数理解析研究所講究録 1283 巻 2002 年 1-6

函数体上のディオファントス幾何

京都大学・大学院理学研究科数学教室　森脇　淳 (Atsushi Moriwaki)
Department of Mathematics,
Kyoto University

函数体上のディオファントス幾何を考えるとき，基本的に二つの場合に分けられる．すなわち，(A) 幾何学的な場合と (B) 算術的な場合である．大雑把に言って，(A) は代数閉体（または有限体）上有限生成な体上でのディオファントス幾何であり，(B) は有理数体上有限生成な体上でのディオファントス幾何である．(B) は，通常，(A) の場合に較べて圧倒的に難しい．しかし，後で論ずるマンフォード・マニン予想の一般化であるボゴモロフ予想については，(B) の場合解決しているが，(A) の場合については未だに一般的に解決されていない．このようなことはあるものの，その取り扱いについては圧倒的に (B) の場合が難しい．そこで，ここでは (A) の場合について主に解説し，(B) の場合は，すこしのコメントを述べるにとどめておく．詳しいことは，２００２年の春季号の「数学」での解説を参考にしていただけるとありがたい．その意味で，この解説は「数学」での論説の入門編になればと思っている．

A. 幾何学的な場合

A.1. 幾何学的高さ函数. K を $\mathbb{C}$ 上有限生成な体で，$\mathbb{C}$ 上の超越次元が 1 である体を考える．この体には，次の三位一体があり，数学的に豊かな構造を持っている．

$$
\begin{tikzcd}
\text{K は $\mathbb{C}$ 上超越次元が 1 の有限生成な体} \arrow[dd, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
& \text{代数曲線の座標環の商体} \\
\text{K はコンパクトリーマン面上の有理型函数の成す体} \arrow[ur, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

このことを念頭に置いて，以下のことを考える．すなわち，C をそれ上の有理型函数の成す体が K となるコンパクトリーマン面とする．

X を K 上の射影多様体，L を X 上の豊富な直線束とする．ここで，次を満たす対 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を考える．

(1) $\mathcal{X}$ は射影多様体で，$\mathcal{L}$ は $\mathcal{X}$ 上の直線束である．
(2) $\mathcal{X}$ から C への射 $f: \mathcal{X} \to C$ がある．
(3) $\mathcal{L}$ はネフな直線束である（つまり，$(\mathcal{L}\cdot l) \geq 0\ \forall l$: 既約曲線）．
(4) f の生成ファイバーが X で，X 上への $\mathcal{L}$ の制限が L である．

この対を (X, L) のモデルと呼ぶ．モデルは一意的ではないが，存在することに注意しておく．
さて，このモデルを利用して，高さ函数を定義しよう．$\overline{K}$ で K の代数閉包を表すことにする．$x \in X(\overline{K})$，すなわち，K 上の射 $\mathrm{Spec}(\overline{K}) \xrightarrow{x} X$ に対して，$\mathrm{Spec}(\overline{K}) \xrightarrow{x} X \hookrightarrow \mathcal{X}$ の像のザリスキ位相での閉包を Δ_x と表すことにする．このとき，モデル $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に関する x の高さ $h_{(\mathcal{X},\mathcal{L})}(x)$ を

$$h_{(\mathcal{X},\mathcal{L})}(x) = \frac{(\mathcal{L} \cdot \Delta_x)}{\deg(\Delta_x \to \mathcal{C})}$$

で定義する．もちろん，別の (X, L) のモデル $(\mathcal{X}', \mathcal{L}')$ を取れば，一般的には，高さの値は異なる．しかしながら，ある定数 C が存在して，

$$|h_{(\mathcal{X},\mathcal{L})}(x) - h_{(\mathcal{X}',\mathcal{L}')}(x)| \leq C$$

がすべての $x \in X(\overline{K})$ について成り立つ．つまり，$X(\overline{K})$ 上の有界函数をモジュローにすれば，高さ函数は一意的に定まる．これを $h_L(x)$ と書き，幾何学的高さ函数という．後で，詳しく述べるが，幾何学的高さ函数は算術的な場合に較べて，点の状態を正確の表していない．例えば，ノースコットの定理は，幾何学的高さ函数に対して成立しない．しかし，次のことは，成立する．

定理 A.1.1. $f : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ について，$\mathcal{X}$ は非特異であると仮定する．そこで，$\Omega^1_{\mathcal{X}}$，$\Omega^1_{\mathcal{C}}$ でそれぞれ $\mathcal{X}$ および $\mathcal{C}$ 上の正則 1 次微分形式のなす層を表すことにし，$\omega_{\mathcal{X}} = \det(\Omega^1_{\mathcal{X}})$，$\omega_{\mathcal{C}} = \Omega^1_{\mathcal{C}}$，$\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} = \omega_{\mathcal{X}} \otimes f^*(\omega_{\mathcal{C}})^{-1}$ とおく．このとき，もし，$\deg(f_*(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})) > 0$ であるなら，任意の数 A に対して，集合 $\{x \in X(K) \mid h_L(x) \leq A\}$ は X でザリスキ位相の意味で稠密でない．

A.2. 函数体版のモーデル予想とマニン・マンフォード予想. 前節の $f : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ について，次を仮定する．

(1) $\mathcal{X}$ は非特異代数曲面である．
(2) $f : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ のファイバーは連結である．
(3) $\deg(f_*(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})) > 0$. (このことは，$f : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ のファイバーのモジュライが動いている場合正しい.)

$f : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ のファイバーは代数曲線であるので，その種数を g で表し，$g \geq 2$ と仮定する．そこで，定理 A.1.1 と同様にして，$\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}}$ を定義する．このとき，$\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}}$ の自己交点数 $(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} \cdot \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})$ を評価することは，X 上の有理点の状況を知る上できわめて重要である．つまり，$(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} \cdot \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})$ の良い上限を得ることは函数体版のモーデル予想を導き，良い下限を得ることは函数体版のマニン・マンフォード予想を導く．

$$\begin{array}{ccccc}
\text{傾き不等式} & & & & \text{宮岡・ヤウの不等式} \\
\Downarrow & & & & \Downarrow \\
\text{よい下限} & \leq & (\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} \cdot \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}}) & \leq & \text{よい上限} \\
\Downarrow & & & & \Downarrow \\
\text{マニン・マンフォード予想} & & & & \text{モーデル予想}
\end{array}$$

まずは，良い上限，すなわち，宮岡・ヤウの不等式から考えよう．宮岡・ヤウの不等式とは，$\mathcal{X}$ が一般型の曲面のとき，$(c_1(\mathcal{X})^2) \le 3c_2(\mathcal{X})$ という主張である．これをもとに，小平・パーシン被覆を用いると，$x \in X(K)$ に対して，

$$(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} + \Delta_x)^2 \le \text{位相不変量}$$

となる．ここで，$(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} + \Delta_x \cdot \Delta_x) = 0$ に注意して，上の式を展開すると，

$$(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} \cdot \Delta_x) \le \text{位相不変量} - (\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}}^2)$$

となる．したがって，定理 A.1.1 を用いると，$X(K) < \infty$ がわかる．

次に今回の研究集会のメインテーマとも関係する函数体版のマニン・マンフォード予想を高さ函数の立場から考えていく．高さ函数の立場からは，函数体版のマニン・マンフォード予想の拡張である函数体版のボゴモロフ予想がある．この予想を述べるため，まずネロン・テート対から考えよう．

$L, M \in \mathrm{Pic}^0(X)(\overline{K})$ とする．ここで，K の有限次代数拡大 K' で，$L, M \in \mathrm{Pic}^0(X)(K')$ となるものをとる．要するに L, M を定義されている体まで落とす．前の三位一体を考えると，函数体が K' である非特異射影代数曲線 $\mathcal{C}'$ と有限射 $\pi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ が存在する．$\mathcal{X}'$ を $\mathcal{X} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$ の極小の特異点解消とし，$f' : \mathcal{X}' \to \mathcal{C}'$ を自然な射とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}' \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & \mathcal{X} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\
 & \mathcal{C}' \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

このとき，ザリスキの補題により，$\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X}') \otimes \mathbb{Q}$ が存在して，以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{L}|_{X_{K'}} = L$ である．

(2) 任意の $\mathcal{X}'$ 上の曲線 l で $f(l) = \{\text{一点}\}$ となるものについて，$(\mathcal{L} \cdot l) = 0$ である．

このような $\mathcal{L}$ は一意的でないが，同様の $\mathcal{L}'$ があるとき，$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + f^*(A)$ $(A \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C}'))$ と書ける．さらに，M に対しても同様に $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X}') \otimes \mathbb{Q}$ をとる．そこで，

$$\langle L, M \rangle_{\mathrm{NT}} := -\frac{(\mathcal{L} \cdot \mathcal{M})}{[K' : K]}$$

と定める．容易に確かめられることだが，$\langle L, M \rangle_{\mathrm{NT}}$ は $K', \mathcal{L}, \mathcal{M}$ の選び方によらない．このようにして，双線形射像

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{NT}} : \mathrm{Pic}^0(X)(\overline{K}) \times \mathrm{Pic}^0(X)(\overline{K}) \to \mathbb{Q}$$

が定まる．これを幾何学的ネロン・テート対と呼ぶ．

そこで $\rho : X(\overline{K}) \to \mathrm{Pic}^0(X)(\overline{K})$ を $\rho(x) = (2g-2)x - \omega_X$ と定め，次の予想を考える．

予想 A.2.2 (函数体版マニン・マンフォード予想). $\rho^{-1}(\mathrm{Pic}^0(X)(\overline{K})_{tor})$ は有限集合である．ここで，$\mathrm{Pic}^0(X)(\overline{K})_{tor}$ は $\mathrm{Pic}^0(X)(\overline{K})$ の捩れ元全体を表す．

予想 A.2.3 (函数体版ボゴモロフ予想). ある $\epsilon > 0$ が存在して，

$$\{x \in X(\overline{K}) \mid \langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\mathrm{NT}} \le \epsilon\}$$

は有限集合である．

$$\rho^{-1}(\mathrm{Pic}^0(X)(\overline{K})_{tor}) \subseteq \{x \in X(\overline{K}) \mid \langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\mathrm{NT}} \leq \epsilon\}$$

であるので，函数体版ボゴモロフ予想は函数体版マニン・マンフォード予想を導く．函数体版マニン・マンフォード予想は解決されているが，函数体版ボゴモロフ予想は完全に解決されていない．実際，$f: \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ の特異ファイバーの状況による．ここでは，$f: \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ がスムーズな場合について考えよう．$x \in X(\overline{K})$ とする．$x \in X(K')$ となる K の有限次代数拡大 K' をとり，ネロン・テート対の構成の時と同様にして，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}' & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C} \end{array}$$

を考える．いまの場合，f はスムーズであるので $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$ である．このとき，f' の切断 Δ' で $\pi'(\Delta') = \Delta_x$ となるものが存在する．よって，

$$\langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\mathrm{NT}} = -\frac{\left((2g-2)\Delta' - \omega_{\mathcal{X}'/\mathcal{C}'}\right)^2}{\deg(\mathcal{C}' \to \mathcal{C})}$$

になる．射影公式を使って，上を計算すると，

$$\langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\mathrm{NT}} = 4g(g-1)\frac{\left((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - aF) \cdot \Delta_x\right)}{\deg(\Delta_x \to \mathcal{C})}$$

となる．ここで，F は $f: \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ のファイバーで，

$$a = \frac{(\omega^2_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})}{4g(g-1)}$$

である．一方，もし ϵ が $0 < \epsilon < (\omega^2_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})/4g$ を満たす有理数なら，

$$(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a+\epsilon)F)^2 > 0$$

である．よって，リーマン・ロッホの定理により，

$$\dim H^0(n(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a+\epsilon)F)) + \dim H^2(n(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a+\epsilon)F)) \geq O(n^2)$$

となる．一方，

$$\left((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a+\epsilon)F) \cdot F\right) = 2g - 2 > 0$$

であるので，セールの双対定理より，

$$\dim H^2(n(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a+\epsilon)F)) = 0$$

となる．つまり，非負の有理数の係数からなる因子 D が存在して，

$$D \sim \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a+\epsilon)F$$

となる．よって，

$$\left((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a+\epsilon)F) \cdot C\right) < 0$$

となる既約曲線 C は有限個のみである．さらに，

$$\left((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a+\epsilon)F) \cdot \Delta_x\right) = \left((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - aF) \cdot \Delta_x\right) - \epsilon \deg(\Delta_x \to \mathcal{C})$$

であるので，

$$((\omega_{\mathcal{X}/C} - (a+\epsilon)F) \cdot \Delta_x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\mathrm{NT}} < 4g(g-1)\epsilon$$

となる．したがって，$f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ がスムーズの場合の証明ができた．

B. 算術的な場合

$K = \mathbb{C}(t)$ として，$x \in \mathbb{P}^n(K)$ について，$x = (\phi_0 : \cdots : \phi_n)$，$\phi_i \in \mathbb{C}[t]$，$\phi_0\mathbb{C}[t] + \cdots + \phi_n\mathbb{C}[t] = \mathbb{C}[t]$ とおくとき，

$$h_{\mathcal{O}(1)}(x) = \max_{i=0,\dots,n}\{\deg(\phi_i)\}$$

であることを見よう．この場合，$\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ で，$\mathcal{X} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ で，$f : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ は自然な射影で与えられる．もう一つの自然な射影 $\mathcal{X} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ を q で表す．さらに，Δ_x に対応する f の切断 $\mathcal{C} \to \mathcal{X}$ を s で表す．つまり，$s(\mathcal{C}) = \Delta_x$ である．また，$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ の同次座標系を $(X_0 : \cdots : X_n)$ とする．ここでは，Δ_x 上で $X_0 \neq 0$ として計算する．

$$\begin{aligned}
h_{\mathcal{O}(1)}(x) &= (q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cdot \Delta_x) = \deg(s^*q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{s^*q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))}{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} s^*q^*(X_0)} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} s^*q^*(X_0) + \cdots + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} s^*q^*(X_n)}{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} s^*q^*(X_0)} \quad (\because \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}X_0 + \cdots + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}X_n) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[t]\phi_0 + \cdots + \mathbb{C}[t]\phi_n}{\mathbb{C}[t]\phi_0} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X]_{(X)}\phi_0(1/X) + \cdots + \mathbb{C}[X]_{(X)}\phi_n(1/X)}{\mathbb{C}[X]_{(X)}\phi_0(1/X)} \\
&= \deg(\phi_0) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\deg(\phi_0)} + \cdots + \mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\deg(\phi_n)}}{\mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\deg(\phi_0)}} \\
&= \deg(\phi_0) + \frac{\mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\max\{\deg(\phi_0),\dots,\deg(\phi_n)\}}}{\mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\deg(\phi_0)}} \\
&= \deg(\phi_0) + \max\{\deg(\phi_0),\dots,\deg(\phi_n)\} - \deg(\phi_0) = \max\{\deg(\phi_0),\dots,\deg(\phi_n)\}
\end{aligned}$$

一方，$x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ に対して，$x = (a_0 : \cdots : a_n)$ ($a_i \in \mathbb{Z}$，$(a_0,\dots,a_n) = 1$) と置いたとき，x の算術的高さ $h(x)$ は

$$h(x) = \max_i\{|a_0|,\dots,|a_n|\}$$

で与えられる．それでは，$x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}(t))$ の場合はどうであろうか？ $x = (\phi_0 : \cdots : \phi_n)$ ($\phi_i \in \mathbb{Z}[t]$ で $\phi_0,\dots,\phi_n$ が互いに素) と表したとき，$\mathbb{C}(t)$ の場合と，同様にして，$h(x) = \max\{\deg(\phi_i)\}$ とするのはあまりおもしろくない．実際，$\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ 上の算術的高さ函数の拡張になっていない．多項式の複雑さを次数のみならず，係数の大きさも考慮に入れればよいのである．係数の大きさは，すこし工夫して，

$$\int_{\mathbb{C}} \log|\phi| \frac{\sqrt{-1}dt \wedge d\bar{t}}{2\pi(1+|t|^2)^2}$$

で評価する．まとめると，

$$h(x) = \max_i\{\deg(\phi_i)\} + \int_{\mathbb{C}} \max_i\{\log|\phi_i|\} \frac{\sqrt{-1}dt \wedge d\bar{t}}{2\pi(1+|t|^2)^2}$$

と定めればよい．こうすれば，これは $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ 上の算術的高さ函数の拡張になっており，定理 A.1.1 にあるような複雑な条件がなしで，固定された A に対して，

$$\{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}(t)) \mid h(x) \leq A\}$$

は有限集合になる．また，この高さ函数はアラケロフ幾何と相性が良く，それを用いることで，いろいろな応用がある，詳しいことは，２００２年の春季号の「数学」での解説を参考にして下さい．

〒６０６－８５０２　京都市左京区北白川追分町京都大学大学院理学研究科数学教室
E-mail address: moriwaki@kusm.kyoto-u.ac.jp