数理解析研究所講究録 1283 巻 2002 年 21-26

ACFA と Manin-Mumford 予想

桔梗宏孝
東海大学理学部情報数理学科
kikyo@ss.u-tokai.ac.jp

1 はじめに

Hrushovski は数体上の Manin-Mumford 予想 (Raynaud の定理) のモデル論的証明を与えた.

定理 1.1 連結可換代数群 A とその部分多様体 X が数体 K (i.e. $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$) 上定義されているとする. すると $X \cap \mathrm{Tor}(A)$ は $\mathrm{Tor}(B) + b$ の形の集合の有限和になる. ここで, B は A の連結部分代数群で, $b \in A$ である. さらに, この有限和の成分の個数は A と X のある不変量から実際に計算できる数でおさえられる.

方針としては, Mordell-Lang 予想の場合と同じように, モデル理論でよく調べられている体に余分な構造を入れた世界で議論を展開し, $\mathrm{Tor}(A)$ (等分点全体の集合) をこの世界で定義可能な集合で覆う. そして, この $\mathrm{Tor}(A)$ を覆う定義可能な集合が, LMS(locally modular, stable) であることを示した. LMS 集合内の定義可能な群の性質から上の定理を得る. ただし, 成分の個数を実際に上からおさえる部分はかなり大変である.

Hrushovski が利用したのは, 代数的閉体上で generic な同型写像を 1 つ考慮した構造である. このような構造を ACFA と呼ぶ (正確にはそれを特徴づける公理系が ACFA). 上の A が generic な同型写像 σ の固定体上定義されるように ACFA を選び, $\mathrm{Tor}(A)$ が $\mathrm{Ker}(P(\sigma))$ で覆われるような多項式 $P[T] \in \mathbb{Z}[T]$ を選ぶ. このとき, Weil の理論を使って, $P[T]$ は円分多項式を因数にもたないような多項式として選べる. すると, $\mathrm{Ker}(P(\sigma))$ が locally modular stable になるのである. この最後に述べた事実の証明の概略を主に説明する. 関数体上の Mordell-Lang 予想の Hrushovski の証明を知っている人は, 証明の類似性を見ることができるであろう. なお, 実際に ACFA で定義可能な集合で覆えるのは $\mathrm{Tor}(A)$ 全体ではなく, ある素数 p に対して, p と互いに素な位数をもつ等分点全体である. このあたりのさらに詳しい事情はこの報告の最後に述べる.

ここで, 記法に関する注意をいくつかしておく. 体 K に対し, その代数的閉包を K^{a} と書く. 論理式 φ が L の論理式であり, パラメータが集合 A にすべて属す

るということを $\varphi \in L(A)$ と書く．さらに，φ が $\forall$ と $\exists$ を使わない論理式のとき，$\varphi \in L^{\mathrm{qf}}(A)$ と書く (qf は quantifier-free の略).

2 ACFA と Psf

代数的閉体の一般化として，公理系 T の存在で閉じたモデル (existentially closed model, ec モデル) を次のように定義する．

定義 2.1 公理系 T の言語を $\mathcal{L}$ とする．M が T の**存在で閉じたモデル**であるとは，次の 2 つの条件が成り立つことである．

(1) $M \models T$ (M は T のモデル)

(2) $M \subset N \models T$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}^{\mathrm{qf}}(M)$, $N \models \exists x_1, \ldots, x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ならば，$M \models \exists x_1, \ldots, x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

$\mathcal{L}$ を環の言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ とし，T を体の公理系とすると，上の $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ は本質的には M 係数の連立方程式になり，M が T の存在で閉じたモデルということは，M において Hilbert の零点定理が成り立つということになる．すなわち，存在で閉じた体とは代数的閉体のことである．代数的閉体は言語 $\mathcal{L}$ で公理系をもつ．Hrushovski による Manin-Mumford 予想の証明では，K を代数的閉体とし，σ をその自己同型写像の 1 つとするとき，$(K, +, -, \cdot, 0, 1, \sigma)$ という構造が重要な役割をはたす．

定義 2.2 代数的閉体の $\mathcal{L}$ 上の公理系を ACF とし，$\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L} \cup \{\sigma\}$，$\mathrm{ACF}_\sigma = \mathrm{ACF} \cup \{\sigma$ は体の自己同型$\}$ ($\mathcal{L}_\sigma$ での公理系) とする．ACF_σ は difference field と呼ばれる代数構造の公理系になる．

事実 2.3 $(K, \tau) \models \mathrm{ACF}_\sigma$ ならば，(K, τ) の拡大構造 $(\tilde{K}, \tilde{\tau})$ で ACF_σ の存在で閉じたモデルになっているものが存在する．ACF_σ の存在で閉じた構造の全体は $\mathcal{L}_\sigma$ 上の公理系で特徴付けられることが知られている [1, 7]．この公理系を ACFA と呼ぶ．

(K, σ) が ACF_σ の存在で閉じたモデルのとき，σ を generic 自己同型と呼ぶ．σ はその拡張となる体の自己同型写像のもつ性質を (ある意味で) すべてもっているからである．ACF_σ は，$\forall x, \ldots \exists y, \ldots \varphi(x, \ldots, y, \ldots)$ ($\varphi \in \mathcal{L}_\sigma^{\mathrm{qf}}$) の形の論理式の集合として表現できる．一般に，この形の公理系のモデルは，存在で閉じたモデルに拡大できる．証明は，体の代数的閉包の構成と同様である．公理系 ACFA の存在する理由としては，代数的閉体上のイデアルの既約性がイデアルを生成する多項式の係数の性質として言語 $\mathcal{L}$ で記述できることが本質的である．

モデル完全な任意の公理系 T について ACFA に対応する公理系は存在するとは限らない．T を ACF にとてもよく似たものに限ってもそうである [6].

定義 2.4 $\mathcal{L}$ を環の言語とする．すべての有限体で成り立つ $\mathcal{L}$ の閉論理式と，“要素が無限個存在する” という意味の論理式をあわせた公理系を Psf と呼ぶ．たとえば，大きさの異なる有限体を無限個もってきて，それらの超積を作ると Psf(のモデル) になる．

以下，構造 M が ACFA や Psf のモデルのとき，「M は ACFA である」や「M は Psf である」という表現を使う．

事実 2.5 (Ax) 体 K が Psf であることと次の 3 つの条件が成り立つことが同値である．

(1) K は完全体．

(2) K は K^{a}(K の代数的閉包) で PAC (K 係数絶対既約多様体は K 有理点をもつ)．

(3) 任意の自然数 $n \geq 1$ に対し，K の n 次拡大体は K^{a} でちょうど 1 つ存在する．

事実 2.6 (K, σ) が ACFA で，$k = \mathrm{fix}(\sigma) = \{x \in K \ : \ \sigma(x) = x\}$ とすると次が成り立つ．

(1) 任意の自然数 $n \geq 1$ に対し，(K, σ^n) も ACFA．

(2) $k = \mathrm{fix}(\sigma)$ は Psf．

(3) $\mathrm{fix}(\sigma)$ の n 次拡大体は $\mathrm{fix}(\sigma^n)$．

(4) $k = \mathrm{fix}(\sigma)$ は K で stably embedded．すなわち，$\mathcal{L}_\sigma(K)$ の論理式で定義可能な $k^n = k \times \cdots \times k$ (n 個の直積) の部分集合は，$\mathcal{L}_\sigma(k)$ の論理式で定義可能である．

$\mathrm{Gal}(\mathrm{fix}(\sigma)^{\mathrm{a}}/\mathrm{fix}(\sigma))$ において $\langle\sigma\rangle$ が稠密になることから，この事実のほとんどが導かれる．

3 LMS 集合と円分多項式

この節では，整数係数多項式 $P(X)$ が円分多項式を因数にもたないならば，ACFA (K, σ) において $\mathrm{Ker}(P(\sigma))$ が LMS 集合 (locally modular stable set) になることを説明する．

定義 3.1 ACFA の大きな飽和モデルで考える．定義可能集合 D が与えられているとする．D の任意の要素の組 $a = (a_1, \ldots, a_m)$ と小さな集合 E に対し，$\mathrm{tp}(a/E)$ の non-forking 拡大の個数に上限 (無限基数になる可能性はある) があるとき，D は

stable であるという．さらに，D が集合 A 上定義されているとする．D^{eq} の任意の部分集合 B, C に対し，B と C が $\mathrm{acl}(BA) \cap \mathrm{acl}(CA)$ 上独立のとき，D は locally modular であるという．

次の定理はとても重要である [1].

定理 3.2 (ACFA$_0$ **の Dichotomy Theorem)** 標数0のACFAにおいて，σ を generic 自己同型，X を定義可能集合とする．$SU(X) = 1$ のとき，X は LMS であるか，$X \not\perp \mathrm{fix}(\sigma)$ である．

この定理は Chatzidakis, Hrushovski による論文 [1] の主要な結果である．ACFA は unstable であるが，標数 0 のとき，unstable な部分は $\mathrm{fix}(\sigma)$ の中 (Psf になっている) だけである．

定義 3.3 定義可能な群 B が c 極小とは，B の定義可能な任意の無限部分群 H に対し $[B : H]$ が有限になることである．

命題 3.4 (K, σ) は標数 0 の ACFA，$k = \mathrm{fix}(\sigma)$，A は k 上定義された単純アーベル多様体，B は A の c 極小な定義可能な部分群とすると，B が LMS でなければ，$B \subset \mathrm{Ker}(\sigma^N - 1)$ となる N が存在する．$A = \mathbb{G}_m$ でも同じことが成り立つ．

この命題が基となって，次の命題が導かれる．

命題 3.5 A が k 上定義された半アーベル多様体で，$P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ のとき，$\mathrm{Ker}(P(\sigma))$ が LMS でなければ，$P(X)$ はある円分多項式を因数にもつ．

それでは命題3.4の証明の概略を述べる．

まず，次のような $C \subset K$ をとる．B は C 上 σ 定義可能で，$X \subset B$ で，X は C 上タイプ定義可能で $SU(X) = 1$ となる．

すると，有限の SU ランク集合に対する Zilber 既約性定理により，ある n に対し，$B' = (XX^{-1})^n$ が B のタイプ定義可能な部分群になる．

B の c 極小性により，$B' = \bigcap_i H_i$, $[B : H_i]$ は有限，と書ける．ここで，H_i は定義可能部分群である．

B 内の点のタイプは，B' 内の点のタイプの平行移動になっているので，X が LMS だとすると B' も LMS となり，したがって，B も LMS となり矛盾する．よって，X は LMS でない．

ACFA$_0$ の Dichotomy Theorem より，$X \not\perp \mathrm{fix}(\sigma) = k$．したがって，定義可能関数 $h : X \to k$ で有限対1となるものが存在する．

よって，$B' \subset \mathrm{acl}(k \cup C)$．$B/B'$ の剰余類の代表元の個数が高々連続体濃度になるので，C をふくらませば $B \subset \mathrm{acl}(k \cup C)$ となる．

k は Psf であったが，Psf で定義可能な群の構造は Hrushovski と Pillay[5] により調べられており，それを使って少し議論すると，定義可能な同種写像 $h' : B \hookrightarrow H(k)$

が存在する (すなわち，h' は準同型で $\mathrm{Ker}(h')$ は有限集合)．ここで，H は k 上の代数群である．k が stably embedded であることを使ってもう少し議論すると，h' はある k の有限次拡大体 k_1 上で定義できることがわかる．すると，$k_1 = \mathrm{fix}(\sigma^n)$ となる n がとれる．k_1 を固定する自己同型により $B/\mathrm{Ker}(h')$ は点ごとに固定されることになるので，$n|n'$ ならば，$B/\mathrm{Ker}(h')$ の要素は $\sigma^{n'}$ で固定される．

$\mathrm{Ker}(h')$ は σ^n により集合として固定されるが，有限集合だから，$n|l$ となるある l に対し σ^l で点ごとに固定される．$\tau = \sigma^l$ とすると，$a \in \mathrm{Ker}(h')$ ならば $\tau(a) = a$ である．$\mathrm{Ker}(h')$ の位数を m とする．$x \in B$ とすると，τ は x の属する剰余類を固定するから，$\tau(x) = x + a$ $(a \in \mathrm{Ker}(h'))$ と書ける．すると，$\tau^2(x) = \tau(x+a) = \tau(x) + \tau(a) = (x+a) + a = x + 2a$, $\tau^3(x) = x + 3a, \ldots, \tau^m(x) = x + ma = x$ (m が $\mathrm{Ker}(h')$ の位数で $a \in \mathrm{Ker}(h')$ なので $ma = 0$)．したがって，B はある N に対し σ^N で点ごとに固定される．すなわち，$B \subset \mathrm{Ker}(\sigma^N - 1)$ となる．これで命題が導かれた．

4 Manin-Mumford 予想の証明について

数体上で定義されたアーベル多様体の等分点を適当な ACFA での定義可能集合で覆って議論すると始めに述べたが，実際に覆えるのは全体ではなく，ある素数 p と互いに素な n に対する n 等分点の集合である．この部分の議論の概略を述べておく．最終的にはもう少し議論が必要である．

A を数体 K 上定義されるアーベル多様体とする．数体 K の素点 $\mathbf{p}$ にはそれで A を還元しても A がまだアーベル多様体で，しかも A の次元が変わらないものが無数にある．このような $\mathbf{p}$ を prime of good reduction for A と呼ぶ．$\mathbf{p}$ の剰余体を k として，その標数を p とする．p と互いに素な n に対する n 等分点の集合 $\mathrm{Tor}_{p'}(A)$ については，k^{a} 上のフロベニウス写像を出発点に議論すると次の命題が示せる．

命題 4.1 X を A の部分多様体とする．$X \cap \mathrm{Tor}_{p'}(A)$ は A の部分群の剰余類の有限和集合になる．

証明 (スケッチ) $A_{\mathbf{p}}$ を A を還元して得られる k 上のアーベル多様体 (in k^{a}) とする．$K_{\mathbf{p}}$ を K の $\mathbf{p}$ における完備化とし，v を剰余体 k の付値とする．さらに $L = K_{\mathbf{p}}^{\mathrm{a}}$ とすると $L/K_{\mathbf{p}}$ はガロア拡大なので v は L 上の付値に拡大でき，その剰余体は k^{a} になる．すると，自然な写像 $\pi : A(L) \to A_{\mathbf{p}}(k^{\mathrm{a}})$ がある．ここで重要な事実は，π は $\mathrm{Tor}_{p'}(A)$ と $\mathrm{Tor}_{p'}(A_{\mathbf{p}})$ の同型を引き起こすことである．

さて，$q = |k|$ として，$\tau(x) = x^q$ とすると $\tau \in \mathrm{Aut}(k^{\mathrm{a}})$ である (フロベニウス自己同型)．Weil の理論により，$P(\tau)$ が $A_{\mathbf{p}}(k^{\mathrm{a}})$ 上で 0 になるような整数係数多項式 $P(T)$ で 1 の巾乗根をその根にもたないようなものがある．ρ を τ の $\mathrm{Gal}(L/K_{\mathbf{p}})$ へのもちあげとする．先程の同型により，$P(\rho)$ は $\mathrm{Tor}_{p'}(A)$ 上で 0 である．(L, ρ) を拡大して ACFA のモデル (F, σ) を取る．すると $\mathrm{Tor}_{p'}(A)$ は $B = \mathrm{Ker}(P(\sigma))$ に含

まれる．命題3.5により，BはLMSでSUランク有限がである．XをAの部分多様体とすると$X \cap B$はBの定義可能部分集合なので，部分群の剰余類から構成可能になる．よって，$\overline{X \cap B}$は部分群の剰余類の有限和集合になる．したがって，$X \cap \mathrm{Tor}_{p'}(A)$もそうである． □

参考文献

[1] Z. Chatzidakis and E. Hrushovski, The model theory of difference fields, Transactions of AMS, 351 (1999), 2997-3071.

[2] Z. Chatzidakis and A. Pillay, Generic structures and simple theories, Annals of Pure and Applied Logic **95** (1998), 71-92.

[3] E. Hrushovski, The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields, Annals of Pure and Applied Logic **112** (2001), 43-115.

[4] E. Hrushovski, A. Pillay, Weakly normal groups, Logic Colloquium '85, North Holland, Amsterdam, 1987, 233-244.

[5] E. Hrushovski, A. Pillay, Definable subgroups of algebraic groups over finite fields, J. Reine Angew. Math. 462 (1995), 69-91.

[6] H. Kikyo and A. Pillay, The definable multiplicity property and generic automorphism, Annals of Pure and Applied Logic **106** (2000), 263-273.

[7] A. Macintyre, Generic automorphisms of fields, Annals of Pure and Applied Logic **88** (1997), 165-180.

[8] A. Pillay, ACFA and the Manin-Mumford conjecture, in *Algebraic Model Theory*, B. Hart, A. Lachlan, M. Valeriote Eds, NATO ASI Series Vol. 496, 195-205.

[9] A. Pillay, Lecture notes on strongly minimal sets (and fields) with a generic automorphism, 1999-2000のイリノイ大学(UIUC)における講義ノート.