

ノンツイスト・ハミルトン系における不変トーラスの崩壊

篠原晋[†] (早大理工)

1 はじめに

近可積分ハミルトン系における不変トーラスの存在は Kolmogorov, Arnold, Moser (KAM) の定理によって保証される。近可積分系の不変トーラスの性質は、数値計算を援用した研究によっても詳しく調べられ、最終不変トーラス崩壊の臨界点や、その臨界点における相空間微細構造のスケール則等が決定された [12, 13]。最近では、不変トーラスの安定性 (robustness) と、回転数の数論的性質との詳しい関係も明らかになりつつある。そのような研究の多くは、KAM の定理が存在を保証する不変トーラスの精密な性質を理解しようとするものであるが、その一方で、KAM の定理が仮定する条件を破る系における不変トーラスの性質も研究されている。KAM の定理では、無摂動系にツイスト条件が課され、摂動関数には解析性に関する条件が課される [16]。ここでは、前者のツイスト条件が満たされない場合の不変トーラス崩壊過程を考える。

ツイスト条件は、作用変数 I から角速度 $\omega(I)$ への写像 $I \mapsto \omega(I)$ が一対一であることを課す条件である。その破れは、帯状シア一流のモデル [2, 4, 24] や負磁気シアートカマクのモデル [1, 9, 15] など、様々な数理モデルで見出されている。また、無摂動系がツイスト条件を満たす場合でも、相空間の局所構造を記述するハミルトニアンにツイスト条件の破れが現れる場合がある。たとえば、周期点の回転数が 1:3 共鳴を通過する際に起こる generic な分岐においてツイスト条件の破れが発生することが示されている [7]。

本報告では、ツイスト条件を破るハミルトン系 (ノンツイスト系) の典型例として詳しく研究されてきた quadratic non-twist 写像 [5, 6, 10, 11, 17, 19] について、ツイスト条件を破る相空間領域にどのような現象が起こるか述べ、それらを系統的に解析した我々の結果を述べる。

2 Quadratic non-twist map

Quadratic non-twist (QN) 写像は次式で定義される 2 パラメータ二次元保測写像である。

$$T : [-\pi, \pi) \times \mathbf{R} \mapsto [-\pi, \pi) \times \mathbf{R} : (x, p) \mapsto (x', p'),$$

$$\begin{cases} x' = x + f(p - K \sin(x)) \pmod{2\pi} \\ p' = p - K \sin(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$f(p) = 2\pi\nu - p^2. \quad (2)$$

ここで、 $\nu \in \mathbf{R}$ はツイスト関数 f の極大値を変えるパラメータ、 $K \in \mathbf{R}$ は非線形性の大きさを変えるパラメータである。この写像は、ツイスト関数 f が二次関数であるためツイスト条件

$$\frac{\partial x'(x, p)}{\partial p} \neq 0 \quad \text{for } \forall p \quad (3)$$

[†]現在の所属：立命館大理工

を破る. 二次のツイスト関数は一般に $f(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0$ (a_2, a_1, a_0 は定数) と書かれるが, 変数およびパラメータを

$$-\operatorname{sgn}(a_2) x \mapsto x, \quad \sqrt{|a_2|} \left(p + \frac{a_1}{2a_2} \right) \mapsto p, \quad (4)$$

$$-\operatorname{sgn}(a_2) \sqrt{|a_2|} K \mapsto K, \quad -\operatorname{sgn}(a_2) \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \right) \mapsto 2\pi\nu, \quad (5)$$

と置き換えることにより, ツイスト関数を式 (2) の形に帰着させることができる.

また, QN 写像は変換 $(p, K) \rightarrow (-p, -K)$, $(x, \nu) \rightarrow (x - 2\pi, \nu + 1)$ のもとで不変である. よって, 以下ではパラメータ値を次のような基本領域に制限する.

$$0 \leq K \leq \infty, \quad -0.5 \leq \nu < 0.5 \quad (6)$$

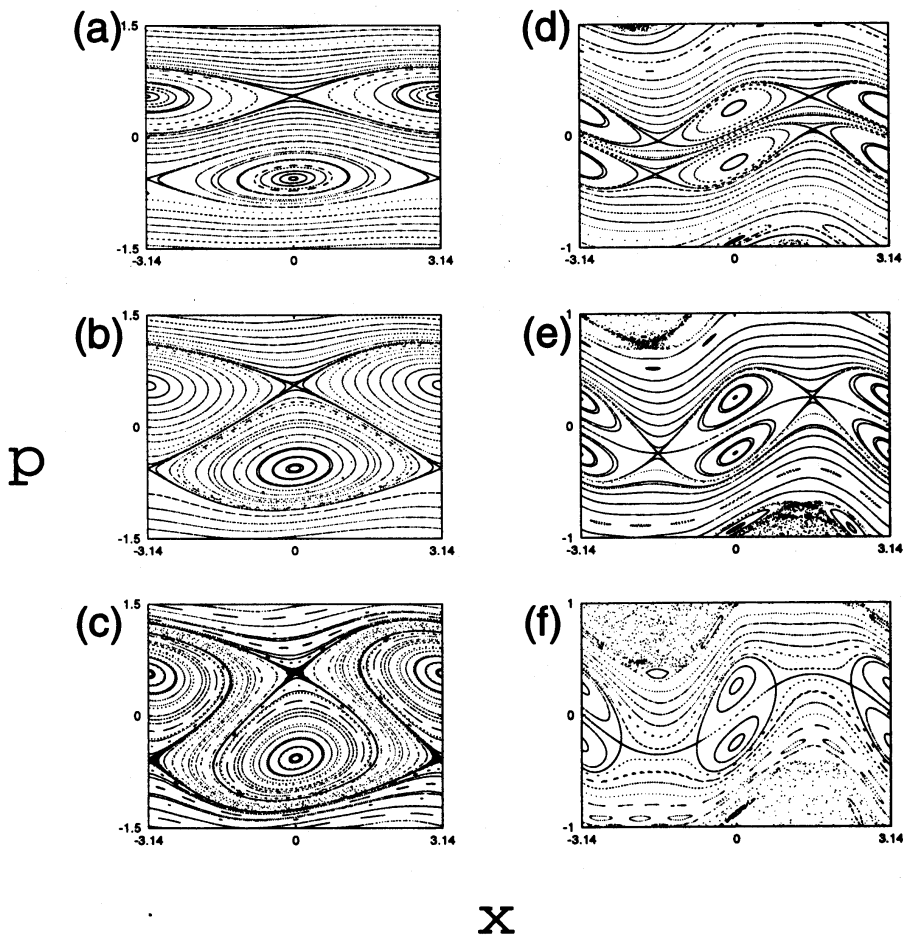


図 1: (a)-(c): $\nu = 0.05$ と固定し K を変化させた場合の, 周期 1 ツインチェーンのリコネクション過程; (a) $K = 0.05$, (b) $K = 0.1173906615$, (c) $K = 0.2$. (d)-(f): $\nu = -0.49$ と固定し K を変化させた場合の, 周期 2 ツインチェーンのリコネクション過程; (d) $K = 0.4$, (e) $K = 0.50132565$, (f) $K = 0.7$.

まずはじめに、ツイスト条件の破れが相空間構造の如何なる特徴として現れるのか述べる。 $K=0$ のとき QN 写像は可積分である。そのとき、QN 写像の不変トーラスは、 x 軸に平行な直線を描く。不変トーラス $p \equiv p_0$ の回転数は、ツイスト関数 $f(p_0)$ を 2π で割ったものに等しい。回転数が極値をとるところ、すなわち $p=0$ は、ツイスト条件が破れるところである。回転数の極値に対応する不変トーラスをシアールレス・トーラスと呼ぶ [5]。ツイスト条件 (3) は曲線 $p = K \sin(x)$ 上で破れており、 $K=0$ のときこの曲線はシアールレス・トーラスに一致する。

シアールレス・トーラスの両側には、同一回転数の軌道が存在し対をなす。摂動が加わると、有理数の回転数をもつ不変トーラスは「島 (island chains)」へ変わるが (Poincaré-Birkhoff の定理)、ノンツイスト系では、同一回転数の島がシアールレス・トーラスの両側に現れることになる (図 1(a)(d) 参照)。このように対になった島構造は、ツインチェーンと呼ばれる [22]。パラメータを変化させると、ツインチェーンのセパトリクスは接触し、セパトリクスの組替えが起こる。図 1(a)-(c) および (d)-(f) は、 ν の値を固定し、 K の値を変えたときの組替え過程である。このような過程は (セパトリクス) リコネクションと呼ばれる [10]。QN 写像では、偶数周期のツインチェーンのセパトリクス接触では図 1(e) のように双曲点の結合を伴う。一方、奇数周期の場合は図 1(b) のように、双曲点の結合は起きず、 x 方向に位相がずれて接触する。

3 QN 写像における indicator points

QN 写像では、写像の対称性を用いることによって、シアールレス・トーラスが通過する幾つかの点の座標を導出することが出来る。それらの点を初期点とする軌道の振舞いを調べることにより、シアールレス・トーラス、リコネクション現象、最終不変トーラス崩壊などに関して詳しい情報が得られることから、我々はそれらの点を indicator points と呼んだ [19]。本節では、QN 写像の二つの対称性について述べ、indicator points を導出する。

3.1 QN 写像の対称性

QN 写像は次の二つの対称性をもつ。

- (a) 写像 T は包合 (involution) の積で表される。すなわち、 $M_1^2 = M_2^2 = 1$ を満たす次で定義される写像 M_1, M_2 を用いて、 $T = M_2 M_1$ と書ける。

$$M_1 : \begin{cases} x' = -x \\ p' = p - K \sin(x), \end{cases} \quad (7)$$

$$M_2 : \begin{cases} x' = -x + 2\pi\nu - p^2. \pmod{2\pi} \\ p' = p \end{cases} \quad (8)$$

- (b) 写像 T は次式で定義される写像 S と可換である。i.e., $TS = ST$.

$$S : \begin{cases} x' = x + \pi. \pmod{2\pi} \\ p' = -p \end{cases} \quad (9)$$

3.2 Indicator points の導出

QN 写像におけるシアーレス・トーラスは次の性質を満たす。

補題 シアーレス・トーラスは写像 S , M_1 , M_2 の不変集合である。

このことは次のようにして示される。シアーレス・トーラスを I_s とおくと, $TS = ST$ より, 不変トーラス SI_s と I_s は等しい回転数を持つ。シアーレス・トーラスの回転数は, 回転数の極値に相当するので, $SI_s = I_s$ でなければならない。すなわち, シアーレス・トーラスは写像 S の不変集合である。また, 写像 T の任意の不変トーラス I が M_1 および M_2 の不変集合であることが次のようにして示せる。不変トーラス I と p 軸との交点を $x_0 = (0, p_0)$ とおき, 不変トーラスを $I = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n x_0$ と表す。 M_1 の定義式 (7) より, $M_1 x_0 = x_0$ となるので,

$$M_1 I = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} M_1 T^n x_0 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n} M_1 x_0 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n} x_0 = I \quad (10)$$

が成り立つ。よって, T の不変トーラス I は M_1 の不変集合である。また, $TI = I$ より $M_1 I = M_2 I$ なので, I は M_2 の不変集合でもある。 ■

上の補題を用いて, 次の命題を示すことができる。

命題 シアーレス・トーラスが存在するならば, 次の点を通過する。

$$x_1^{(\pm)} = (x_1^{(\pm)}, p_1^{(\pm)}) = \left(\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{K}{2} \right), \quad (11)$$

$$x_2^{(\pm)} = (x_2^{(\pm)}, p_2^{(\pm)}) = \left(\pi(\nu \pm \frac{1}{2}), 0 \right). \quad (12)$$

命題の証明 まず, $x_1^{(\pm)}$ がシアーレス・トーラス上にあることを示す。直線 l_{\pm} を次のように定義する。

$$l_{\pm} = \left\{ (x, p) \mid x = \pm \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (13)$$

これらの直線は次を満たす。

$$M_1 l_{\pm} = S l_{\pm} = l_{\mp}, \quad (14)$$

シアーレス・トーラスと直線 l_+ が横断的に交差する場合を考え, その $2s-1$ 個の交点 ($s \in \mathbf{N}$) を

$$c_j = \left(\frac{\pi}{2}, P_j \right), \quad j = 1, \dots, 2s-1 \quad (15)$$

とおく。ただし, $P_1 > P_2 > \dots > P_{2s-1}$ とする。補題よりシアーレス・トーラスは, 写像 M_1 および写像 S の不変集合であり, $M_1 l_+ = l_-$ だから, c_j の M_1 による像と S による像は, シアーレス・トーラスと直線 l_- との交点になる。

$c'_j = M_1 c_j$ とおくと, 式 (14) より c'_j は直線 l_- 上にある。 c'_j の p 成分を P'_j とすると, M_1 の定義式 (7) より $P'_j = P_j - K$ なので,

$$P'_1 > P'_2 > \dots > P'_{2s-1} \quad (16)$$

が成り立つ。また、 $c_j'' = Sc_j$ とおくと、式 (14) より c_j'' は直線 l_- 上にある。 c_j'' の p 成分を P_j'' と書くと、 S の定義式 (9) より $P_j'' = -P_j$ なので、

$$P_1'' < P_2'' < \cdots < P_{2s-1}'' \quad (17)$$

が成り立つ。直線 l_- とシアールレス・トーラスの交点の集合は、 $\cup_j c_j' = \cup_j c_j''$ と表されるが、式 (16)(17) と交点の数が奇数個であることから、 $c_s' = c_s''$ が成り立つ。すなわち、 c_s は次の方程式を満たす。

$$M_1 c_s = S c_s \quad (18)$$

この方程式を解くと、シアールレス・トーラスと直線 l_{\pm} との交点の座標 (式 (11)) が得られる。

次に、 $x_2^{(\pm)}$ がシアールレス・トーラス上にあることを示す。写像 T の x に関する定義域を $[-\pi, \pi)$ から

$$[\pi(\nu-1), \pi(\nu+1)) \quad (19)$$

に取り直した写像を T' とおき、線分 m_{\pm} を次のように定義する。

$$m_+ = \{(x, p) \mid x \in [\pi\nu, \pi(\nu+1)), p = 0\} \quad (20)$$

$$m_- = \{(x, p) \mid x \in [\pi(\nu-1), \pi\nu), p = 0\} \quad (21)$$

M_2 と S についても、定義域を式 (19) に取り直したものを、それぞれ M_2' 、 S' とおくと、

$$M_2' m_{\mp} = S' m_{\pm} = m_{\pm} \quad (22)$$

が成り立つ。

シアールレス・トーラスと線分 m_- との交点を

$$d_j = (X_j, 0), \quad j = 1, \dots, 2s-1, \quad s \in \mathbf{N} \quad (23)$$

とおく。ただし、 $X_1 > X_2 > \cdots > X_{2s-1}$ とする。補題よりシアールレス・トーラスは、写像 M_2' と写像 S' の不変集合であり、また $M_2' m_- = m_+$ が成り立つので、 d_j の M_2' による像および S' による像は、シアールレス・トーラスと線分 m_+ の交点になる。すなわち、 $d_j' = M_2' d_j$ とおくと、 $d_j' = (X_j', 0)$ と書け、 M_2 の定義式より $X_j' = -X_j + 2\pi\nu$ である。したがって、

$$X_1' < X_2' < \cdots < X_{2s-1}' \quad (24)$$

また、 $d_j'' = S' d_j$ とおくと、 $d_j'' = (X_j'', 0)$ と書け、 S の定義式より $X_j'' = X_j + \pi$ である。したがって、

$$X_1'' > X_2'' > \cdots > X_{2s-1}'' \quad (25)$$

が成り立つ。式 (24)(25) と、交点の数が奇数個であることから、 $d_s' = d_s''$ 、つまり

$$M_2 d_s = S d_s \quad (26)$$

が成り立つ。この方程式を解くと、シアールレス・トーラスと x 軸との交点の座標 (式 (12)) が得られる。

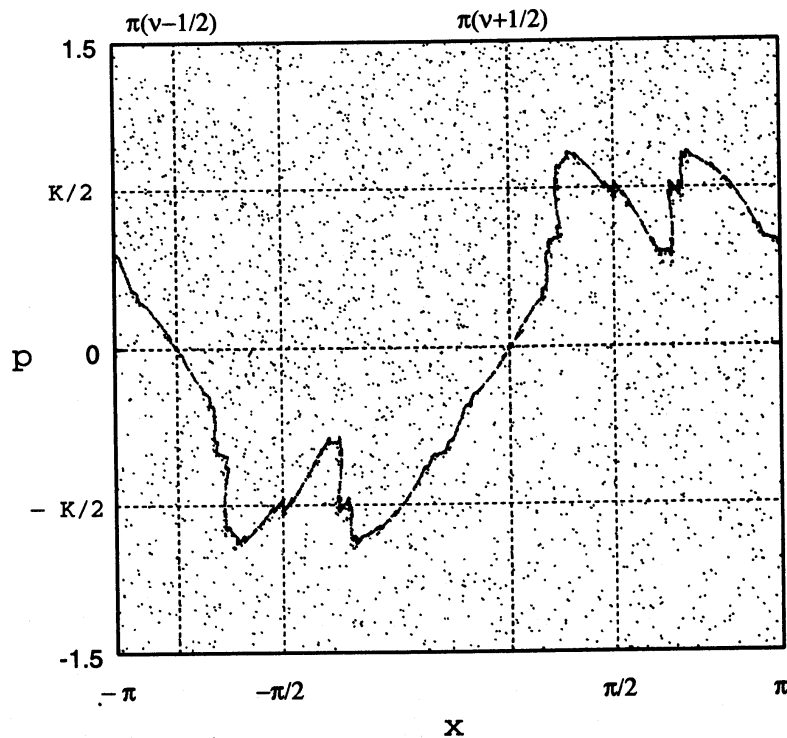


図 2: 回転数 $1/\gamma$ のシアーレス・トーラス崩壊臨界点 $(\nu, K) = (-0.313951, 1.54156)$ での相空間.

式 (11)(12) で定義される 4 点 $x_1^{(+)}, x_1^{(-)}, x_2^{(+)}, x_2^{(-)}$ を QN 写像における indicator points (IP) と呼ぶ. 黄金比の逆数 $1/\gamma = (\sqrt{5}-1)/2$ を回転数にもつシアーレス・トーラスが最終不変トーラスとなって崩壊する臨界パラメータ値[†] での相空間を図 2 に示す. 図 2 ではシアーレス・トーラスを IP を初期点とする軌道として描いている.

4 Indicator points を初期点とする軌道の振舞い

4.1 Indicator points の回転数

本節では IP を初期点とする軌道の振舞いを, その回転数によって分類する. $Sx_j^{(\pm)} = x_j^{(\mp)}$ なので, $x_j^{(+)}$ と $x_j^{(-)}$ を初期点とする軌道の回転数は等しい. そこで, $x_j^{(+)}$ と $x_j^{(-)}$ の軌道の回転数を \mathcal{R}_j とおく. i.e.,

$$\mathcal{R}_j(\nu, K) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \left(\pi_x \left(\hat{T}^N \hat{x}_j^{(s)} \right) - \pi_x \left(\hat{x}_j^{(s)} \right) \right). \quad s = + \text{ or } - \quad (27)$$

ここで, 写像 \hat{T} , 点 \hat{x} はそれぞれ写像 T , 点 $x \in \mathbf{T} \times \mathbf{R}$ の \mathbf{R}^2 への持ち上げを表す. また, $\pi_x(\hat{x})$ は点 $\hat{x} = (x, p) \in \mathbf{R}^2$ の x 成分を表す. $x_j^{(\pm)}$ の回転数が値 α をとるようなパラメータ値の集合を $\mathcal{P}_j(\alpha)$ とおく. i.e.,

$$\mathcal{P}_j(\alpha) = \left\{ (\nu, K) \mid \mathcal{R}_j(\nu, K) = \alpha \right\}. \quad j = 1, 2 \quad (28)$$

[†]回転数 $1/\gamma$ のシアーレス・トーラス崩壊の臨界パラメータ値 $(\nu_c, K_c) = (-0.313951, 1.54156)$ は, del-Castillo-Negrete 等によって決定された (論文 [5], 第 4 節参照).

とくに $K = 0$ のとき IP の回転数は ν なので,

$$(\alpha, 0) \in \mathcal{P}_j(\alpha), \quad j = 1, 2 \quad (29)$$

が成り立つ.

あるパラメータ値 (ν_0, K_0) で回転数 α (α は無理数) のシアーレス・トーラスが存在するとき, IP の軌道はシアーレス・トーラス上を稠密に埋めるので, $\mathcal{R}_1(\nu_0, K_0) = \mathcal{R}_2(\nu_0, K_0)$ である. したがって, 回転数 α のシアーレス・トーラスが存在するパラメータ区間において, $\mathcal{P}_1(\alpha)$ と $\mathcal{P}_2(\alpha)$ は一致する. しかし, シアーレス・トーラスが存在しない場合, 両者は一致するとは限らない. たとえば, α が有理数の場合, $\mathcal{P}_1(\alpha)$ と $\mathcal{P}_2(\alpha)$ は一致しない (第 4.3 節参照).

4.2 Indicator points の回転数 \mathcal{R}_j が無理数の場合

Del-Castillo-Negrete 等は, IP の回転数が黄金比の逆数 $1/\gamma = (\sqrt{5} - 1)/2$ になる場合の集合 $\mathcal{P}_j(1/\gamma)$ を, $(\nu, K) = (1/\gamma, 0)$ を通る一次元曲線として数値的に決定している [5]. さらに彼らは, その一次元曲線にパラメータ値を制限した QN 写像を考え, Greene の方法 [8] を用いて回転数 $1/\gamma$ のシアーレス・トーラス崩壊の臨界点を決定した. QN 写像では, 任意にパラメータ値を変化させた場合, 不変トーラス崩壊過程とリコネクション過程が並行して進み, 相空間構造の変化は大変複雑なものになるが, パラメータ値を $\mathcal{P}_j(\gamma)$ に制限した場合は, リコネクション現象を「凍結」させることができ, 不変トーラス崩壊過程のみを追跡することが可能になる.

4.3 Indicator points の回転数 \mathcal{R}_j が有理数の場合

次に, IP の回転数が有理数 α になる場合, すなわち IP が周期点またはヘテロクリニック点になる場合を考える. $K = 0$ のとき, IP は回転数 α のシアーレス・トーラス ($p \equiv 0$) 上にあるが, そのシアーレス・トーラス (共鳴トーラス) は $K > 0$ で消滅してしまう. しかし, $K > 0$ のときも $\mathcal{P}_j(\alpha)$ は特別なパラメータ値に対応することが数値的に調べた結果明らかとなった. α が有理数の場合, 集合 $\mathcal{P}_j(\alpha)$ はセパトトリクス上の接触条件を与える. 図 3(a)(b) に, それぞれ $\mathcal{R}_1 = 1/2$, $\mathcal{R}_1 = 1/3$ を満たすパラメータ値での相空間を示す. 図 3(a) では $x_1^{(\pm)}$ が双曲点になり, $x_2^{(\pm)}$ がセパトトリクス上にある. 一方, 図 3(b) では, $x_1^{(\pm)}$, $x_2^{(\pm)}$ がともにセパトトリクス上にある.

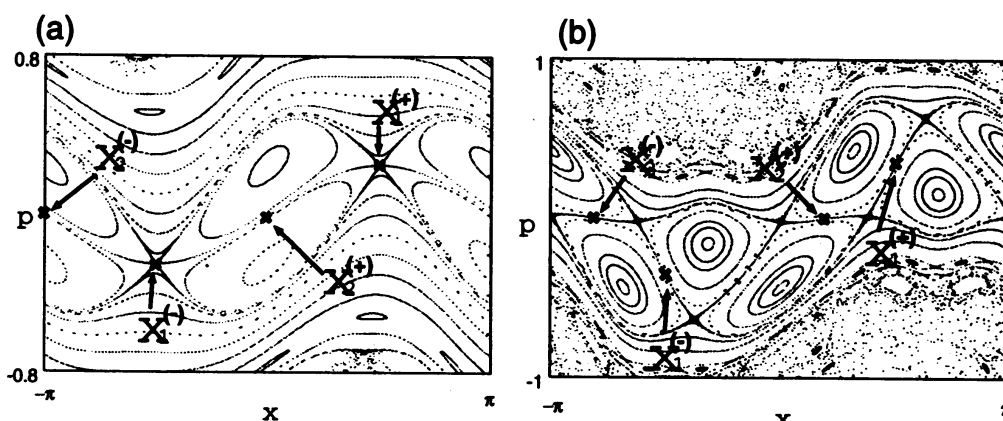


図 3: (a) $\nu = -0.4900528$, $K = 0.5$, (b) $\nu = -0.3124513$, $K = 0.7$.

表 1. セパラトリクス結合時における IP の振舞い

	$x_1^{(\pm)}$ と $x_2^{(\pm)}$ の振舞い
偶数周期チェーン結合時	どちらか一方が双曲点. もう一方はセパラトリクス上.
奇数周期チェーン結合時	ともにセパラトリクス上.

第 2 節で述べたように、ツインチェーンの周期の偶奇によって、セパラトリクスの結合の仕方は異なる。すなわち、偶数周期の場合は双曲点の結合を伴い、奇数周期の場合は伴わない。様々な回転数のツインチェーンについて数値的に調べた結果、セパラトリクス結合時の $x_1^{(\pm)}$, $x_2^{(\pm)}$ の振舞いは、表 1 のようにまとめられることが分かった。ただし、この対応関係は非線形性のパラメータ K の値が十分小さい場合についてである。 K の値が大きくなると、ツインチェーンを構成する双曲点が生ずる場合があり [19]、そのような場合は、新たなツインチェーンが生まれ、上のような簡単な対応関係にはまとめられなくなる。

表 1 の対応関係を用いれば、IP の振舞いからセパラトリクス接触の閾値を決定することができる。以下では、IP が (a) 偶数周期の周期点になる条件、および (b) 奇数周期双曲点のホモクリニック点になる条件を求める。このような条件を式で表すには、IP の \mathbf{R}^2 への持ち上げを用いるのが便利である。 $x_1^{(\pm)}$, $x_2^{(\pm)}$ の \mathbf{R}^2 への持ち上げをそれぞれ次のように与える。

$$\hat{x}_1^{(r)} = (x_1^{(r)}, p_1^{(r)}) = \left(\frac{\pi}{2}(2r-1), (-1)^{r+1} \frac{K}{2} \right), \quad (30)$$

$$\hat{x}_2^{(r)} = (x_2^{(r)}, p_2^{(r)}) = \left(\pi\nu + \frac{\pi}{2}(2r-1), 0 \right). \quad (31)$$

ここで $r \in \mathbf{Z}$ である。また以下では、 $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ で定義された写像 F の \mathbf{R}^2 への持ち上げを \hat{F} と書く。 $x_j^{(\pm)}$ ($j=1, 2$) が方程式 (18)(26) の解であることに対応して、 $\hat{x}_j^{(r)}$ は次を満たす。

$$\hat{M}_j \hat{x}_j^{(r)} = R^r \hat{S} \hat{x}_j^{(r)}, \quad j=1, 2 \quad (32)$$

ここで、 $R(x, p) = (x - 2\pi, p)$ である。

(a) IP が偶数周期の周期点になる条件

$x_j^{(\pm)}$ が回転数 P/Q (Q は偶数) の周期点になる条件は

$$R^P \hat{T}^Q \hat{x}_j^{(r)} = \hat{x}_j^{(r)}, \quad j=1, 2 \quad (33)$$

と書かれる。この条件は、 ν と K の関係式を定め、その関係式が $\mathcal{P}_j(P/Q)$ に相当する。8 以下の偶数 Q について、式 (33) から $\mathcal{P}_j(P/Q)$ を求めると、表 2 のようになる。

表 2. IP が偶数周期の周期点になる条件

Q	P	$\mathcal{P}_1(P/Q)$	$\mathcal{P}_2(P/Q)$
2	-1	$8\pi(\nu - P/Q) = K^2$	$\nu - P/Q = 0$
4	± 1	$8\pi(\nu - P/Q) = K^2$	$4\pi(\nu - P/Q) = K^2 \cos^2(\pi\nu)$
6	± 1	$24\pi(\nu - P/Q) = K^2(2 + \xi(\nu, K)^2)$	$3\pi(\nu - P/Q) = K^2 \cos^2(\pi\nu)$
8	$\pm 3, \pm 1$	$16\pi(\nu - P/Q) = K^2(1 + \xi(\nu, K)^2)$	$8\pi(\nu - P/Q) = K^2 \cos^2(\pi\nu)(2 + \eta(\nu, K)^2)$

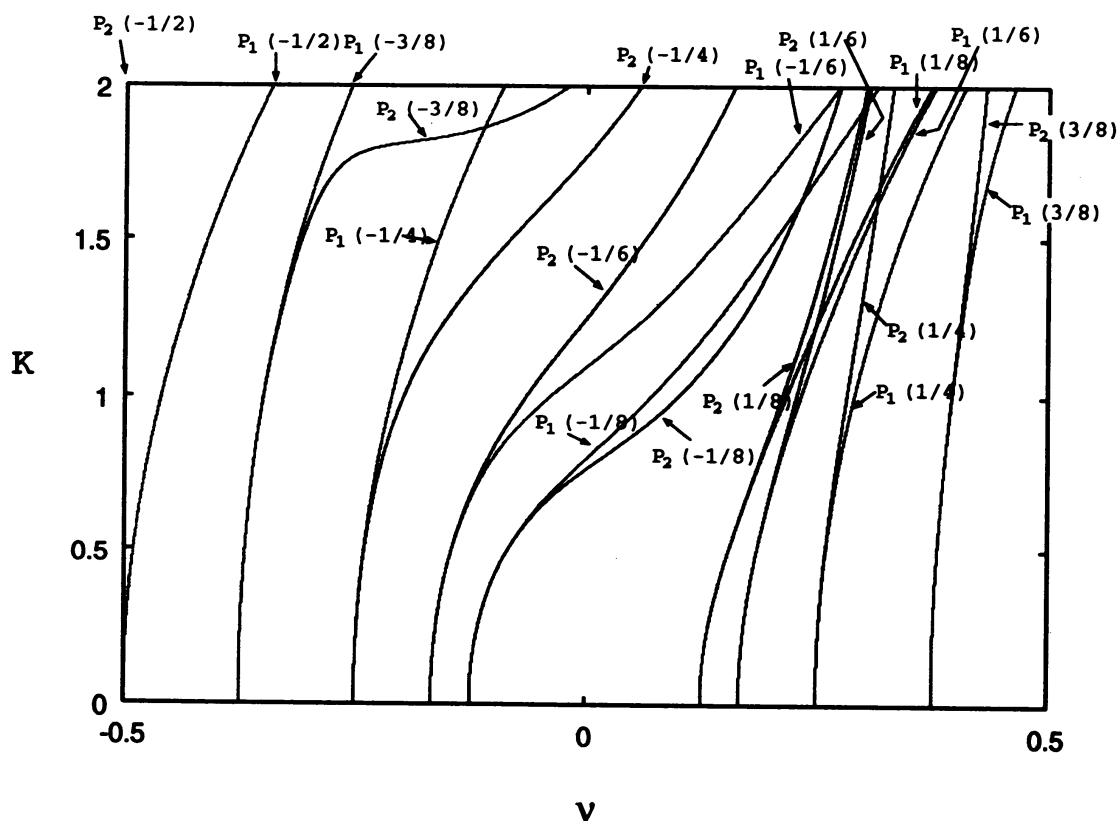


図 4: Indicator points が偶数周期の周期点になるパラメータ値.

ここで,

$$\xi(\nu, K) = 1 + 2 \cos \left(2\pi\nu - \frac{1}{4}K^2 \right), \quad (34)$$

$$\eta(\nu, K) = 1 + \frac{\cos(3\pi\nu - K^2 \cos^2(\pi\nu))}{\cos(\pi\nu)}, \quad (35)$$

とおいた. 図 4 に表 2 の関係式のグラフを示す. 表 2 および図 4 から明らかなように, IP が周期点になる場合は, 集合 \mathcal{P}_1 と \mathcal{P}_2 は異なる. \mathcal{P}_1 と \mathcal{P}_2 のどちらがセバトリクスとの接触条件を与えるかは P, Q に依存する.

(b) IP が奇数周期双曲点のヘテロクリニック点になる条件

図 3(b) のように $x_j^{(\pm)}$ が回転数 P/Q (Q は奇数) の双曲点のヘテロクリニック点であるならば, $\mathcal{R}_j = P/Q$ が成り立つ. 幾つかの奇数周期ツインチェーンについて数値的に調べた結果, IP がヘテロクリニック点になるのは, ツインチェーンの上側の双曲点から発する安定 (不安定) 多様体と, 下側の双曲点から発する不安定 (安定) 多様体とがちょうど接するときであることが分かった. リコネクション過程では, 上側の双曲点のタングルと下側の双曲点のタングルが通過するため (図 5 参照), 微小であるが有限のパラメータ区間で両タングルは交差する. そのパラメータ区間の端点を与える条件が $\mathcal{R}_1(\nu, K) = P/Q$ と $\mathcal{R}_2(\nu, K) = P/Q$ である. 例として図 6(a)(b) に, 周期 1 のツインチェーンについて, 上側双曲点の安定多様体と下側双曲点の不安定多様体の接触時と分

離時の様子を示す。 K を固定して ν を増していったときに、二つのチェーンが接し始めるときに $x_2^{(\pm)}$ がタングルの接点となり $R_2 = P/Q$ が成り立ち (図 6 (a)), 二つのチェーンが離れるときに $x_1^{(\pm)}$ が接点となって $R_1 = P/Q$ が成り立つ (図 6(b))。

セパトリクス接触時に IP がヘテロクリニック点になることを利用すると、奇数周期チェーンのセパトリクス接触閾値を精密に決定することができる。 $x_1^{(\pm)}$ が回転数 P/Q (Q は奇数) の双曲点のヘテロクリニック点になるパラメータ値、すなわち $P_1(P/Q)$ を、 $Q \leq 9$ の全ての回転数に対して数値的に求めたものを図 7 に示す[§]。非線形性のパラメータ K の値が大きくなるにつれ、ツインチェーンの双曲点近傍の不安定性も大きくなる。そのため図 7 では、数値計算の精度の限界から、ある有限の K までしか $P_1(P/Q)$ が求められていない。

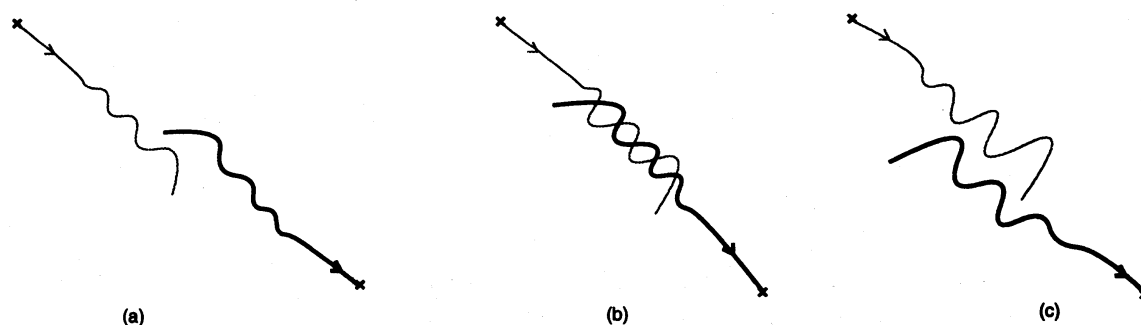


図 5: リコネクション過程におけるタングルの振舞い

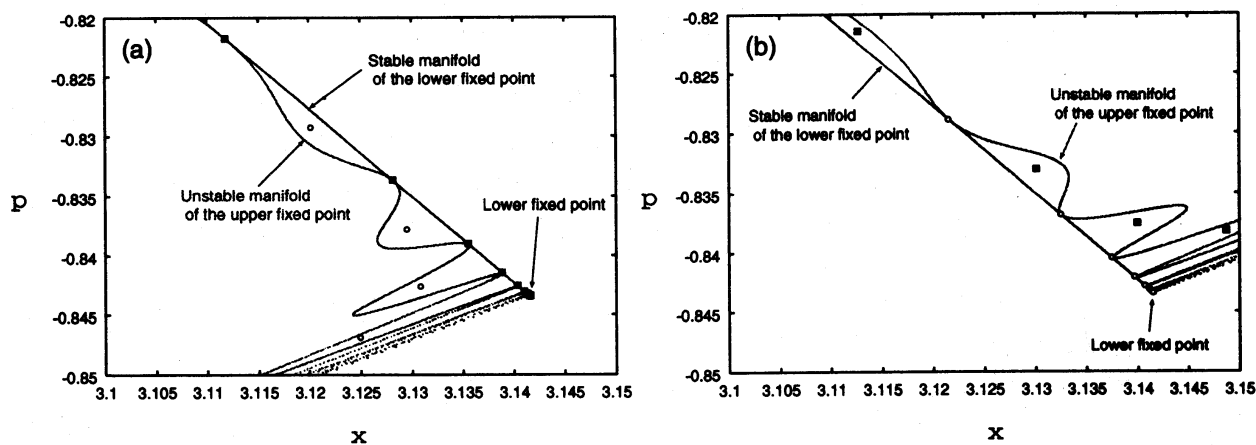


図 6: $K = 0.4$, (a) $\nu = 0.113217295446379$, (b) $\nu = 0.113221565539798$. \circ , \blacksquare は、それぞれ $x_1^{(\pm)}$, $x_2^{(\pm)}$ を初期点とする軌道を表す。

[§] $P_1(P/Q)$ が表すパラメータ曲線と $P_2(P/Q)$ が表すパラメータ曲線との差は極僅かである。たとえば、図 6 の場合、両パラメータ曲線の ν 方向への差は $K = 0.4$ のとき $\mathcal{O}(10^{-6})$ である。

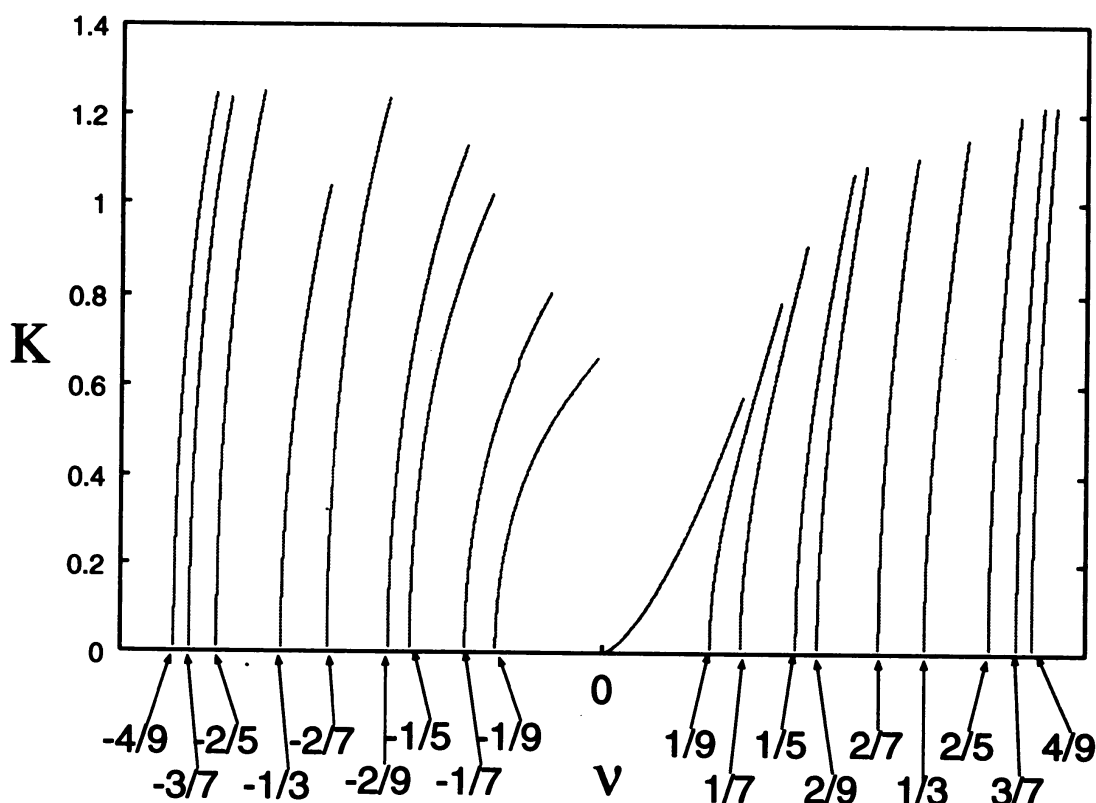


図 7: Indicator points $x_1^{(\pm)}$ が奇数周期双曲点のヘテロクリニック点になるパラメータ値 $\mathcal{P}_1(P/Q)$.

5 QN 写像における最終不変トーラスの崩壊

QN 写像ではツイスト条件が破れている相空間領域の不変トーラスが、他の不変トーラスに比べ安定 (robust) である。非線形性を十分大きくすると、相空間の大半はカオスになり、IP の近傍の不変トーラスが残存し、カオス領域を二つに分割する (図 8 参照)。そこで、IP を初期点とする軌道が p 方向に有界かどうかを調べることにより、相空間に不変トーラスが存在するかどうかを判定することが出来る。

図 9 は、パラメータ空間 (ν - K 空間) の基本領域 (式 (6)) において、IP の軌道が有界であるかどうかを数値的に調べた結果である。灰色の領域のパラメータ値では、IP の軌道が有界になり、白い領域では非有界 (拡散的) になる。数値計算では、IP を写像 T で 10^5 回反復し、その間 p の絶対値が 2 を越えない場合を有界とした。この数値計算において IP の軌道が有界ならば、次の二つの可能性が考えられる: (i) シアーレス・トーラスが存在し、IP はその上にある; (ii) シアーレス・トーラスは存在しないが、軌道を有界領域に閉じ込める不変トーラスが存在する。つまり、IP の軌道が有界ならば、相空間に不変トーラスが存在することが言える。それに対して、IP の軌道が非有界ならば、不変トーラスは存在し得ない。したがって、図 9 の灰色領域と白色領域の境界は、最終不変トーラス崩壊の臨界点に相当する。第 4.2 節で述べた del-Castillo-Negrete 等が決定した臨界点は、その境界の一点になっている。

不変トーラスの存在・非存在の相図に、第 4 節で求めた $\mathcal{P}_j(P/Q)$ を重ねたのが図 10 と図 11 である。これらの図から、不変トーラス存在相と非存在相の境界の形状は、曲線群 $\mathcal{P}_j(\alpha)$ が骨組みを与えていることが分かる。すなわち、IP の回転数 $\mathcal{R}_j(\nu, K)$ が一定になるようにパラメー

タを変化させた場合に、大域的カオスの発生が一点で起こる。Del-Castillo-Negrete 等の結果は、 $\mathcal{R}_j(\nu, K) = 1/\gamma$ が満たされるようにパラメータを変化させた場合、シアレス・トーラスが最終不変トーラスになることを示したものであったが、このことは $1/\gamma$ だけに限らない。我々は、 α が $\sqrt{2}-1$ および $e/10$ の場合について、 $\mathcal{R}_j(\nu, K) = \alpha$ が満たされるようにパラメータを変化させた場合の不変トーラス崩壊過程を調べたが、いずれの場合もシアレス・トーラスが最終不変トーラスであることを確認した。図 12 に臨界点での相空間を示す。 $\sqrt{2}-1$ は、連分数展開の部分商が全て 2 になる数で、しばしば silver mean と呼ばれる [14]。この数は実二次無理数であるがノーブル数 (連分数展開の部分商があるところから全て 1 になる無理数) ではない。また、 $e/10$ は連分数展開に特別な規則性をもたず、ノーブル数でも実二次無理数でもない。これらの結果から、 $\mathcal{R}_j(\nu, K) = \alpha$ が満たされるようにパラメータを変化させた場合、シアレス・トーラスが最終不変トーラスになるという性質は、かなり広いクラスの無理数 α に対してなりたつことが予想される。

6 結語

本報告では、ノンツイスト系の典型例として研究されてきた QN 写像に対して indicator points を定義し、それらを初期点とする軌道の振舞いと、ツイスト条件の破れから生じる相空間構造との関係を述べた。さらに、indicator points を用いて、大域的カオス発生の臨界点を二次元パラメータ空間において決定し、不変トーラス存在相と非存在相の境界の骨組みが、ツイストチェーンのセパトリクス接触閾値によって与えられていることを示した。

QN 写像系の著しい特徴の一つは、シアレス・トーラスが他の不変トーラスに比べて robust であるという性質である。シアレス・トーラスの robustness は、QN 写像のような特殊な対称性 (式 (9)) を持たない他のノンツイスト系でも報告されており [1, 11]、ノンツイスト系に普遍的な性質と予想される。ツイスト条件の破れと不変トーラスの robustness の関係を明らかにすることは今後の課題である。

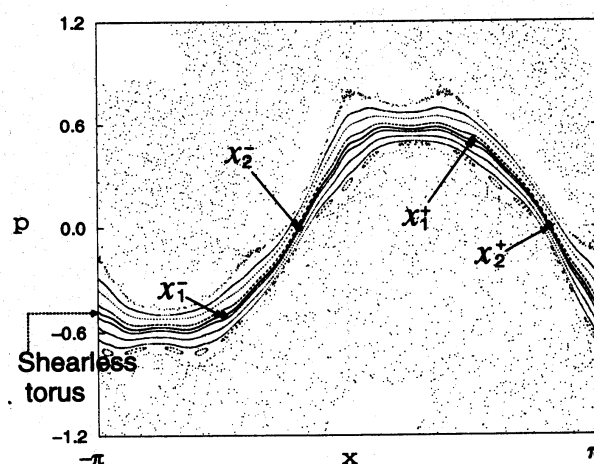


図 8: $\nu = 0.304348, K = 1.0$ のときの相空間。

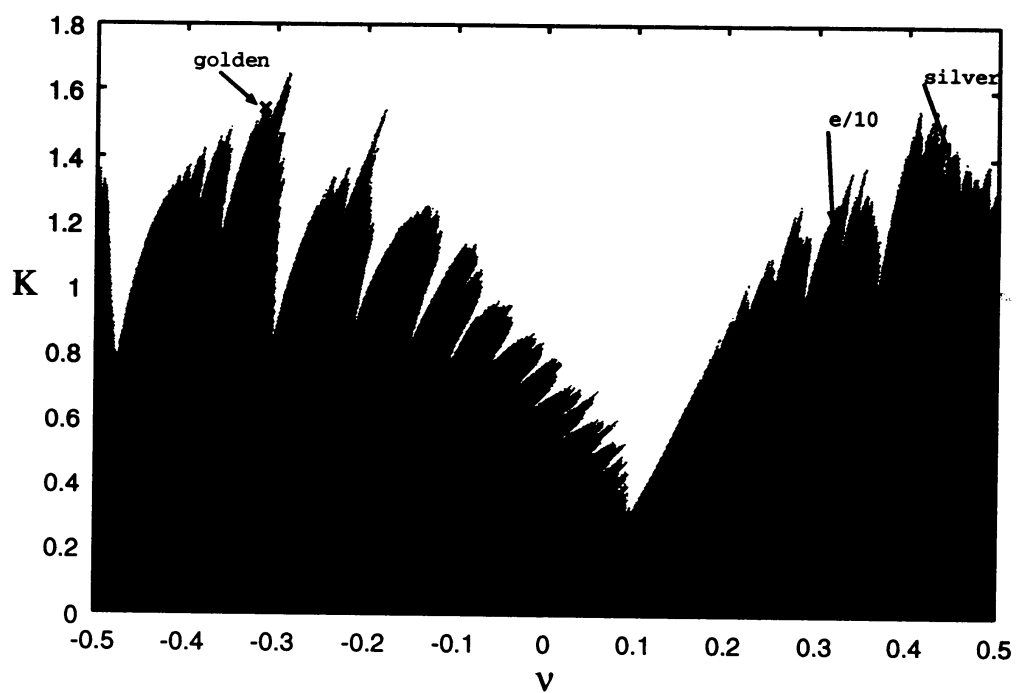


図 9: 不変トーラスの存在・非存在を表す相図. 回転数が golden mean, silver mean, $e/10$ のシアーレス・トーラス崩壊の臨界点に×印が記されている.

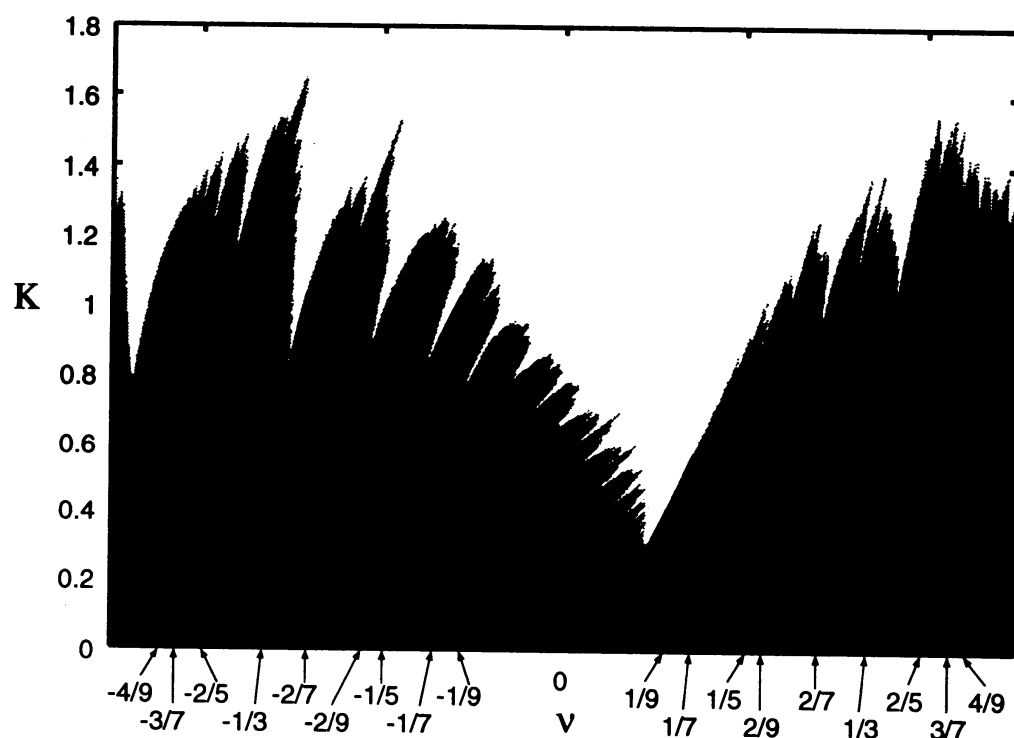


図 10

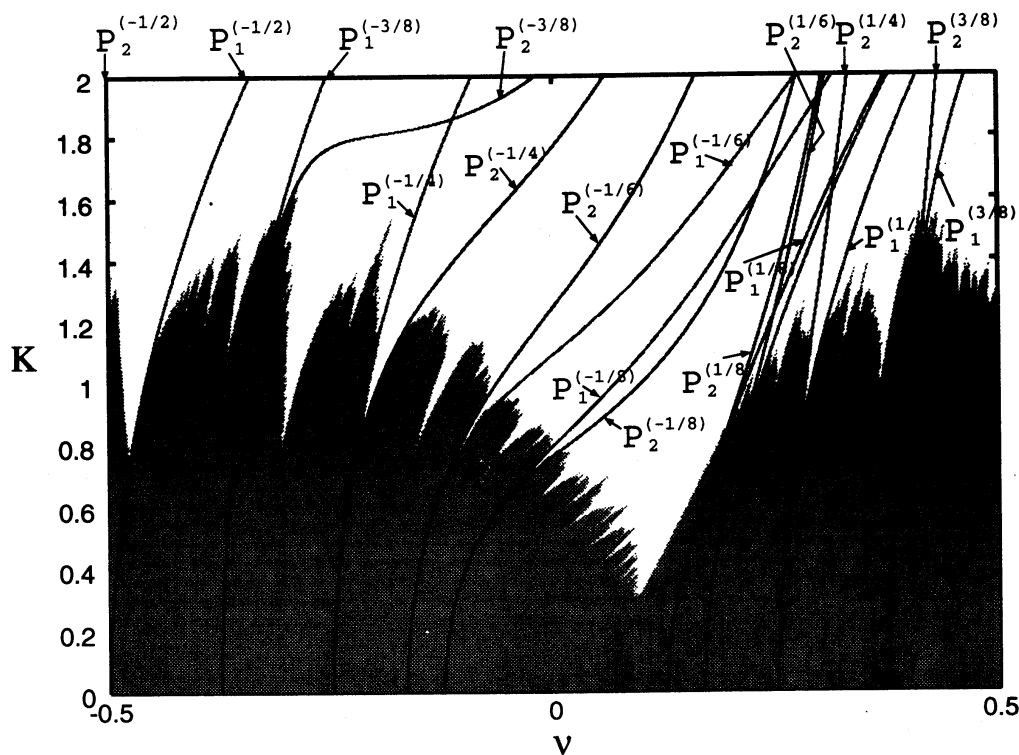


図 11

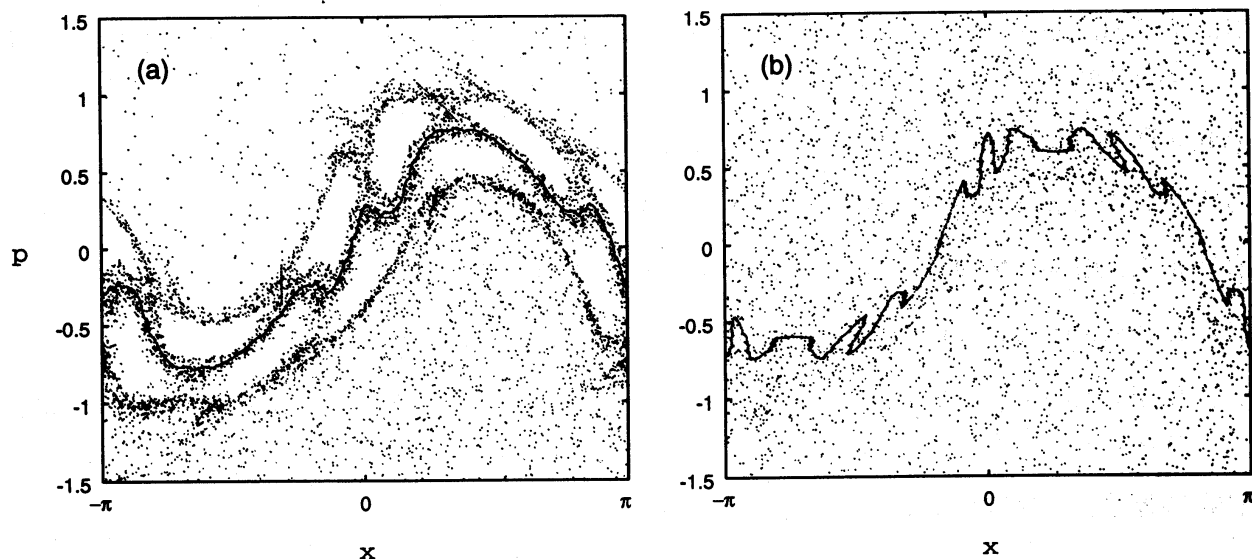


図 12: シアールレス・トーラス崩壊臨界点での相空間. (a) $\nu = 0.4467103385$, $K = 1.40416$; シアールレス・トーラスの回転数は $\sqrt{2} - 1$ (silver mean), (b) $\nu = 0.3177917$, $K = 1.1835$; シアールレス・トーラスの回転数は $e/10$.

参考文献

- [1] R.Balescu, Phys. Rev. E 58 (1998) 3781.
- [2] R.P.Behringer, S.D.Meyers and H.L.Swinney, Phys. Fluids A3 (1991) 1243.
- [3] G.Corso and A.J.Lichtenberg, Physica D131 (1999) 1.
- [4] D.del-Castillo-Negrete and P.J.Morrison, Phys. Fluids A5 (1993) 948.
- [5] D.del-Castillo-Negrete, J.M.Greene and P.J.Morrison, Physica D91 (1996) 1; *ibid.* D100 (1997) 311.
- [6] A. Delshams and R. de la Llave, SIAM J.Math.Anal. 31 (2000) 1235.
- [7] H.R.Dullin, J.D.Meiss and D.Sterling, Nonlinearity 13 (2000) 203.
- [8] J.M.Greene, J.Math.Phys. 20 (1979) 1183.
- [9] T.Hayashi, T.Sato, H.J.Gardner and J.D.Meiss, Phys. Plasma 2 (1995) 752.
- [10] J.E.Howard and S.M.Hohs, Phys.Rev.A29 (1984) 418.
- [11] J. E. Howard and J. Humpherys, Physica D 80(1995) 256.
- [12] R.S.MacKay and J.D.Meiss eds, *Hamiltonian Dynamical Systems*, Adam Hilger, London (1987).
- [13] R.S.MacKay, *Renormalization in Area Preserving Maps*, Thesis, Princeton(1982), World Scientific, London (1993).
- [14] J.D.Meiss, Rev.Mod.Phys.64 (1992) 795.
- [15] P.J.Morrison, Phys. Plasmas 7 (2000) 2279.
- [16] J. K. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1962) 1.
- [17] E.Petrisor, Int.J.of Bifurcation and Chaos, 11 (2001) 497.
- [18] S. Shinohara and Y. Aizawa, Prog.Theor.Phys., 97 (1997) 379; *ibid.* 100 (1998) 219; *ibid.* suppl. 139 (2000) 527.
- [19] 篠原晋, 物性研究, 70 (1998) 584.
- [20] C. Simó, Regular and Chaotic Dynamics, 3 (1998) 180.
- [21] T.P.Valkering and S.A.van Gils, Z.angew. Math. Phys. 44(1993) 103.
- [22] J.P.van der Weele, T.P.Valkering, H.W.Capel and T.Post, Physica A153 (1988) 283.
- [23] J.P.van der Weele and T.P.Valkering, Physica A 169 (1990) 42.
- [24] J.B.Weiss, Phys. Fluids A3 (1991) 1379.