数理解析研究所講究録 1284 巻 2002 年 16-31

1+2次元波動写像型方程式の時間局所適切性とNull条件

静岡大工学部
(Faculty of Engineering Shizuoka University)

久保 英夫
(Hideo Kubo)

このノートの目的は, 1+2次元波動写像型方程式の時間局所適切性の証明法を整理することである. ここでは, [2] および [1] に基づいて話を進めることにする.

1. Introduction

始めに, 一般の2次の非線型項をもつ次のような波動方程式系に対する初期値問題について既知の結果をまとめる:

$$\partial_t^2 u^i - \Delta u^i = B^i(Du, Du) \quad \text{in } [-T, T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u^i(0,x) = f^i(x),\ \partial_t u^i(0,x) = g^i(x). \tag{1.2}$$

ここで, $u = (u^1, u^2, \cdots, u^N)$ は未知関数, $T > 0$, $1 \leq i \leq N$, $D = (\partial_t, \nabla_x)$, $n \geq 2$ であり, $B(\cdot,\cdot)$ は任意の2次形式とする. また, $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ を仮定する. 但し, $H^s(\mathbb{R}^n)$ $(s \in \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ 上の L^2 型のソボレフ空間を表すものとする.

このとき, 上の初期値問題が $s > (n/2) + 1$ ならば $H^s \oplus H^{s-1}$ において時間局所的に適切であることは, エネルギー法とソボレフの埋蔵定理から導かれる. さらに, Strichartz estimates を利用すれば, s に関する条件が次のように緩められることが知られている (例えば, [4]):

$$s \geq (n+1)/2 \quad (n \geq 4), \quad s > 2 \quad (n = 3), \quad s > 7/4 \quad (n = 2).$$

しかも, [3] による反例から, 一般には, これらの結果はこれ以上改善されないことが予想される.

そこで, 次の問題として, 非線型項の構造にある種の制限を課すことにより, さらに s についての条件を緩めることが考えられる. 例えば,

$$\begin{aligned} B^i(Du, Du) &= \sum_{j,k=1}^{N} b_{j,k}^{\,i}\, Q_0(u^j, u^k) \quad (b_{j,k}^{\,i}\text{は定数}) \\ Q_0(\varphi, \psi) &= -\partial_t \varphi\, \partial_t \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \end{aligned} \tag{1.3}$$

の場合には, $n \geq 3$ のときは 1/2, $n = 2$ のときは 3/4 だけ, s に関する制限が緩められる. ここで, $Q_0(\varphi, \psi)$ は一般に "*null form*" とよばれ, "*null form*" によって表される非線型項について "*Null* 条件を満たす" となどという. 波動写像を局所座標系で表したときに現れる波動方程式系は Null 条件を満たすことが知られている. 以下では, そのような方程

式系に対する初期値問題を考える. すなわち, $u = (u^1, u^2, \cdots, u^N)$ を未知関数, $T > 0$ として,

$$\partial_t^2 u^i - \Delta u^i + \sum_{j,k=1}^{N} \Gamma_{j,k}^{\,i}(u) Q_0(u^j, u^k) = 0 \quad \text{in } [-T, T] \times \mathbb{R}^2, \tag{1.4}$$

$$u^i(0, x) = f^i(x), \ \partial_t u^i(0, x) = g^i(x). \tag{1.5}$$

が, ここで扱う問題である. ただし, $1 \le i \le N$ であり, $\Gamma_{j,k}^{\,i}(u)$ は曲面の幾何学的な情報を与える関数だが, ここでは単に滑らかな関数とする. 記述を簡略化するため,

$$F = (F^1, F^2, \cdots, F^N), \quad F^i = F^i(u, Du) = -\sum_{j,k=1}^{N} \Gamma_{j,k}^{\,i}(u) Q_0(u^j, u^k)$$

とおき, (1.4)–(1.5) を次のように表すことにする:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = F(u, Du) \qquad \text{in } [-T, T] \times \mathbb{R}^2, \tag{1.6}$$

$$u(0, x) = f(x), \ \partial_t u(0, x) = g(x). \tag{1.7}$$

Notations. まず, $\mathcal{F}_x[f](\xi)$, $\mathcal{F}_t[g](\tau)$, $\mathcal{F}_{t,x}[h](\tau, \xi)$ は, それぞれ $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $h(t, x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+n})$ のフーリエ変換, すなわち

$$\mathcal{F}_x[f](\xi) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x) dx \quad (\mathrm{i} = \sqrt{-1})$$

などとする. あるいは, 簡単に $\hat{f}(\xi)$, $\hat{g}(\tau)$, $\tilde{h}(\tau, \xi)$ と表すこともある.

次に, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\langle \lambda \rangle = \sqrt{1 + |\lambda|^2}$ とおき,

$$w_{\pm}(\tau, \xi) = \langle |\tau| + |\xi| \rangle \quad \text{for } (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$$

と定義する. また, $s \in \mathbb{R}$, $x > 0$ に対して,

$$x^{[s]} = x^{s+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0) \tag{1.8}$$

と約束する. そして, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+n})$ に対して,

$$\|u\|_{H^{[s,\delta]}} = \|w_+^{[s]} w_-^{[\delta]} \mathcal{F}_{t,x}[u]\|_2$$

とおく. ここで, $L^2(\mathbb{R}^{1+n})$ のノルムを $\|\cdot\|_2$ と表した. このとき, 関数空間 $H^{[s,\delta]}$ $(s, \delta \in \mathbb{R})$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+n})$ の上で定めたノルム $\|\cdot\|_{H^{[s,\delta]}}$ に関する完備化とする.

また, $\omega = \sqrt{-\Delta}$, すなわち, $\omega f(x) = \mathcal{F}_x^{-1}[|\xi| \mathcal{F}_x[f]](x)$ とする. より一般に, 可測関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

$$(g(\omega) f)(x) := \mathcal{F}^{-1}(g(|\xi|) \hat{f}(\xi))(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

2. Formulation

初期値問題 (1.6)–(1.7) に対応する積分方程式

$$u(t,x) = u_0(t,x) + L[F(u,Du)](t,x) \quad \text{in } [-T,T]\times\mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

$$u_0(t,x) = (\cos t\omega)f(x) + \frac{\sin t\omega}{\omega}g(x), \tag{2.2}$$

$$L[F](t,x) = \int_0^t \frac{\sin(t-t')\omega}{\omega}F(t',x)dt' \tag{2.3}$$

を考える. 初期値に対して弱い滑らかさしか仮定しない場合に (2.1) を直接扱うのは難しいので, その代わりに

$$u(t,x) = \chi(t)\left(u_0(t,x) + L[F(u,Du)](t,x)\right) \quad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \tag{2.4}$$

を $H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}$ $(\sigma \geq 0)$ において解くことにする. ここで, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ は,

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{for} \quad |t| \geq 2 \end{cases}$$

なる関数である. 従って, (2.4) の解は, 自動的に (2.1) を $[-1,1]\times\mathbb{R}^2$ において満たす.

時間局所適切性に関して次の定理が成り立つ.

Theorem 2.1. ([2] の *Theorem 1*) $\Gamma^i_{j,k}(u)$ は u の多項式であるとする. $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^2)$ のとき, $s > 1$ ならば, 初期値に依存する正定数 T_0 が存在し, $[-T_0,T_0]\times\mathbb{R}^2$ において, 初期値問題 *(1.6)–(1.7)* は

$$(u(t), \partial u(t)) \in C(R : H^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1(R : H^{s-1}(\mathbb{R}^2))$$

なる一意的な解をもつ.

以下の議論から, Theorem 2.1 の証明は Proposition 2.1 に帰着される.

Step 1: 斉次波動方程式

Lemma 2.1. $s > 1$ に対して, $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^2)$ とする. このとき, *(2.2)* で与えられる $u_0(t,x)$ および $1 \leq \sigma < s$ なる任意の σ に対して次が成り立つ:

$$\|\chi u_0\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}} \leq C(\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)}). \tag{2.5}$$

ここで, C は s, σ, χ のみによる正定数であり, *(1.8)* で $0 < \varepsilon \leq s - \sigma$ なる ε を選んだ.

Proof: $f \equiv 0$ の場合のみ示す. このとき, (2.2) より

$$\mathcal{F}_x[u_0](t,\xi) = \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{g}(\xi) = \frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|}\hat{g}(\xi) \tag{2.6}$$

だから

$$\widetilde{\chi u_0}(\tau,\xi) = \frac{\hat{\chi}(\tau - |\xi|) - \hat{\chi}(\tau + |\xi|)}{2i|\xi|}\hat{g}(\xi) \tag{2.7}$$

となる. $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ なので, 任意の非負整数 j, N に対して,

$$\left|\left(\frac{d}{d\tau}\right)^j \hat{\chi}(\tau)\right| \le C\langle\tau\rangle^{-N} \tag{2.8}$$

が成り立つ.

Case 1. $|\xi| \ge 1$ のとき
(2.7), (2.8) により

$$|\widetilde{\chi u_0}(\tau,\xi)| \le C\langle\xi\rangle^{-1}\langle|\tau|-|\xi|\rangle^{-N}|\hat{g}(\xi)|$$

が得られる. 一方, $|\xi|$ と $|\tau|$ が同等な場合とそうでない場合に分けて考えれば,

$$w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi) \le C\langle\xi\rangle^s(w_-(\tau,\xi))^{\sigma+\varepsilon}$$

が成り立つことが分かる. 故に

$$|w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi)\widetilde{\chi u_0}(\tau,\xi)| \le C\langle\xi\rangle^{s-1}\langle|\tau|-|\xi|\rangle^{-N+\sigma+\frac{1}{2}+2\varepsilon}|\hat{g}(\xi)| \tag{2.9}$$

が従う.

Case 2. $|\xi| \le 1$ のとき

$$\hat{\chi}(\tau+|\xi|)-\hat{\chi}(\tau-|\xi|) = |\xi|\int_{-1}^1 \left(\frac{d\hat{\chi}}{d\tau}\right)(\tau+\theta|\xi|)d\theta \tag{2.10}$$

において, $|\xi| \le 1$ だから, (2.8) により

$$|\hat{\chi}(\tau-|\xi|)-\hat{\chi}(\tau+|\xi|)| \le C|\xi|\langle\tau\rangle^{-N} \tag{2.11}$$

および

$$w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi) \le C\langle\tau\rangle^{\sigma+\frac{1}{2}+2\varepsilon}$$

が成り立つ. よって, (2.7) と $s>1$ により, この場合にも (2.9) が成り立つ.
従って, N を $N > \sigma+1+2\varepsilon$ となるように選べば,

$$\|\chi u_0\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}} \le C\|g\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)}$$

が得られる. □

Step 2: 非斉次波動方程式

Lemma 2.2. *$\sigma \ge 1$ とするとき, (2.3) で与えられる $L[F](t,x)$ に対して次が成り立つ:*

$$\|\chi L[F]\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}} \le C\|F\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}}. \tag{2.12}$$

ここで, C は σ, χ のみによる正定数である.

Proof: まず, 次の等式を示す:

$$\mathcal{F}_{t,x}[\chi L[F]](\tau,\xi) = \int K(\tau,\tau',\xi)\widetilde{F}(\tau',\xi)d\tau', \tag{2.13}$$

$$K(\tau,\tau',\xi) = \frac{1}{4\pi|\xi|}\left(\frac{\hat{\chi}(\tau-\tau')-\hat{\chi}(\tau+|\xi|)}{\tau'+|\xi|} - \frac{\hat{\chi}(\tau-\tau')-\hat{\chi}(\tau-|\xi|)}{\tau'-|\xi|}\right). \tag{2.14}$$

(2.3), (2.6) より

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_x[L[F]](t,\xi) &= \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')|\xi|}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t')|\xi|}}{2\mathrm{i}|\xi|}\mathcal{F}_x[F](t',\xi)dt' \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|\xi|}}{2\mathrm{i}|\xi|}\int_0^t \mathcal{F}_x[G_-](t',\xi)dt' - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|\xi|}}{2\mathrm{i}|\xi|}\int_0^t \mathcal{F}_x[G_+](t',\xi)dt'
\end{aligned}
$$

を得る. ここで,

$$
\mathcal{F}_x[G_\pm](t',\xi) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t'|\xi|}\mathcal{F}_x[F](t',\xi)
$$

とおいた. 一般に

$$
\int_0^t g(t')dt' = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau' t}-1)\hat{g}(\tau')\frac{d\tau'}{\tau'} \tag{2.15}
$$

が成り立つので,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \mathcal{F}_x[G_\pm](t',\xi)dt' &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau' t}-1)\mathcal{F}_{t,x}[G_\pm](\tau',\xi)\frac{d\tau'}{\tau'} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau' t}-1)\widetilde{F}(\tau'\mp|\xi|,\xi)\frac{d\tau'}{\tau'}
\end{aligned}
$$

が従う. よって,

$$
\begin{aligned}
4\pi|\xi|\mathcal{F}_{t,x}[\chi L[F]](\tau,\xi) &= \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau t}\chi(t)\Bigg(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|\xi|}\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau' t}-1)\widetilde{F}(\tau'-|\xi|,\xi)\frac{d\tau'}{\tau'} \\
&\qquad -\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|\xi|}\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau' t}-1)\widetilde{F}(\tau'+|\xi|,\xi)\frac{d\tau'}{\tau'}\Bigg)dt \\
&= \int\Big((\hat{\chi}(\tau+|\xi|-\tau')-\hat{\chi}(\tau+|\xi|))\widetilde{F}(\tau'-|\xi|,\xi) \\
&\qquad -(\hat{\chi}(\tau-|\xi|-\tau')-\hat{\chi}(\tau-|\xi|))\widetilde{F}(\tau'+|\xi|,\xi)\Big)\frac{d\tau'}{\tau'}
\end{aligned}
$$

となり, さらに変数変換して (2.13) に到る.

次に, $K(\tau,\tau',\xi)$ が任意の正数 N に対して次のような評価をもつことを示す:

$$
|K(\tau,\tau',\xi)| \le \frac{C}{\langle|\tau'|+|\xi|\rangle\langle|\tau'|-|\xi|\rangle\langle\tau-\tau'\rangle^N} + \frac{C}{\langle\xi\rangle\langle|\tau'|-|\xi|\rangle\langle|\tau|-|\xi|\rangle^N}. \tag{2.16}
$$

Case 1. $|\xi|\ge 1$, $|\tau'|\ge 2$ のとき

Case 1-a. $|\tau'-|\xi||\ge 1$ かつ $|\tau'+|\xi||\ge 1$ のとき
まず, (2.14) を変形して

$$
\begin{aligned}
&4\pi|\xi|(|\tau'|^2-|\xi|^2)K(\tau,\tau',\xi) \qquad (2.17)\\
&= 2|\xi|\hat{\chi}(\tau-\tau')+|\xi|(\hat{\chi}(\tau+|\xi|)-\hat{\chi}(\tau-|\xi|))-\tau'(\hat{\chi}(\tau+|\xi|)-\hat{\chi}(\tau-|\xi|))
\end{aligned}
$$

を得る. よって, (2.8) を使えば, (2.16) が導かれる.

Case 1-b. $|\tau'-|\xi||\le 1$ または $|\tau'+|\xi||\le 1$ のとき

この場合には, $||\tau'|-|\xi||\le 1$ なので,

$$|K(\tau,\tau',\xi)|\le C|\xi|^{-1}\langle|\tau|-|\xi|\rangle^{-N} \tag{2.18}$$

から (2.16) が従うことに注意する.
　対称性から, $|\tau'-|\xi||\le 1$ の場合を考えれば十分である. このとき, $|\tau'|\ge 2$ より $|\tau'+|\xi||\ge 1$ である. さらに, $\tau-\tau'$ と $\tau-|\xi|$ が同等となるから, (2.8) より

$$\left|\frac{\hat{\chi}(\tau-\tau')-\hat{\chi}(\tau+|\xi|)}{\tau'+|\xi|}\right|\le C(\langle\tau-|\xi|\rangle^{-N}+\langle\tau+|\xi|\rangle^{-N})$$

を得る. また,

$$\hat{\chi}(\tau-\tau')-\hat{\chi}(\tau\pm|\xi|)=-(\tau'\pm|\xi|)\int_0^1\left(\frac{d\hat{\chi}}{d\tau}\right)(\tau\pm|\xi|-\theta(\tau'\pm|\xi|))d\theta \tag{2.19}$$

と変形すれば, (2.8) より

$$\left|\frac{\hat{\chi}(\tau-\tau')-\hat{\chi}(\tau-|\xi|)}{\tau'-|\xi|}\right|\le C\langle\tau-|\xi|\rangle^{-N}$$

と評価される. 故に, (2.14) から (2.18) を得る.

Case 2. $|\xi|\le 1$, $|\tau'|\ge 2$ のとき
　(2.17) の右辺の第３項において

$$\hat{\chi}(\tau+|\xi|)-\hat{\chi}(\tau-|\xi|)=|\xi|\int_{-1}^1\left(\frac{d\hat{\chi}}{d\tau}\right)(\tau+\theta|\xi|)d\theta$$

と変形すれば, (2.8) より

$$|K(\tau,\tau',\xi)|\le C|\tau'|^{-2}(\langle\tau-\tau'\rangle^{-N}+\langle\tau\rangle^{-N}+|\tau'|\langle\tau-\tau'\rangle^{-N})$$

と評価することができ, (2.16) が導かれる.

Case 3. $|\xi|\le 1$, $|\tau'|\le 2$ のとき
　(2.19) を使えば,

$$K(\tau,\tau',\xi)=\frac{-1}{4\pi}\int_{-1}^1\left(\frac{d^2\hat{\chi}}{d\tau^2}\right)(\tau-\theta\tau'+\rho(1-\theta)|\xi|)d\theta d\rho$$

と変形できるので, (2.8) より

$$|K(\tau,\tau',\xi)|\le C\langle\tau\rangle^{-N}$$

と評価することができ, (2.16) が導かれる.

　最後に, (2.12) を示す.

$$f(\tau',\xi)=w_+^{[\sigma-1]}(\tau',\xi)w_-^{[-\frac{1}{2}]}(\tau',\xi)|\widetilde{F}(\tau',\xi)|$$

とおくと, (2.13), (2.16) より

$$|\mathcal{F}_{t,x}[\chi L[F]](\tau,\xi)| \le C\int\left(\frac{1}{w_+^{[\sigma]}(\tau',\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau',\xi)\langle\tau-\tau'\rangle^N} + \frac{1}{\langle\xi\rangle w_+^{[\sigma-1]}(\tau',\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau',\xi)(w_-(\tau,\xi))^N}\right)f(\tau',\xi)d\tau' \tag{2.20}$$

を得る. 一方,

$$w_-(\tau,\xi) \le Cw_-(\tau',\xi)\langle\tau-\tau'\rangle$$

に注意して, $|\xi|$ と $|\tau|$ が同等な場合とそうでない場合に分けて考えれば,

$$\begin{aligned} w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi) &\le Cw_+^{[\sigma]}(\tau',\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau',\xi)\langle\tau-\tau'\rangle^{\sigma+\frac{1}{2}+2\varepsilon}, \\ w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi) &\le C\langle\xi\rangle w_+^{[\sigma-1]}(\tau',\xi)w_-^{[\sigma+\frac{1}{2}]}(\tau,\xi) \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. いま, N を $N>\sigma+\frac{3}{2}+2\varepsilon$ となるように選ぶ. そして, (2.20) の両辺に $w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi)$ をかけると,

$$\begin{aligned} &|w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi)\mathcal{F}_{t,x}[\chi L[F]](\tau,\xi)| \qquad (2.21)\\ \le\ & C\int\left(\frac{1}{\langle\tau-\tau'\rangle^{N-(\sigma+\frac{1}{2}+2\varepsilon)}} + \frac{1}{(w_-(\tau',\xi))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(w_-(\tau,\xi))^{N-(\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon)}}\right)f(\tau',\xi)d\tau' \\ \le\ & C\left((\langle\cdot\rangle^{-N+\sigma+\frac{1}{2}+2\varepsilon} * f(\cdot,\xi))(\tau) + (w_-(\tau,\xi))^{-N+\sigma+\frac{1}{2}+\varepsilon}\|f(\cdot,\xi)\|_2\right) \end{aligned}$$

が従う. さらに, (τ,ξ) に関する L^2–ノルムをとり, ヤングの不等式を利用すれば,

$$\|\chi L[F]\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}} \le C\|f\|_2 = C\|F\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}}$$

を得る. □

Lemma 2.2 の証明と同様にして, 次のような不等式も得られる.

Lemma 2.3. $1\le\sigma<s$ とするとき,

$$u(t,x) = \chi(t)\,(u_0(t,x)+L[F](t,x)) \quad in\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$$

によって定義される関数 u は

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_t u(t)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} \le C(\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} + \|F\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}}) \tag{2.22}$$

を満たす. ここで, C は s, σ, χ のみによる正定数であり, *(1.8)* で $\varepsilon=s-\sigma$ ととった.

Proof: $\chi(t)u_0(t,x)$ についての評価は標準的である. また, $\chi(t)L[F](t,x)$ についての評価は,

$$4\pi|\xi|\mathcal{F}_x[L[F]](t,\xi) = \int\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|\xi|}}{\tau'+|\xi|} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|\xi|}}{\tau'-|\xi|}\right)\widetilde{F}(\tau',\xi)d\tau'$$

から出発し,

$$w_+^{[\sigma-1]}(\tau',\xi) = (w_+(\tau',\xi))^{s-1}$$

に注意すれば, Lemma 2.2. の証明と同様である. □

Step 3: 非線形評価

Proposition 2.1. ([2] の *Theorem 2*) *(1.3)* で与えられる $Q_0(\phi,\psi)(t,x)$ に対して, $\sigma \geq 1$ ならば, 次が成り立つ:

$$\|Q_0(\phi,\psi)\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}} \leq C\|\phi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}\|\phi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}. \tag{2.23}$$

さらに, $P(x)$, $p(x)$ を

$$P(x) = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha x^\alpha, \quad p(x) = \sum_{|\alpha|\leq N} |a_\alpha| x^\alpha \quad (a_\alpha \text{ は定数})$$

により定義される k 変数の多項式とするとき,

$$\begin{aligned} &\|P(\phi_1,\cdots,\phi_k)Q_0(\phi,\psi)\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}} && (2.24)\\ \leq\ & Cp(C\|\phi_1\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}},\cdots,C\|\phi_k\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}})\|\phi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}\|\phi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}. && (2.25)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, C は σ のみによる正定数である.

Lemmas 2.1 and 2.2, Proposition 2.1 により, 修正された積分方程式 (2.4) は,

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)}$$

が十分小さければ, $H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}$ において一意解 u をもつことが分かる. さらに, Lemma 2.3, Proposition 2.1 により, その解は

$$(u(t),\partial u(t)) \in C(R: H^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1(R: H^{s-1}(\mathbb{R}^2))$$

を満たし, この空間においても一意的であり, 初期値に関する連続依存性も従う. よって, 固定された $\chi(t)$ に対して, もとの初期値問題 (1.6)–(1.7) が $H^s \oplus H^{s-1}$ において時間局所的に適切であることが分かる.

以上の議論から, 初期値のサイズと $\chi(t)$ によらずに, 積分方程式 (2.4) が $H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}$ において一意解をもつことが示されれば, Theorem 2.1 の主張が全て従う. ただし, ここではその詳細に触れないこととする.

3. Main Estimates

この節では, Proposition 2.1 が次の評価に帰着されることを示す.

Theorem 3.1. ([2] の *Theorem 3*) $\sigma \geq 1$ とするとき, 次が成り立つ:

$$\|\phi\psi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}} \leq C\|\phi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}\|\phi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}} \tag{3.1}$$

および

$$\|\phi\psi\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}} \leq C\|\phi\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}}\|\phi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}. \tag{3.2}$$

ここで, C は σ のみによる正定数である.

まず, $q_0(\tau,\xi,\lambda,\eta)=\tau\lambda-\xi\cdot\eta$ とするとき,

$$\mathcal{F}_{t,x}[Q_0(\varphi,\psi)](\tau,\xi)=\iint q_0(\tau-\lambda,\xi-\eta,\lambda,\eta)\widetilde{\phi}(\tau-\lambda,\xi-\eta)\widetilde{\psi}(\lambda,\eta)d\lambda d\eta \tag{3.3}$$

が成り立つ. そして,

$$2q_0(\tau,\xi,\lambda,\eta)=(\tau+\lambda)^2-|\xi+\eta|^2-\tau^2+|\xi|^2-\lambda^2+|\eta|^2$$

から

$$|q_0(\tau-\lambda,\xi-\eta,\lambda,\eta)|\le(w_+w_-)(\tau,\xi)+(w_+w_-)(\tau-\lambda,\xi-\eta)+(w_+w_-)(\lambda,\eta)$$

が従う. 故に, $\Lambda_\pm=\mathcal{F}_{t,x}^{-1}(w_\pm(\tau,\xi))\mathcal{F}_{t,x}$ とおけば,

$$\|Q_0(\phi,\psi)\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}}\le\|\phi\psi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}+\|(\Lambda_+\Lambda_\phi)\psi\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}}+\|\phi(\Lambda_+\Lambda_\psi)\|_{H^{[\sigma-1,-\frac{1}{2}]}}$$

を得る. 従って, (2.23) は (3.1) と (3.2) から導かれる. また, (2.24) は, (3.2) を繰り返し使って $P(\phi_1,\cdots,\phi_k)$ を処理してから (3.1) を適用すれば得られる. 以上により, Proposition 2.1 の証明は Theorem 3.1 に帰着された.

4. Theorem 3.1 の証明

(3.2) の証明は (3.1) の証明で用いられる議論に帰着できるので, ここでは (3.1) のみを示す. それには, 双対性の議論により, 任意の $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ に対して次の不等式を示せばよい:

$$\left|\iint(\phi\psi)(t,x)\overline{\varphi(t,x)}dtdx\right|\le C\|\phi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}\|\psi\|_{H^{[\sigma,\frac{1}{2}]}}\|\varphi\|_{(H^{[\sigma,\frac{1}{2}]})'} \tag{4.1}$$

プランシェルの等式から, (4.1) の左辺は

$$\begin{aligned}&(2\pi)^3\iint\mathcal{F}_{t,x}[\phi\psi](\tau,\xi)\overline{\mathcal{F}_{t,x}[\varphi](\tau,\xi)}d\tau d\xi\\ =\ &(2\pi)^3\iiiint\widetilde{\phi}(\tau-\lambda,\xi-\eta)\widetilde{\psi}(\lambda,\eta)\overline{\widetilde{\varphi}(\tau,\xi)}d\lambda d\eta d\tau d\xi\end{aligned}$$

と変形できる. さらに,

$$\begin{aligned}f(\tau,\xi)&=w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi)\widetilde{\phi}(\tau,\xi),\\ g(\lambda,\eta)&=w_+^{[\sigma]}(\lambda,\eta)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\lambda,\eta)\widetilde{\psi}(\lambda,\eta),\\ h(\tau,\xi)&=(w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi))^{-1}\widetilde{\varphi}(\tau,\xi)\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}&\iint(\phi\psi)(t,x)\overline{\varphi(t,x)}dtdx \qquad (4.2)\\ =\ &\iiiint K(\tau,\xi,\lambda,\eta)f(\tau-\lambda,\xi-\eta)g(\lambda,\eta)h(\tau,\xi)d\lambda d\eta d\tau d\xi,\end{aligned}$$

$$K(\tau,\xi,\lambda,\eta)=\frac{w_+^{[\sigma]}(\tau,\xi)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau,\xi)}{w_+^{[\sigma]}(\tau-\lambda,\xi-\eta)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau-\lambda,\xi-\xi)w_+^{[\sigma]}(\lambda,\eta)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\lambda,\eta)} \tag{4.3}$$

を得る. よって, (4.2) の右辺が $\|f\|_2\|g\|_2\|h\|_2$ で押さえられることを示せば, (4.1) が従う.
対称性から

$$w_+(\lambda,\eta) \le w_+(\tau-\lambda,\xi-\eta)$$

と仮定してよいので,

$$w_+(\tau,\xi) \le Cw_+(\tau-\lambda,\xi-\eta)$$

となる. さらに, [2] の Lemma 4 より

$$w_-(\tau,\xi) \le w_-(\tau-\lambda,\xi-\xi) + w_-(\lambda,\eta) + d_\pm(\xi,\eta), \tag{4.4}$$

$$d(\xi,\eta) = |||\xi-\eta| \pm |\eta|| - |\xi|| \tag{4.5}$$

が成り立つ. 但し, $d(\xi,\eta)$ の定義で $\tau-\lambda$ と λ が同符号ならば $+$ を, 異符号ならば $-$ をを選ぶものとする. これらより, 次の評価を得る:

$$\begin{aligned} K(\tau,\xi,\lambda,\eta) \le & \frac{C}{w_+^{[\sigma]}(\lambda,\eta)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\lambda,\eta)} + \frac{C}{w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau-\lambda,\xi-\xi)w_+^{[\sigma]}(\lambda,\eta)} \\ & + \frac{Cd_\pm^{[\frac{1}{2}]}(\xi,\eta)}{w_-^{[\frac{1}{2}]}(\tau-\lambda,\xi-\xi)w_+^{[\sigma]}(\lambda,\eta)w_-^{[\frac{1}{2}]}(\lambda,\eta)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Case 1. $\tau-\lambda$ と λ が同符号のとき
$\tau-\lambda \ge 0, \lambda \ge 0$ の場合のみ考える. このとき, (τ,λ) から (u,v) に

$$u = \tau-\lambda-|\xi-\eta|, \quad v = \lambda-|\eta|$$

によって置き換えると, (4.6) より

$$K(\tau,\xi,\lambda,\eta) \le \frac{C}{\langle\eta\rangle^{[\sigma]}\langle v\rangle^{[\frac{1}{2}]}} + \frac{C}{\langle u\rangle^{[\frac{1}{2}]}\langle\eta\rangle^{[\sigma]}} + \frac{Cd^{[\frac{1}{2}]}(\xi,\eta)}{\langle u\rangle^{[\frac{1}{2}]}\langle\eta\rangle^{[\sigma]}\langle v\rangle^{[\frac{1}{2}]}} \tag{4.7}$$

を得る. よって, 対応する積分は

$$I_1 = \iiiint \frac{1}{\langle\eta\rangle^{[\sigma]}\langle v\rangle^{[\frac{1}{2}]}} F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)|h(\tau,\xi)|dvd\eta dud\xi \tag{4.8}$$

$$I_2 = \iiiint \frac{1}{\langle u\rangle^{[\frac{1}{2}]}\langle\eta\rangle^{[\sigma]}} F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)|h(\tau,\xi)|dvd\eta dud\xi \tag{4.9}$$

$$I_3 = \iiiint \frac{d^{[\frac{1}{2}]}(\xi,\eta)}{\langle u\rangle^{[\frac{1}{2}]}\langle\eta\rangle^{[\sigma]}\langle v\rangle^{[\frac{1}{2}]}} F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)|h(\tau,\xi)|dvd\eta dud\xi \tag{4.10}$$

の和の定数倍で評価される. ここで,

$$F(u,\xi) = |f(u+|\xi|,\xi)|, \quad G(v,\eta) = |g(v+|\eta|,\eta)|,$$
$$\tau = \tau(u,v,\xi,\eta) = u+v+|\eta|+|\xi-\eta|$$

とおいた. I_1, I_2 を評価するために次の不等式を用意する.

Lemma 4.1. $s \ge n/2$ のとき

$$\iint \frac{f(x)g(y)h(x+y)}{\langle x\rangle^{[s]}} dxdy \le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{4.11}$$

ここで, C は s, n のみによる正定数である.

Proof: まず, x についてシュワルツの不等式を使えば, (4.11) の左辺は

$$C\int g(y)\left(\int |f(x)|^2|h(x+y)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dy$$

で押さえられる. 次に, y についてシュワルツの不等式を使って, (4.11) を得る. □

さて, 始めに (u,v) について (4.11) を使い, 次に (ξ,η) について (4.11) を使えば,

$$I_1, I_2 \le C\|f\|_2\|g\|_2\|h\|_2 \tag{4.12}$$

が従うことが分かる.

次に, I_3 について考える. まず, $d(\xi,\eta) = ||\xi-\eta| + |\eta| - |\xi|| \le 2|\eta|$ に注意して,

$$I_3 \le C\iiiint \frac{(d(\xi,\eta))^{\frac{1}{2}}}{\langle u\rangle^{[\frac{1}{2}]}\langle\eta\rangle^{\sigma}\langle v\rangle^{[\frac{1}{2}]}}F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)|h(\tau,\xi)|dvd\eta dud\xi \tag{4.13}$$

を得る. そこで,

$$J(u,v) = \iint \frac{(d(\xi,\eta))^{\frac{1}{2}}}{|\eta|}F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)|h(\tau,\xi)|d\eta d\xi \tag{4.14}$$

とおけば,

$$I_3 \le C\iint \frac{J(u,v)}{\langle u\rangle^{[\frac{1}{2}]}\langle v\rangle^{[\frac{1}{2}]}}dvdu$$

となる. よって,

$$J(u,v) \le C\|F(u)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}\|G(v)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}\|h\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \tag{4.15}$$

を示すことができれば,

$$I_3 \le C\|F\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}\|G\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}\|h\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} = C\|f\|_2\|g\|_2\|h\|_2$$

が得られる.

さて, (4.15) を示すために, $J(u,v)$ を次のように書き直す:

$$J(u,v) = \iiint \frac{||\rho|-|\xi||^{\frac{1}{2}}}{|\eta|}F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)|h(u+v+\rho,\xi)|\delta(\rho-|\eta|-|\xi-\eta|)d\eta d\xi d\rho.$$

まず, (ρ,ξ) についてシュワルツの不等式を使うと,

$$\begin{aligned} J(u,v) &\le \|I_4\|_{L^2_{\rho,\xi}}\|h\|_2, \\ I_4(\rho,\xi) &= ||\rho|-|\xi||^{\frac{1}{2}}\int F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)\delta(\rho-|\eta|-|\xi-\eta|)\frac{d\eta}{|\eta|} \end{aligned}$$

が得られ, さらに, $\delta(\rho-|\eta|-|\xi-\eta|)d\eta$ についてシュワルツの不等式を使えば,

$$|I_4(\rho,\xi)|^2 \le ||\rho|-|\xi||I_5\int |F(u,\xi-\eta)|^2|G(v,\eta)|^2\delta(\rho-|\eta|-|\xi-\eta|)d\eta, \tag{4.16}$$

$$I_5 = \int \delta(\rho-|\eta|-|\xi-\eta|)\frac{d\eta}{|\eta|^2} \tag{4.17}$$

と評価される. よって, (4.15) は次の不等式に帰着される:

$$I_5 \le C||\rho| - |\xi||^{-1} \tag{4.18}$$

実際, (4.16), (4.18) により

$$\begin{aligned}\|I_4\|^2_{L^2_{\rho,\xi}} &\le C\iiint |F(u,\xi-\eta)|^2|G(v,\eta)|^2\delta(\rho-|\eta|-|\xi-\eta|)d\eta d\xi d\rho \\ &= C\iint |F(u,\xi-\eta)|^2|G(v,\eta)|^2 d\eta d\xi \\ &= C\|F(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|G(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\end{aligned}$$

が成り立つから.

最後に, (4.18) を示す. 極座標変換 $\eta = r\omega$ により, (4.17) から

$$I_5 = \int_{|\omega|=1}\int_0^\infty \delta(\rho - r - |\xi - r\omega|)r^{-1}drd\omega$$

を得る. さらに, r から s に $s = r + |\xi - r\omega|$ により変数変換すると

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s^2-|\xi|^2}{2r(s-r)}, \quad s \ge |\xi|$$

なので,

$$\begin{aligned}I_5 &= 2\int_{|\omega|=1}\int_{|\xi|}^\infty \delta(\rho-s)\frac{s-r}{s^2-|\xi|^2}dsd\omega \\ &\le 4\pi\int_{|\xi|}^\infty \delta(\rho-s)\frac{1}{||s|-|\xi||}ds\end{aligned}$$

となり, (4.18) が従う.

Case 2. $\tau-\lambda$ と λ が異符号のとき

$\tau - \lambda \ge 0$, $\lambda \le 0$ の場合のみ考える. このとき, (τ,λ) から (u,v) に

$$u = \tau - \lambda - |\xi-\eta|, \quad v = -\lambda - |\eta|$$

によって置き換えると, (4.7) がそのまま成り立つので, 評価すべき積分は,

$$\begin{aligned}&F(u,\xi) = |f(u+|\xi|,\xi)|, \quad G(v,\eta) = |g(-v-|\eta|,\eta)|, \\ &\tau = \tau(u,v,\xi,\eta) = u - v - |\eta| + |\xi-\eta|\end{aligned}$$

の約束のもとで, 再び I_1, I_2, I_3 となる. よって, Lemma 4.1 を使えば, (4.12) がこの場合にも得られることが分かる. また,

$$d(\xi,\eta) = |||\xi-\eta|-|\eta||-|\xi|| \le ||\xi-\eta|-|\eta|-|\xi|| \le ||\xi-\eta|-|\xi|| + |\eta| \le 2|\eta|$$

と評価できるので, (4.13) も成り立つ. よって, (4.15) を示すことができれば, I_3 についても所要の評価が得られる.

さて, $d(\xi,\eta) = |||\xi-\eta|-|\eta||-|\xi||$ に注意して, (4.14) で定義された $J(u,v)$ を

$$J(u,v) = \iiint \frac{||\rho|-|\xi||^{\frac12}}{|\eta|}F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)|h(u-v+\rho,\xi)|\delta(\rho+|\eta|-|\xi-\eta|)d\eta d\xi d\rho.$$

のように書き直す．そして，(ρ,ξ) についてシュワルツの不等式を使えば，

$$\begin{aligned} J(u,v) &\le \|I_6\|_{L^2_{\rho,\xi}}\|h\|_2, \\ I_6(\rho,\xi) &= ||\rho|-|\xi||^{\frac{1}{2}}\int F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)\delta(\rho-|\eta|-|\xi-\eta|)\frac{d\eta}{|\eta|} \end{aligned}$$

が得られるので，(4.15) を示すには

$$\|I_6\|_{L^2_{\rho,\xi}} \le C\|F(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|G(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{4.19}$$

が言えればよいことになる．(4.19) を示すために，I_6 を次のように分解する:

$$\begin{aligned} I_6(\rho,\xi) &= ||\rho|-|\xi||^{\frac{1}{2}}(A+B), & (4.20)\\ A &= \int_{|\eta|\le 2|\xi|} F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)\delta(\rho+|\eta|-|\xi-\eta|)\frac{d\eta}{|\eta|}, & (4.21)\\ B &= \int_{|\eta|\ge 2|\xi|} F(u,\xi-\eta)G(v,\eta)\delta(\rho+|\eta|-|\xi-\eta|)\frac{d\eta}{|\eta|}. & (4.22) \end{aligned}$$

まず，A を評価する．Case 1 のときと同様に，

$$I_7 := \int \delta(\rho+|\eta|-|\xi-\eta|)\frac{d\eta}{|\eta|^2} \le C||\rho|-|\xi||^{-1} \tag{4.23}$$

が言えれば，

$$\|(||\rho|-|\xi||^{\frac{1}{2}})A\|_{L^2_{\rho,\xi}} \le C\|F(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|G(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{4.24}$$

が導かれることが分かる．さて，極座標変換 $\eta = r\omega$ により

$$I_7 = \int_{|\omega|=1}\int_0^{2|\xi|} \delta(\rho+r-|\xi-r\omega|)r^{-1}drd\omega$$

を得る．始めに，$|\xi-r\omega|-r \ge |\xi|$ のときを考える．r から s に $s=|\xi-r\omega|-r$ により変数変換すると

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s^2-|\xi|^2}{2r(s+r)}, \quad s \ge |\xi|, \quad r \le 2|\xi|$$

なので，

$$\begin{aligned} I_7 &= 2\int_{|\omega|=1}\int_{|\xi|}^{\infty} \delta(\rho-s)\frac{s+r}{s^2-|\xi|^2}dsd\omega \\ &\le 8\pi\int_{|\xi|}^{\infty} \delta(\rho-s)\frac{1}{||s|-|\xi||}ds \end{aligned}$$

となり，(4.23) が従う．逆に，$|\xi-r\omega|-r \le |\xi|$ のときは，r から s に $s=r-|\xi-r\omega|$ により変数変換すると

$$\frac{ds}{dr} = \frac{|\xi|^2-s^2}{2r(r-s)}, \quad -|\xi| \le s \le |\xi|, \quad r \le 2|\xi|$$

$$
\begin{aligned}
I_7 &= 2\int_{|\omega|=1}\int_{|\xi|}^{\infty}\delta(\rho+s)\frac{r-s}{|\xi|^2-s^2}dsd\omega \\
&\leq 8\pi\int_{|\xi|}^{\infty}\delta(\rho+s)\frac{1}{||s|-|\xi||}ds
\end{aligned}
$$

となり, この場合にも (4.23) が得られる.

次に, B を評価する. B の積分領域においては $|\eta|$ と $|\xi-\eta|$ は同等なので,

$$
I=\int\frac{|F(u,\xi-\eta)||G(v,\eta)|}{|\eta|^{\frac{1}{2}}|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}\delta(\rho+|\eta|-|\xi-\eta|)d\eta \tag{4.25}
$$

とおけば, $|B|\leq CI$ が従う. よって,

$$
\|(||\rho|-|\xi||^{\frac{1}{2}})I\|_{L^2_{\rho,\xi}}\leq C\|F(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|G(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{4.26}
$$

が示されれば, (4.24) と併せて (4.19) を得る.

以下で, (4.26) の証明を行う. 簡単のため, F, G の変数のうち u, v をそれぞれ省略することにする. まず,

$$
|I|^2=\prod_{j=1}^{2}\int\frac{|F(\xi-\eta_j)||G(\eta_j)|}{|\eta_j|^{\frac{1}{2}}|\xi-\eta_j|^{\frac{1}{2}}}\delta(\rho+|\eta_j|-|\xi-\eta_j|)d\eta_j
$$

と表せることに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
\|(||\rho|-|\xi||^{\frac{1}{2}})I\|^2_{L^2_{\rho,\xi}} \leq & \iiint ||| \eta_1|-|\xi-\eta_1||-|\xi||\delta(-|\eta_1|+|\xi-\eta_1|+|\eta_2|-|\xi-\eta_2|) \\
&\times\frac{|F(\xi-\eta_1)||G(\eta_1)||F(\xi-\eta_2)||G(\eta_2)|}{|\eta_1|^{\frac{1}{2}}|\xi-\eta_1|^{\frac{1}{2}}|\eta_2|^{\frac{1}{2}}|\xi-\eta_2|^{\frac{1}{2}}}d\eta_1d\eta_2d\xi
\end{aligned}
$$

を得る. 次に, (ξ,η_1,η_2) から (ξ',η_1',η_2') に

$$
\xi'=\xi-\eta_1-\eta_2,\quad \eta_1'=-\eta_2,\quad \eta_2'=-\eta_1
$$

によって置き換えると,

$$
\xi=\xi'-\eta_1'-\eta_2',\quad \xi-\eta_j=\xi'-\eta_j'\quad (j=1,2)
$$

が成り立つので,

$$
\begin{aligned}
&\|(||\rho|-|\xi||^{\frac{1}{2}})I\|^2_{L^2_{\rho,\xi}} \\
\leq & \iiint |||\eta_2'|-|\xi'-\eta_1'||-|\xi'-\eta_1'-\eta_2'||\delta(-|\eta_2'|+|\xi'-\eta_1'|+|\eta_1'|-|\xi'-\eta_2'|) \\
&\times\frac{|F(\xi'-\eta_1')||G(-\eta_2')||F(\xi'-\eta_2')||G(-\eta_1')|}{|\eta_2'|^{\frac{1}{2}}|\xi'-\eta_1'|^{\frac{1}{2}}|\eta_1'|^{\frac{1}{2}}|\xi'-\eta_2'|^{\frac{1}{2}}}d\eta_1'd\eta_2'd\xi'
\end{aligned}
$$

が従う. 簡単のため, 以下では, 積分変数のダッシュを省略する.

次に, $\delta(-|\eta_2|+|\xi-\eta_1|+|\eta_1|-|\xi-\eta_2|)d\eta_1 d\eta_2 d\xi$ についてシュワルツの不等式を使えば, 上式の右辺は

$$\left(\iiint |||\eta_2|-|\xi-\eta_1||-|\xi-\eta_1-\eta_2||\delta(-|\eta_2|+|\xi-\eta_1|+|\eta_1|-|\xi-\eta_2|)\right.$$
$$\left.\times\frac{|F(\xi-\eta_1)|^2|G(-\eta_1)|^2}{|\eta_2||\xi-\eta_2|}d\eta_1 d\eta_2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\iiint |||\eta_2|-|\xi-\eta_1||-|\xi-\eta_1-\eta_2||\delta(-|\eta_2|+|\xi-\eta_1|+|\eta_1|-|\xi-\eta_2|)\right.$$
$$\left.\times\frac{|F(\xi-\eta_2)|^2|G(-\eta_2)|^2}{|\eta_1||\xi-\eta_1|}d\eta_1 d\eta_2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

と評価される. よって,

$$\int\frac{|||\eta_2|-|\xi-\eta_1||-|\xi-\eta_1-\eta_2||}{|\eta_2||\xi-\eta_2|}\delta(|\xi-\eta_1|+|\eta_1|-|\eta_2|-|\xi-\eta_2|)d\eta_2$$

および

$$\begin{aligned}&\int\frac{|||\eta_2|-|\xi-\eta_1||-|\xi-\eta_1-\eta_2||}{|\eta_1||\xi-\eta_1|}\delta(|\xi-\eta_2|+|\eta_2|-|\eta_1|-|\xi-\eta_1|)d\eta_1\\ =\ &\int\frac{|||\eta_2|-|\eta||-|\eta-\eta_2||}{|\xi-\eta||\eta|}\delta(|\xi-\eta_2|+|\eta_2|-|\xi-\eta|-|\eta|)d\eta\end{aligned}$$

がともに有界ならば, (4.26) が成り立つことが分かる. すなわち, (4.26) の証明は, 次の不等式に帰着された.

Lemma 4.2. ([2] の *Lemma 3*) 任意の $\xi,\eta_0\in\mathbb{R}^2$ に対して,

$$\int\frac{|\eta_0-\eta|-||\eta|-|\eta_0||}{|\eta||\xi-\eta|}\delta(|\xi-\eta_0|+|\eta_0|-|\eta|-|\xi-\eta|)d\eta \tag{4.27}$$

は一様に有界である.

この Lemma 4.2 の証明をするのに次の Lemma 4.3 を使う.

Lemma 4.3. ([2] の *Lemma 1*) 与えられた $\xi\in\mathbb{R}^2$ に対して, $\eta_1,\eta_2\in\mathbb{R}^2$ が

$$|\xi-\eta_1|+|\eta_1|=|\xi-\eta_2|+|\eta_2|=:\tau$$

を満たしているとする. このとき,

$$|\eta_1-\eta_2|-||\eta_1|-|\eta_2||\le C(\tau^2-|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

Lemma 4.3 は認めて, Lemma 4.2 の証明を実行する. まず, $\tau=|\xi-\eta_0|+|\eta_0|$ とおくと, (4.27) は

$$C(\tau^2-|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\int\frac{1}{|\eta||\xi-\eta|}\delta(\tau-|\eta|-|\xi-\eta|)d\eta$$

と評価される. さらに, 極座標変換 $\eta = r\omega$ により, 上の積分は

$$\int_{|\omega|=1}\int_0^\infty \frac{1}{|\xi - r\omega|}\delta(\tau - r - |\xi - r\omega|)drd\omega$$

と変形される. そして, r から s に $s = r + |\xi - r\omega|$ により変数変換すると

$$\begin{aligned} 2\int_{|\omega|=1}\int_{|\xi|}^\infty \delta(\tau - s)\frac{r}{s^2 - |\xi|^2}dsd\omega &\leq 4\pi\int_{|\xi|}^\infty \delta(\tau - s)\frac{1}{|s| + |\xi|}ds \\ &\leq C(|\tau| + |\xi|)^{-1} \end{aligned}$$

となり, Lemma 4.2 が示される. 以上により, (3.2) の証明が完成した. □

References

[1] S. Klainerman and M. Machedon, Sommthing estimates for null forms and applications, *Duke. Math. J.* **81** (1995), 99–133.

[2] S. Klainerman and S. Selberg, Remarks on the optimal regularity for equations of wave maps type, *Comm. PDE* **22** (1997), 901–918.

[3] H. Lindblad, Counterexamples to local existence for semilinear wave equations, *Amer. J. Math.* **118** (1996), 1–16.

[4] G. Ponce and T. Sideris, Local reguralilty of nonlinear wave equations in three space domensions, *Comm. in P.D.E* **18** (1993), 169–177.