean σ 用の漸化式

$$G_{n+1} = 2G_n + G_{n-1}, (n = 1, 2, \dots) \quad G_0 = 0, G_1 = 1, \quad (17)$$

を考えた。初期値 $(G_1, G_2) = (1, 3)$ なら奇数のみの列が得られる。そこで、 $\Gamma_n(\sigma)$ の近似周期軌道の回転数 p'_n/q'_n に数列

$$\frac{3}{7}, \frac{7}{17}, \frac{17}{41}, \frac{41}{99}, \frac{99}{239}, \frac{239}{577}, \dots, \quad (18)$$

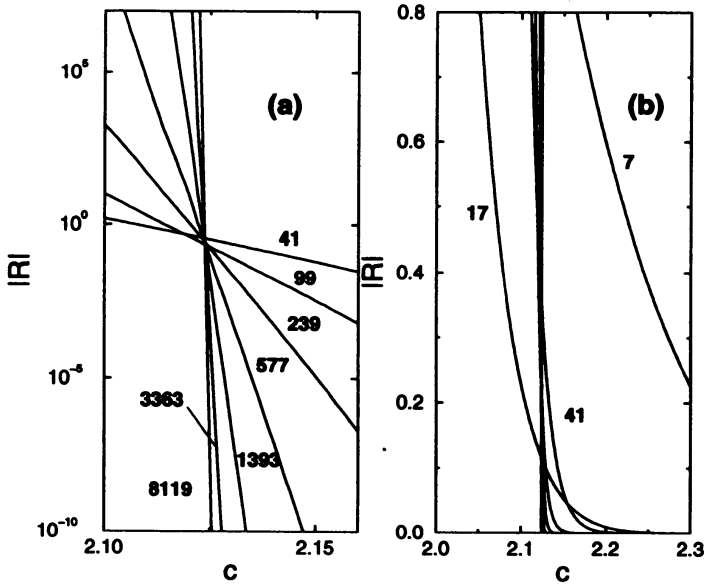


Figure 6: $\Gamma(\sigma)$ の不安定化 ($\sigma = \sqrt{2} - 1$)。 $|R_n| - c$ 曲線が、(a) 曲線の交点のまわり (片対数)、(b) 領域 $2.0 < c < 2.3$ でそれぞれ示されている。各整数は周期軌道の周期で、その回転数は列 (18) のひとつ。

図 (6) は近似 $\Gamma_n(\sigma)$ のいくつかの $|R_n| - c$ 曲線を示す。いま $\Gamma_n(\sigma)$ の軌道は全て ch 型でそれぞれの次数 n について 2 つの軌道は同じ曲線を与える。図 (6) で、周期の長い軌道の $|R_n| - c$ 曲線はある一点でだいたい交わり、単調減少している。次の表は写像 (3) の複素不変円 $\Gamma(\sigma)$ で式 (14) の形の相似則が明白に見られることを示す。 c_n 、対応する δ_n とそれぞれの極限 c^* 、相似則 (14) の定数 δ の Aitken の Δ_2 法による見積りを示す。一次収束する元の列の極限 $\lim c_n$ は、新しい列の極限 $\lim c'_n$ と同じになる (より正確には $d_n = c_n - c^*$, ここで $\lim c_n = c^*$, が $d_{n+1} = (R + r_n)d_n$, ここで $d_n \neq 0, |R| < 1, \lim r_n = 0$ を満たすとき、新しい列 $\{c'_n\}$ はより速く c^* へ収束する)。比較のために、別に実面の方の $\Gamma(\sigma)$ での同様の数値計算も挙げておく。条件 $|R_n| = 1$ が複素と実の場合では等価でないが (実平面上の計算には最良近似列の回転数で、e 型の軌道を用いた。)、よく似た値の δ が得られた。

表

q_n	c_n	δ_n	c'_n	δ'_n
7	2.1347338238			
17	2.0408219744	-1.414962	2.0797094744	
41	2.1071925373	9.522503	2.1149802216	4.774947
99	2.1141624026	1.133654	2.1663107215	2.806441
239	2.1203105406	3.223087	2.1230761260	2.484173
577	2.1222180713	2.079888	2.1239844862	2.444148
1393	2.1231352026	2.614490	2.1237032651	2.406397
3363	2.1234859904	2.273775	2.1237613827	2.416475
8119	2.1236402659	2.519313	2.1237418088	2.405930
19601	2.1237015030	2.308653	2.1237482970	
47321	2.1237280281			

写像 (3) での複素不変円 $\Gamma(\sigma)$ の相似則 (14)。各 c_n は条件 $|R_n| = 1$ で定める、ここで $\Gamma_n(\sigma)$ の軌道は図 (6) で使ったものと同じ。 $\delta_n = \frac{c_n - c_{n+1}}{c_{n+1} - c_{n+2}}$ 。 $\{c'_n\}$ は $\lim c_n$ の評価のために Aitken の Δ_2 法で求めた新しい列で、 $c'_n = \frac{\delta_n c_{n+1} - c_n}{\delta_n - 1}$ 。 δ'_n は同様に求めたもの。

表

q_n	c_n	δ_n	c'_n	δ'_n
169	2.7937253362			
408	2.7904599403	2.312193	2.7879714385	
985	2.7890476901	2.510468	2.7881127153	2.448368
2378	2.7884851457	2.420049	2.7880890013	2.444070
5741	2.7882526940	2.452761	2.7880926872	2.442600
13860	2.7881579226	2.438023	2.7880920186	
33461	2.7881190503			

写像 (3) での実不変円 $\Gamma(\sigma)$ の相似則 (14)。 c_n を定める $R_n = 1$ は実の楕円型周期点、回転数は σ の最良近似、を用いた。 c'_n, δ_n や δ'_n は先と同様にして得た。

3 位相共役の解析接続としての複素不変円

実面上で、位相共役 (10) を定める関数 h の x 成分に注目する、 $x = x(\theta)$ 。エノン写像では $y = x' = x(\theta + \omega)$ 、ここで $\omega = 2\pi\rho$ 、から x 成分を考えれば十分である。 $x(\theta)$ が偶関数になり、後々都合がいいので、 $\theta = 0$ を対称線 $\text{Fix}(\text{TS})$ 上にとる。これは容易に示せて $z_0 \in \text{Fix}(\text{TS})$ ならば、 $z_n = T^n z_0 = T^n \text{TS} z_0 = S(\text{STS})^{n+1} z_0 = ST^{-n-1} z_0 = S z_{-n-1}$ なので、 $(x_n, y_n) = (y_{-n-1}, x_{-n-1})$ 、つまり $x_n = x_{-n}$ 。また $x(\theta)$ は次式を満たす、

$$x(\theta + \omega) + x(\theta - \omega) + c = x(\theta)^2. \quad (19)$$

以下回転数 ρ とパラメタ c を固定して、位相共役 (10) から、写像 (3) には方程式 (19) の解が解析的な領域に $\theta_I = (\theta \text{ の虚数部}) = \text{const.}$ で定められる複素不変円が在る。以下では、この添数が定数 θ_I の複素不変円の族を調べる。[12] では解析性の境界まで複素不変円が調べられた(ただし標準写像)。そこでは摂動パラメタとの2重級数が主に使われている。級数展開は特異点の付近までは確かに便利だが特異点を含む領域の計算には向かない。筆者は residue criterion のようなアプローチが必要であると考え、residue criterion の摂動パラメタの役割を θ_I にあてて、複素不変円のなるべく正確で使いやすい近似列を得ることを、最初の目標にする。それから θ の特異点に相当する複素不変円の初期値を求む。

まず 3-1 節で、位相共役の解析接続は対称線から外れていることを、数値的に観察する。これは周期点列による近似というアプローチは全く使えないか、もし使っても繁雑な手順を要しそうな印象を与える。3-2 節では位相共役の解析接続がもつ対称性から近似軌道列を決める。この節のタイトルはまるで位相共役を解析接続して調べているかのようだが、近似列を使って調べる場合、より広いクラスの不変円について調べることになる。この違いは今後の課題に残る。3-3 節では近似列の線形安定性を調べ、対象の不変円が不安定化するしきいを決定する。これは、 θ の特異点の最初の目安になる。

3.1 添数 θ_I の複素不変円の対称性について

$\theta = \theta_R + i\theta_I$ 平面のある有界な点では絶対収束しているフーリエ級数、

$$\chi(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_j \exp(ij\theta),$$

を考える。仮にいま負の j の χ_j 成分のみを零において考えて、 $\chi(\theta)$ が解析平行な直線 $\theta_I = w_- < 0$ で下から押えることが出来る。 $\chi(\theta)$ が実関数なら、解析的な領域は2直線 $\theta_I = \pm w_0$ で上と下から押えることが出来る。以(19)の解がこの形であるとする。この節全体では位相共役の解析接続というの解が解析性をもつと仮定する。

回転は $\theta_R + i\theta_I \rightarrow \theta_R + \omega + i\theta_I$ で、 ρ が無理数なら線分 $\theta_I = \text{const}$ を一様一本の線分にエノン写像内の複素不変円一つが対応するので、添数 θ_I の不変ひとつ特異点 θ^* があると、その性質は式(19)を通して線分 $\theta_I^* = \text{const}$. 全不変円の族の添数集合は単純に区間 $(-w, +w)$ の場合を想定した。この場合実面をはさんで上下が対称な筒状の不変集合があることになる。3節全体と集合の縁に興味がある。

調べている不変円の位相共役が解析的なら、フーリエ係数 χ_j の大きさは w で押えられる。この場合、級数(20)を有限次数で打ちきったものの精度は(19)によるが)悪くはない。しかし級数(20)による w の評価には、小さい分母に、ここでは実不変円の位相共役を解析接続すると、対称線から外れることを観察用したフーリエ係数は次の様に求めた。

近似の次数 n , 回転数 p_n/q_n の実の近似周期点 $\Gamma_n(\rho)$ から、離散フーリエ係数 $c_m^{(n)}$ ($m = 0, \dots, q_n/2$),

$$c_m^{(n)} = \frac{1}{q_n} \sum_{j=0}^{q_n-1} x_j \exp(-2\pi i m \frac{p_n}{q_n} j),$$

$$c_m^{(n)} = \bar{c}_{-m}^{(n)},$$

を求める。ここで x_j は軌道の x 成分。考えるのはパラメタ c が実不変円の角に近くない場合に限り、エイリアシングの効果は打ちきり効果に比べて小さいような場合には $|c_m^{(n)}|$ は波数 m の指数関数で小さくなるので、これは妥当。漸近は近似の次数 n についての極限は実不変曲線 $\Gamma(\rho)$ のフーリエ係数になるとする。加速法で $c_m^{(n)}$ の収束を加速して使う。一次収束なら $\delta_n = (c_m^{(n)} - c_m^{(n-1)}) / (c_m^{(n+1)} - c_m^{(n)})$ に収束する。 $c=2.46, \rho = \sqrt{2} - 1$ の場合、波数にかかわらずに $\delta \sim -5.828 \dots$ 時系列の方の誤差 ($\sim 10^{-25}$) と係数の絶対値の大きさが同じオーダーになる領域では δ は収束していない。後で必要な $|\theta_I|$ が小さいときの誤差評価を数による不変円の数值精度は波数0のフーリエ係数の精度 (δ_2 法で固定でき)である。以下の図で使っている $c = 2.46, \rho = \sqrt{2} - 1, \theta_I/2\pi = 0.15$ の場合で、平均 10^{-18} 程度になるまでつめた。より小さい θ_I ではさらに差は小さい。

図(7)は添数 $\theta_I \neq 0$ の不変円と対称線 $\text{Fix}(TS)$ とは交わらないことを示す。次打ちきりによる不変円で評価しているが、図の縦軸のスケールから、誤差は小さい。 $\text{Fix}(TS)$ の場合も同様の曲線を得て、この不変円の族は θ_I の増加に従って $\text{Fix}(S)$ から離れていく。不変円が対称線 $\text{Fix}(TS), \text{Fix}(S)$ の両方と交わらない線 $\text{Fix}(T^n S)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) と交わらない。導入部でも述べたように位相類似周期点で調べるつもりなら、これは困惑させられる点なので、一般的な回転

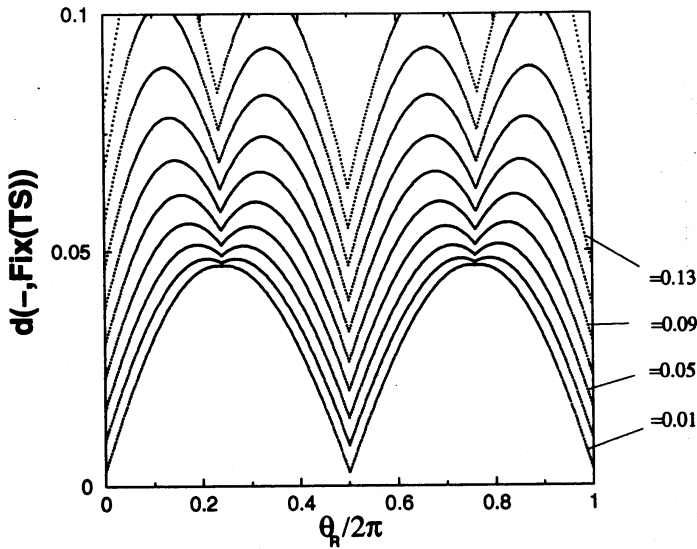


Figure 7: 回転数 $\sqrt{2}-1$ の実不変円の回転との位相共役の解析接続と複素対称線 $\text{Fix}(TS)$ との距離 $\|Y(\theta) - (X(\theta)^2 - c)/2\| = |y - (x^2 - \xi^2 - c)/2| + |\eta - x\xi|$, パラメタ $c = 2.46$. 数字はそれぞれ級数 (20) の $\theta_I/2\pi$ の値を示し、 $\theta_I/2\pi = 0.01, 0.03, 0.05, \dots, 0.19$ のそれぞれに対して曲線が引かれている。

場合でも同様であるか確かめておく。まず添数 θ_I の不変円の族がのっている初期値面を次のようにして 2 次元に制限する。

筒状の不変集合の $\theta_R = 0$ 曲線に注目する。X 座標の虚数部

$$\text{Im}(X(\theta)) = - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sin(j\theta_R) \sinh(j\theta_I),$$

は θ_R の奇関数なので、 $\theta_R = 0$ で X の実面 (以下で「 X の実面」は $\xi = 0$ で指定される相空間の 3 次元部分空間に使う) に必ず触っている。また式 (19) から

$$\text{Re}X(0 + i\theta_I) = \pm \sqrt{2\text{Re}X(\omega + i\theta_I) + c},$$

実の不変円の位相共役を考えるなら、負符号が根になる。

$$x_0 = \text{Re}X(0 + i\theta_I), \quad \xi_0 = \text{Im}X(0 + i\theta_I),$$

$$y_0 = x_1 = \text{Re}X(\omega + i\theta_I), \quad \eta_0 = \xi_1 = \text{Im}X(\omega + i\theta_I),$$

と書くと、任意の回転数 ρ に対して、いま考えている不変帯の初期値 $\theta_R = 0$ は次のように 2 経数 s, t の定める曲面上にある。

$$x_0 = s, \quad \xi_0 = 0, \quad y_0 = \frac{s^2 - c}{2}, \quad \eta_0 = t. \quad (21)$$

この曲面は、実曲線 $\text{Fix}(TS)(y = \frac{x^2 - c}{2})$ 上の点に対して変数 y のみ虚数部をつけた曲面である。

$$t = - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sin(j\omega) \sinh(j\theta_I)$$

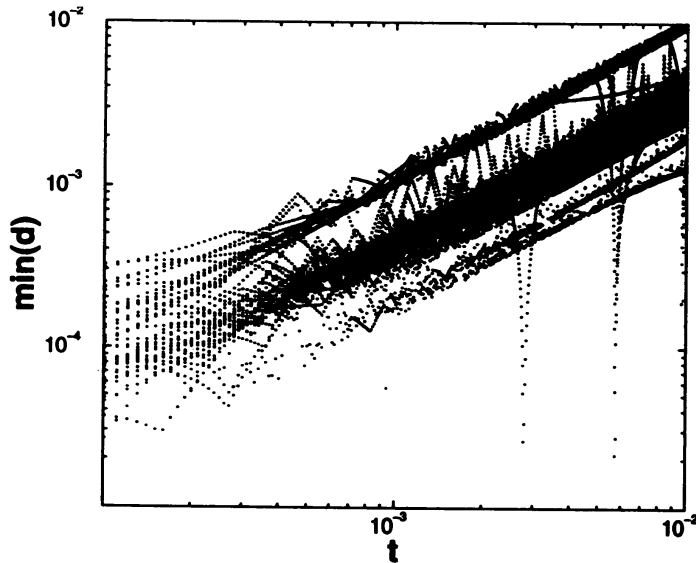


Figure 8: 図 (7) の結果の一般性。各点は曲面 (21) 上の初期値のうち、 $X_n^2 + Y_n^2 < 10$, ($1 \leq n \leq 10^4$) なるものについて $\min(d) = \min_{1 \leq n \leq 10^4} \{ \|Y_n - (X_n^2 - c)/2 \| \}$ の値を示す。初期値 $t = 10^{-6} + i \times 10^{-5}$, $s = -1.261 + 0.001 \times j$, ($1 \leq i \leq 1000, 1 \leq j \leq 40$) の範囲のものを重ねている。 $c=2.32$.

なので、もし c_j の値が得られているなら、その精度に応じて t から θ_j が数値
 図 (8) に、位相共役の解析接続と複素対称線 $\text{Fix}(TS)$ とは一般的に交わり
 を示す。いま、有界軌道の初期値で曲面 (21) 上のもは、(安定多様体上の初
 が、) 多くの場合、位相共役の解析接続の初期値であるとして考えている。図
 に対して線形に増えているのと同様、 $\min(d)$ は、例外的な 2、3 の急速な落ち
 おむね t に対して線形に増えている。図の左の領域は $n \leq 10^4$ の制約から縦軸

3.2 近似列

θ_I を添数にとると、その族は複素相空間で連続にあることになるが、周期点で
 また 3-1 節の観察もあるので、連続は離散の極限から、という点だけ残して、
 捨てる。偶関数 $x(\theta)$ を近似する有限の長さの軌道の列を使うことにし、この
 収束をパラメタ c をふってチェックする。

まず、 S^1 上の回転 $\theta \rightarrow \theta + \omega$ で初期値 $\theta = 0$ の軌道に付いて考える。 θ が
 目、ここで q_n は ρ の最良近似の分母、で $|\theta| \sim q_n^{-1}$ である。写像の方でも同
 合上の $\theta_R = 0$ 曲線を発する軌道は、 q_n 回目に $\theta_R = 0$ (X の実面) に $|\xi| \sim$
 さい、程度近付く。初期値に対する連続性と、実の KAM 曲線の周囲が近可利
 ととの類推とから、あまり小さくない q_n については、相空間の不変円の近傍
 実面にのる初期値があり得る。そしてこの初期値は q_n が大きい程不変円に近
 q_n 回の iteration 後に X の虚部が 0 になる (s, t) 平面上の初期値の集合 $R(c, q_n$
 $0)$ を考える。ここで $R(c, q_n)$ は実相空間の回転数 p_n/q_n の周期点の初期値を
 大きさまでの初期値を考える。これは筒状不変集合の上の $\theta_R = 0$ 曲線の近似
 で、自然境界に相当するであろう $|t|$ までを考える。

図 (9) は前節のフーリエ級数による初期値と $R(c, q_n)$ を示す。背景は計算機

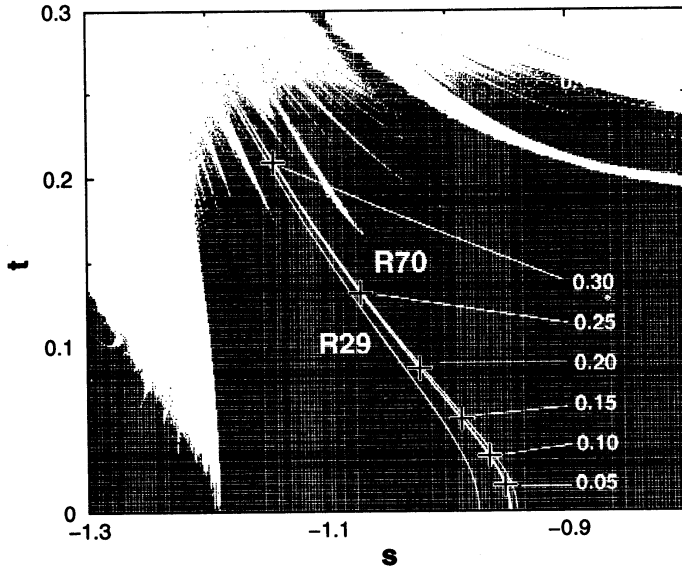


Figure 9: 集合 $R(c = 2.46, q_n)$, $\rho = \sqrt{2} - 1$. 点は $|Z_n| < 10 (0 \leq n \leq 10^4)$ なる初期値を示し、白抜きの曲線はそれぞれ $R(c = 2.46, q_n)$ を示す。R29、R70 とあるのはそれぞれ $q_5 = 29, q_6 = 70$ のもので、R70 のそばの線が集積しているのは高次の q_n のもの。十字 (+) は級数 (20) の波数 30 までの打ちきりによる初期値で、ラベルづけの数字は $\theta/2\pi$ の虚部の値を示す。

集合、対称線から外れているので一応区別しておく) が点で打ってある。十字は $\rho = \sqrt{2} - 1$ について、 c_1, \dots, c_{30} まで先の Aitken δ_2 法で決めて、各 $\theta_I/2\pi$ の値について級数解を打ったもの。30 次の打ちきりといっても、 c_{24}, \dots, c_{30} についてはその絶対値は 10^{-24} 以下なので実質は 23 次級数。誤差を単純に見積ると $\theta_I/2\pi = 0.25$ では無視できるが、 $= 0.3$ になると図の大きさの程度になり得る。 $R(c, q_n)$ は全部 iteration で出したもので、次節で述べるように $t = 0.23$ くらいから上は大きい q_n では写像の微分が発散しているので、精度の点で注意がいる。

図 (9)(のデータ) から近似列 $R(c, q_n)$ は添数 θ_I の不変円の族を調べるのに使えそうである。しかし実力学の状況との類推に基づいているので、その点を数値的に確かめておく。ある回転数 ρ を固定したとき、考えている軌道の長さに相応の狭さの区間で、 $R(c, q_n)$ が一意に決まるかどうかを問題とする。具体的には、 s_n を $R(c, q_n)$ と直線 $t \equiv \text{const.}$ の交点の s 座標とする。両端を s_{n-2}, s_{n-1} とする区間で ξ_{q_n} の零点が入っているか、また ξ_{q_n} が単調になっているか、パラメータ c 、添数 θ_I に対応する t をふって確かめる。これは次のような状況を想定している。まず S^1 上の無理数回転数 ρ_0 の回転を考える。 S^1 のまわりに少し定義域を広げて動経方向に回転数が $\rho = \rho_0 + a(r - 1)$ と依存するように、 $R(r \exp(i\theta)) = r \exp(i(\theta + 2\pi\rho))$ なる写像を考える。ここで r, θ, ρ, a はいずれも実。このとき ρ_0 の主近似分数のうち、 $p_{n-2}/q_{n-2}, p_{n-1}/q_{n-1}, p_n/q_n$ の 3 つを回転数とする軌道は、それぞれ半径 $1 + (p_m/q_m - \rho_0)/a$ ($m = n-2, n-1, n$) の円の上になっている。それぞれの円を C_m ($m = n-2, n-1, n$) と書くと、 C_{n-2}, C_{n-1} を境界とする円環 A に円 C_n が入っている。初期値 $\theta = 0$ の軌道のそれぞれについて考えると、 q_n 回の回転写像を繰り返したところで円 C_n 上の軌道は半直線 $\theta = 0$ に帰ってくるが、 C_{n-2}, C_{n-1} 上の軌道はそれぞれ $|\theta| = a_n/q_{n-2}, 1/q_{n-1}$, ここで a_n は第 n 部分商で、もし $\rho_0 = \gamma$ なら 1、となつて一方が半直線 $\theta = 0$ を通り過ぎ、他方は通り過ぎる直前になる。それぞれ点 c_{n-2}, c_{n-1} と書くことにする。いま n は十分大きいので点 c_{n-2}, c_{n-1} はいずれも半直線 $\theta = 0$ に非常に近いところにある。ここで円

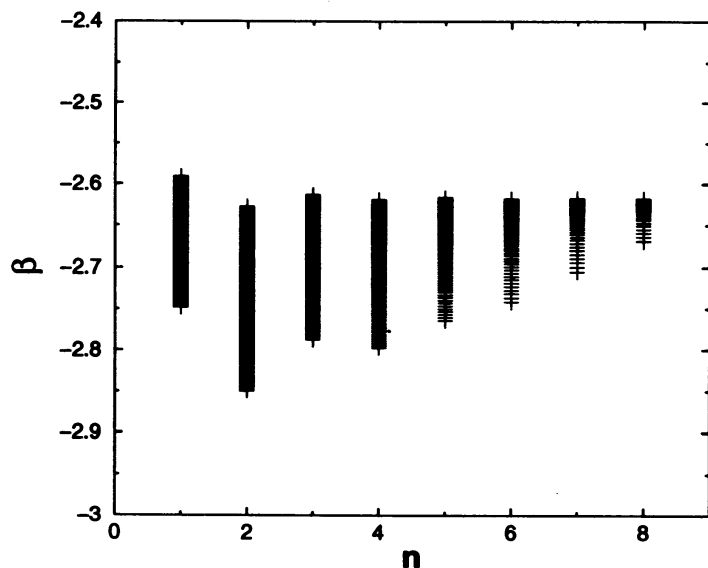


Figure 10: S_n の列の収束。パラメタ $c = 2.32$ 、回転数 $\rho = \gamma^{-2}$ の実不変円に付随する添数 θ_I の不変円の族について、 $0 \leq t \leq 0.0758 \approx t_{th}$ で 0.0001 刻みに、 $\beta_n = (s_{n+1} - s_n)/(s_{n+2} - s_{n+1})$ がプロットしてある。

環 A 内の $\theta = 0$ を初期値とする軌道全てを考えると、 q_n 回の回転写像の後はその曲線の上 (極座標で考えれば直線上) にあり、 θ の関数として単調に変エノン写像では先に見たように、不変円の対称性から任意の不変円上の $\theta =$ る。いまエノン写像の $\theta = 0$ の非常に近い領域だけ考えているので、 θ の虚あえず無視し、上のような円環上の回転写像との位相共役になっている力学況を第 0 近似として考えるわけである。注目している回点数の不変円の族が残っており、軌道の初期値依存が小さい状況ではよい近似である。

図 (10) は s_{n-2}, s_{n-1} を両端とする区間列の長さの減少するレートを示す、をプロットしているのではっきりしないが、 $0 \leq t \leq 0.07$ では $(s_9 - s_8)/(s_{11} - s_{10})$ と 4 桁まで収束している。 t_{th} 近くの t についてのプロットが、下の方に薄く) の列は一般のパラメタ、回点数についても一次収束していると考えて、以後、えている不変円の初期値とする。

図 (11) は ξ_{q_n} の単調性を $n \leq 10$ までチェックしたもので、この傾向が続くともこの領域では数値計算のコストの点で容易に、添数 θ_I の不変円の族が、 $R(c, q_n)$ の列で得られる。またこれは先の円環 A 上の回転からの摂動といこの領域より上側では、次節で述べるように、不変円は不安定化している。接続はないと考えられる。境界部 t_{th} 付近は (不変円の不安定化と解析性の喪いかによるけれども、) ここが θ 平面の自然境界の目安になり、 $c^* = c$ で t_{th} それに向かって t_{th} は $c^* - c$ の減少に対して減少している。 t 方向の `ir.climex` で、線分 4 本おきにすき間が空いているのは、単に作業量の問題で、ここだけ味ではない。

領域の左側 ($c < c_\rho$) は $\theta_I = 0$ のとき既に複素の不変円になっている (2 重た実不変円の c^* 付近 ($2.36 < c < c^*$) は t_{th} 付近で ξ_{q_n} の単調性を保つために準備しなければならず、手作業が多くなる。図には対応する線分は引いてなについては現在調査中。

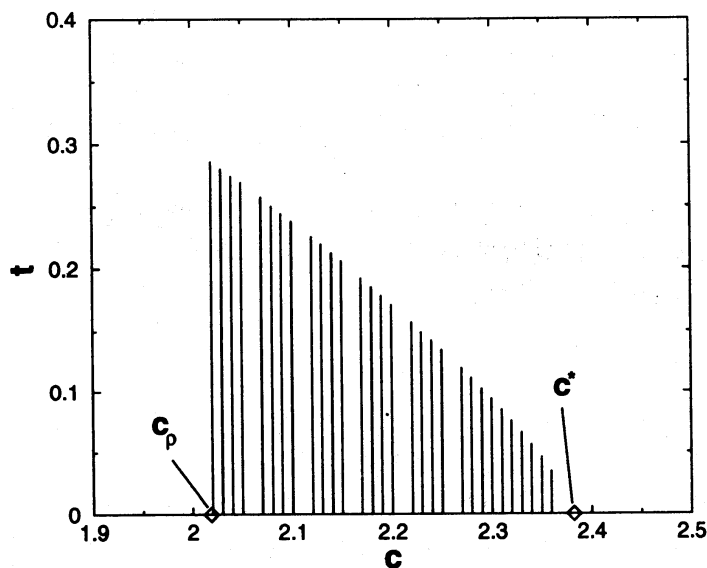


Figure 11: $R(c, q_n)$ の列の決定が数値的に容易な領域。線分は s_{n-2}, s_{n-1} を両端とする区間で ξ_{q_n} は単調になっている ($n \leq 10$) ことを確かめたことを示す。各線分の上端は不安定化のしきい t_{th} を示す。2つの菱形 (\diamond) はそれぞれ、実不変円が消えるパラメタ c_p 、実不変円の崩壊点 c^* を示す。回転数 ρ は γ^{-2} 。

3.3 θ_I のしきい値

θ_I のしきい値に対応する初期値 t_{th} を数値的に決定する。ヤコビ行列を前節の軌道列で評価して、固有値の大きい方の絶対値 $|\lambda|$ を2節と同様にモニターすると図(12)のようになる。

各 q_n に対して、 $|\lambda|$ は t の単調増加関数で図より左の領域ではほぼ1。 q_n の大きい方が $t = 0.23$ の近くまで $|\lambda| = 1$ のままでのび、あるしきいをこえるとより急速に発散する。この不安定化のしきいを t_{th} とする。

$R(c = 2.46, q_n = 33461)$ の初期値のうち、 t_{th} 直下の $t = 0.22952$ の軌道を使って、2節と同じようにつくった位相共役の近似を図(13)に示す。 t_{th} における自己相似性が期待できる。

4 さいごに

面積保存エノン写像の楕円型不動点のまわりで、回転数をひとつ固定したときの、不変円の族が調べられた。パラメタ c についての実不変円の族を折り返した形の、複素の不変円の族と、実不変円についての位相共役の解析接続による添数 θ_I の複素不変円の族とを数値計算で調べた。それらの添数集合の境界にあたる不変円はことごとくフラクタルになっていると思われる。また、実不変円の族の折り返しの場合、回転数 silver mean の場合にパラメタに関する相似則が得られた。最初の折り返し以外は Greene らによる結果から予想される範囲に収まっている。折り返しの方の位相共役の解析接続について(もちろんそれがあるとしての話)同様の調査をすることが今後の課題で、添数集合の境界を調べること、とくに t_{th} と θ^* とが数値計算上区別できるか等、明らかにしていくのがその先の課題だと考える。

導入部で少し触れた、滑らかな複素不変円の近傍軌道の安定性について2節で調べた不変円の族の不安定化の直前、直後調べてみた。図(14)に回転数 γ^{-2} の不変円 $\Gamma(\gamma^{-2})$ のまわりの滞留

点集合の断面を、 $\Gamma(\gamma^{-2})$ の不安定化直前、直後のそれぞれの場合について図 (14-a) は回転数 ω が十分に非共鳴になっている一連の不変円が $\Gamma(\gamma^{-2})$ の残っていることを示す。相空間のこの領域で $\Gamma(\gamma^{-2})$ が最後に不安定化する定化直後の図 (14-b) は、 $\Gamma(\gamma^{-2})$ の不安定化後にこの断面上の $\Gamma(\gamma^{-2})$ の周辺ことを示唆する。

図 (15) は近傍軌道の安定性を倍精度計算の iteration で調べたものを示す。オーダー 1 くらい離れたこと目安で $|Z| \leq 10$ の領域を離脱するまでの時間 t 。 $c = 1.6281$ (不安定化直前) の場合 $P(t)$ は巾則にしたがう、

$$P(t) \propto t^{-2}.$$

以下、図の時間の長さのスケールのみ考え、漸近的な振舞いは問わない。不変円は、iteration のみ 4 倍精度にした計算でも変わらなかった。同じく綺麗に指数関数の程度の時間の長さのスケールでは一般的な法則なのだと思う。例えば $\Gamma(\gamma^{-2})$ の周期点の周りの滞留点集合から無作為に選んだ点 $X = -0.59488 + 0.27475i$ と同じ測定をしても、やはり式 (22) と同じ結果を得た。図 (14-a) の不変円 I 様な樹状突起様の初期値について、 10^8 の iteration の後に領域 $|Z| \leq 10$ に残った。

一方、 $c = 1.6279$ (不安定化直後) の場合、 10^4 回までの iteration でほとんどの領域 $|Z| \leq 10$ を離れている。分布 $P(t)$ は同じく巾型で、 $P(t) \propto t^{-a}$ 、ここで a は測定され、指数は安定しない。 $P(t)$ の振舞いの違いは主に、 $\Gamma(\gamma^{-2})$ とそれにつながる近傍への拘束の有無と考えられ、不安定化の直前と直後での相空間の領域 $|Z| \leq 10$ の寄与は少ないだろう。今のような近可積分系でのこの種の測定では、指数関数がよく見られる。例えば文献 [5] によると、実平面上の力学で楕円型不動点の statistics f_t ([5] の notation で、これを規格化した p_t は上の測定で実平面上のオーダー 1 の大きさの窓で初期値を一様分布させた場合に当たる。survival probability ではないので注意。) の測定値は図の時間のスケールでは $f_t \propto t^{-2-a}$ 、ここで a はあまり指数は安定していない。初期値を分布させる窓が大きいことは図 (15) の場合にあたりと考えられる。つまり、偶然に初期値が安定性の島の階層構造の奥の軌道が島の階層構造または滞留点集合の樹状突起様の構造の奥の方へ入り込んでいる部分になる。

また不安定化前の分布 (22) について、初期値を同じ中心を持つ 4 次元超球面に選んだり、同じ中心を持つ別の平面に一様分布させたりしてもやはり同じ指数関数の時間の変化する方向が基本的に一つしかないと考えられる。これは図 (15-a) の滞留点集合は推定 3 次元であること、つまり、i) 不変円の弧の方向 θ 、ii) 回転数 ω (図 (14-a) の縦方向)、さらに iii) 添数 θ_I の族の方向、の 3 つが取れるのである。むしろ逆に、対称線上の複素不変円の位相共役の解析接続にあたる不変円をすべて見ないが、この不変円の族があるだろうことの状況証拠と今は考えている。

エノン写像の複素相空間は、4 次元実写像の相空間とも見ることができる (結合スタンダードマップ) の KAM 面の近傍の場合を考えると、i) 不変円の引張方向が 2 つ、ii) 回転数 ω の変化する方向が 2 つで全部埋まっているが、ii) は閉じておらず、共鳴部では空いている。アーノルド拡散では ii) の方向をすり抜ける写像の不変円とその解析接続による族の場合に、上で推定したように 4 次元相空間なのであれば、不変円からなる筒状の不変面の近傍軌道はアーノルド拡散の場合より空間が広いことになる。さらに、文献 [17] の実力学の場合の初通過時間分の近傍から離脱するまでの時間で、理想的状況に近づけると $\sim 1/T$) と比べて

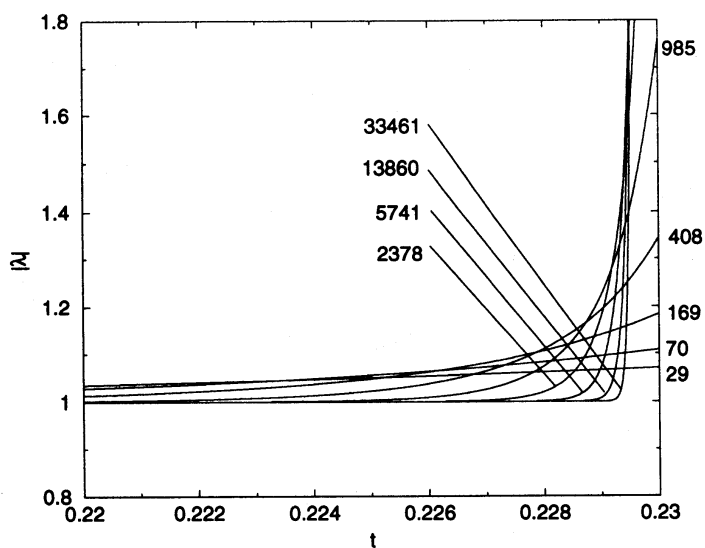


Figure 12: $R(c = 2.46, q_n)$ の各軌道の $|\lambda| - t$ 曲線。数字は q_n を示す。回転数は $\sqrt{2} - 1$ で図 (9) と同じ条件。

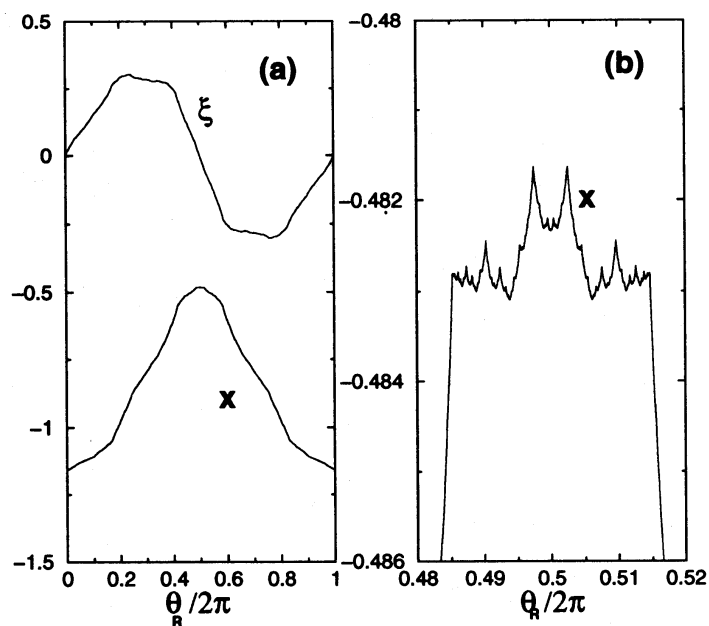


Figure 13: t_{th} 直下の $R(c = 2.46, q_n = 33461)$ による $X(\theta)$ の近似 (a) とその一部拡大 (b)。 $t = 0.22952$ 。

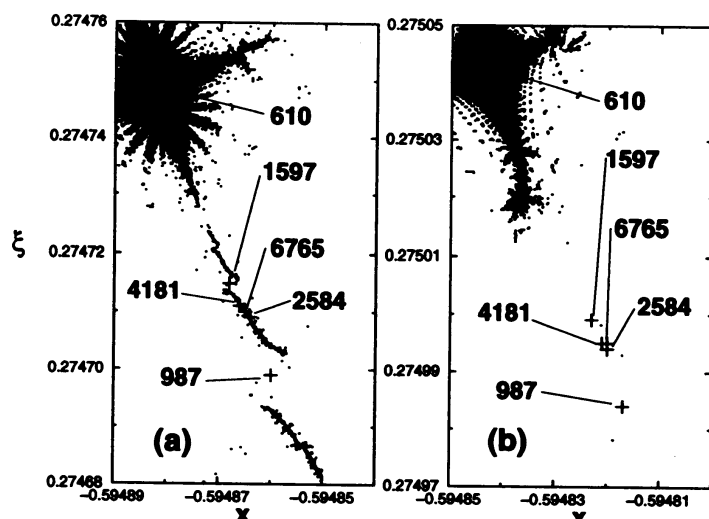


Figure 14: 滞留点集合 K の $\text{Fix}(S)$ による断面、(a) $\Gamma(\gamma^{-2})$ の不安定化の直前 ($c = 1.6281$) と (b) 直後 ($c = 1.6279$)。各点は $|Z_n| \leq 10$ ($|n| \leq 10^5$) なる軌道の初期値。十字は近似周期点列 $\Gamma_n(\gamma^{-2})$ の初期値を示し、数字はその周期を示す。図 (14-a) で周期 610 の十字は e 型の軌道で、そのまわりに滞留点集合がよく発達している。他の十字は ch 型か h 型の軌道の初期値で、数値滞留点集合はそこでは切断されている。

が速い。やはり複素不変円の場合の一つ残った方向が鍵になると思われるが、部分の方向と解釈して実際の軌道との整合性があるか調べてみたい。

References

- [1] T. Geisel, G. Radons and J. Rubner, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986), 2883.
- [2] G. Radons and R. E. Prange, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988), 1691.
- [3] A. Shudo and K. S. Ikeda, *Physica D* **115** (1998), 234.
- [4] A. Morbidelli and A. Giorgilli, *J. Stat. Phys.* **78** (1995), 1607.
- [5] C. F. F. Karney, *Physica* **8D** (1983), 360.
- [6] V.I. アーノルド、古典力学の数学的方法 (岩波書店、1980)
- [7] J. M. Greene, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 1183.
- [8] S. J. Shenker and L. P. Kadanoff, *J. Stat. Phys.* **27** (), 631.
- [9] R. S. MacKay, *Renormalisation in area-preserving maps* World Scientific, 1993)
- [10] V. I. Arnold, *Russ. Math. Surveys* **18** (1963), 9.

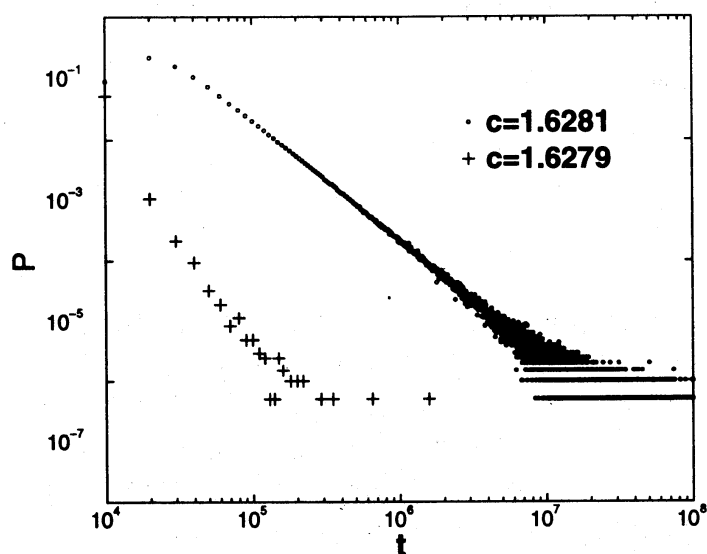


Figure 15: $\Gamma(\gamma^{-2})$ の不安定化の直前 ($c = 1.6281$) と直後 ($c = 1.6279$) のそれぞれの場合の、 $|Z_t| = \sqrt{|X_t|^2 + |Y_t|^2} > 10$ なる最小の t の分布。初期値は図 (14-a) 又は図 (14-b) の周期 6765 の十字が中心の $10^{-6} \times 10^{-6}$ の四角形で一様分布させた。

- [11] 丹羽敏雄、力学系 (紀伊国屋書店、1981)
- [12] J. M. Greene and I. C. Percival, *Physica*, **3D** (1981), 5
- [13] A. Berretti and L. Chierchia, *Nonlinearity*, **3** (1990), 39.
- [14] A. Berretti, A. Celltti, L. Chierchia and C. Falcolini, *J. Stat. Phys.*, **66** (1992), 1613.
- [15] P. R. McGarr and I. C. Percival, *Physica*, **14D** (1984), 49.
- [16] 高木貞治、初等整数論講義 (共立出版株式会社、1971)
- [17] Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota and K. Tanaka, *Prog. Theo. Phys. Supp.* **98** (1989), 36.