数理解析研究所講究録 1284 巻 2002 年 42-49

多重連結領域上の H-system の多重解の存在について

高橋 太 (Futoshi Takahashi)
東京工業大学理学部 (Faculty of Science, Tokyo Institute of Technology)
E-mail: takahasi@math.titech.ac.jp

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を滑らかな境界を持つ有界領域, $z = (x, y) \in \Omega$ とする。以下では次の非線型楕円型方程式系の境界値問題 $(HD)_\gamma$:

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 2Hu_x \wedge u_y \quad \text{in } \Omega, &(1)\\
u|_{\partial\Omega} &= \gamma, &(2)
\end{aligned}
$$

の多重解の存在について考える。ここで $H > 0$ は定数、$\gamma \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega; \mathbf{R}^3)$ は与えられた関数で、$u \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$ はベクトル値関数、"$\wedge$" は $\mathbf{R}^3$ の通常のベクトル積、u_x, u_y 等は偏導関数を表す。(1) は定数平均曲率 H の曲面のパラメトリック表示の満たす方程式系であり、H-system と呼ばれる ([BC1] [BC2])。ただし、今は Dirichlet 境界条件のために幾何学的意味はない。

(1) は等角不変性を持つ方程式系であることに注意する。

$(HD)_\gamma$ の解は次の汎関数の $H^1_\gamma(\Omega; \mathbf{R}^3)$ での臨界点として捉えられる。

$$
E_H(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{2H}{3}Q(u), \quad u \in H^1_\gamma(\Omega; \mathbf{R}^3)
$$

ここに

$$
Q(u) := \int_\Omega u \cdot u_x \wedge u_y, \quad u \in H^1_\gamma(\Omega; \mathbf{R}^3)
$$

は oriented volume functional と呼ばれる。

$(HD)_\gamma$ の代表的な解としては次が知られている。

1. Small solution (Hildebrandt). $H\|\gamma\|_{L^\infty} \le 1$ のとき。

2. Large solution (Brezis-Coron, Struwe). ただし $\gamma \not\equiv$ 定数で、$H\|\gamma\|_{L^\infty} < 1$ のとき。

最近、東京工業大の磯辺健志氏は $\gamma \not\equiv$ 定数 のとき $(HD)_\gamma$ の解の多重性について次の定理を示した。

定理 ([IT] Theorem 1.5)　h_γ を γ の調和拡張とする。h_γ が $\mathrm{rank}\nabla h_\gamma(z) = 2, \forall z \in \overline{\Omega}$ をみたすと仮定する。このとき, ある $H_1 > 0$ が存在して、すべての $0 < H < H_1$ に対して $(HD)_\gamma$ は少なくとも $\mathrm{cat}(\Omega) + 1$ 個の解を持つ。

さらに、$|\nabla h_\gamma(z)|^2 - 2|(h_\gamma)_x(z) \wedge (h_\gamma)_y(z)| > 0, \forall z \in \overline{\Omega}$, が成り立つならば、$H$ が十分小さいとき、$(HD)_\gamma$ は少なくとも $2\mathrm{cat}(\Omega) + 1$ 個の解を持つ。ここに $\mathrm{cat}(\Omega)$ は Ω の Ljusternik-Schnirelman カテゴリーをあらわす。

この定理から、γ が定理後半の条件を満たすときには、$(HD)_\gamma$ には少なくとも

- Ω が単連結ならば 3 つ
- Ω が単連結でないならば 5 つ

の解が存在することがわかる。

以下、この論文では $\gamma \equiv 0, H = 1$ の場合を考え、$(HD)_\gamma$ を (HD) と記す:

$$\Delta u = 2u_x \wedge u_y \quad \text{in } \Omega, \tag{3}$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

このとき $u \equiv 0$ は常に (HD) の解なので、以降これを自明な解と呼ぶことにする。これは Hildebrandt の Small solution に対応する。

(HD) の非自明解の存在・非存在について、1975 年、H.Wente [W] は次の事実を証明した。

- Ω を単連結領域とする。(等角不変性から $\Omega =$ 単位円板としてよい。) このとき (HD) の解は $u \equiv 0$ しか存在しない。
- Ω を (円環領域と等角同値な) 2 重連結領域とする。このとき (HD) の非自明解が少なくとも 1 つ存在する。

境界値問題 (HD) は、高次元での臨界 Sobolev 指数を含む半線形楕円型方程式の境界値問題 (SD):

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geq 3), \\ u > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

との間に多くの類似点を持つことが知られている。先の Wente の第 1 の結果は、(SD) に対する星型領域での Pohozaev の非存在定理に、また第 2 の結果は、円環領域での Kazdan-Warner の存在定理に対応するものと考えられる。

Wente の非存在定理を、Pohozaev 型等式を用いて証明しておく。

まず、方程式の等角不変性より、単連結領域 Ω は単位円板と仮定してよい。また、Wente の正則性定理より、(HD) の解は、境界までこめて十分滑らかであることに注意する。

方程式 (3) の両辺に $xu_x + yu_y \in \mathbf{R}^3$ を内積して、u_x, u_y が $u_x \wedge u_y$ に直交することを用いると、

$$\int_\Omega \Delta u \cdot (xu_x + yu_y) dxdy = 0$$

を得る。部分積分により、

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 (z \cdot n) ds_z = 0.$$

ここで、n は境界 $z \in \partial\Omega$ での単位外法線ベクトル。いま、$z \cdot n = |z|^2 = 1$ なので、$\partial\Omega$ 上 $|\nabla u| = 0$ を得る。境界条件 (4) も考慮すると、主部の等しい楕円型方程式系

(HD) に対する一意接続定理 (たとえば [LM],Proposition 3.2.) により、 $u \equiv 0$ となる。

(SD) については、(多重) 解の存在・非存在と領域の位相的・幾何的性質との関連について多くの研究が行われている (Bahri-Coron, Passaseo 等の一連の論文を参照)。これらの研究から、(HD) についても次の主張は自然であると思われる。

- $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を $K+1$ 重連結領域とする ($K \geq 1$)。このとき (HD) の非自明解は少なくとも K 個 存在する。

[T] において、次の結果が示された。

- ある $K+1$ 重連結領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ が存在して、その上では、(HD) の非自明解は少なくとも K 個 存在する。

より正確に述べるために次の定義を行う。

Definition.(condition $(A^{z_1,z_2,\cdots,z_K}_{R_1,R_2,\cdots,R_K})$) *For $z_1, z_2, \cdots, z_K \in \mathbf{R}^2$ and positive numbers $R_1, R_2, \cdots, R_K$ ($R_i > 1, \forall i$), we say that a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ satisfies the condition $(A^{z_1,z_2,\cdots,z_K}_{R_1,R_2,\cdots,R_K})$ if the following holds :*

(1) $B_{R_i}(z_i) := \{z \in \mathbf{R}^2 : |z - z_i| < R_i\}$ *are disjoint discs,*

(2) $A_{R_i^{-1},R_i}(z_i) := \{z \in \mathbf{R}^2 : R_i^{-1} < |z - z_i| < R_i\} \subset \Omega \ (\forall i = 1, 2, \cdots, K)$,

(3) $B_{(2R_i)^{-1}}(z_i) := \{z \in \mathbf{R}^2 : |z - z_i| < (2R_i)^{-1}\} \subset \Omega^c \ (\forall i = 1, 2, \cdots, K)$.

Theorem. *For every $K \in \mathbf{N}$, there exists a bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ satisfying the condition $(A^{z_1,z_2,\cdots,z_K}_{R_1,R_2,\cdots,R_K})$ for some points $z_1, z_2, \cdots, z_K \in \mathbf{R}^2$ and constants $4 < R_1 < R_2 < \cdots < R_K$, on which the problem (HD) admits at least K distinct non-trivial solutions.*

条件 $(A^{z_1,z_2,\cdots,z_K}_{R_1,R_2,\cdots,R_K})$ をみたす領域 Ω は $K+1$ 重連結領域であることに注意する。また方程式の等角不変性から、上の定理で構成した Ω と等角同値なすべての領域で同じ結果が成立する。

証明は Coron [Co] に従い、Morse 理論に基づく変分法的手法による。[Co] では臨界 Sobolev 指数の境界値問題 (SD) を取扱っている。

以下で用いるいくつかの記号を用意する。

$$\begin{aligned}
S(u) &:= \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{|Q(u)|^{2/3}}, \quad \text{for } Q(u) \neq 0, \\
M &:= \{u \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3) : Q(u) = 1\}, \\
M^\lambda &:= \{u \in M : S(u) < \lambda\}, \\
\overline{S} &:= \inf_{u \in M} S(u) = (32\pi)^{1/3}.
\end{aligned}$$

(HD) の解を見つけることは、M 上で汎関数 S の critical point を見つけることに帰着される。Morse 理論の基本定理によると、Hilbert 多様体 M 上の C^2 級汎関数 S が、$\{u \in M : \alpha < S(u) < \beta\}$ で Palais-Smale 条件を満たし、かつこの範囲に臨界点を持たないとすると、sub-level set M^α は M^β の強変位レトラクトになり、特にそれらのホモトピー群・ホモロジー群はすべて一致する。

われわれはこの基本定理の対偶を用いる。つまり、領域 Ω のホモトピー的非自明性を利用して、S が Palais-Smale 条件を満たす範囲内の 2 つの sub-level sets M^α, M^β の間に topological difference をもたらすような M 内の path を構成することにより、S の臨界点の存在を証明する。

証明のアウトラインは次の通りである。

1. Palais-Smale 列の挙動 (local compactness level の確定)
2. $\overline{S}$ に対する最小化列の挙動
3. 2 つの level set の間の位相的差違を検知する explicit path の構成

Step 1. は Brezis-Coron による Global Compactness Lemma ([BC2]) を用いて示される。

Lemma. *Let $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ be a bounded smooth domain. Then we have :*

(a) every sequence $(u^n) \subset H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$ such that

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} E_H(u^n) = \beta \in (\frac{4\pi}{3H^2}, \frac{8\pi}{3H^2}), \\ E'_H(u^n) \to 0 \quad H^{-1} \textit{ strongly}, \end{cases}$$

is relatively compact in $H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$; that is, E_H satisfies the $(PS)_\beta$ condition for $\beta \in (\frac{4\pi}{3H^2}, \frac{8\pi}{3H^2})$.

(b) every sequence $(\overline{u}^n) \subset M = \{u \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3); Q(u) = 1\}$ such that

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} S(\overline{u}^n) = \overline{\beta} \in (\overline{S}, 2^{1/3}\overline{S}), \\ S'(\overline{u}^n) \to 0 \quad H^{-1} \textit{ strongly}, \end{cases}$$

is relatively compact in $H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$; that is, S satisfies the $(PS)_{\overline{\beta}}$ condition on M for $\overline{\beta} \in (\overline{S}, 2^{1/3}\overline{S})$.

Step 2. については次の補題が key となる。

Lemma. *Let $\{u^n\} \subset M$ be a sequence such that*

$$S(u^n) = \overline{S} + o(1) \quad \textit{as } n \to \infty.$$

Then there exists a subsequence (still denoted by u^n) and $z = (x, y) \in \overline{\Omega}$ such that

$$|\nabla u^n|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{S}\delta_z \quad \textit{in } \mathcal{M}(\overline{\Omega})$$

in the sense of Radon measures of $\overline{\Omega}$.

この補題と、重心写像

$$F : H_0^1(\Omega;\mathbf{R}^3)\setminus\{0\}\to\mathbf{R}^2,\quad F(u)=\frac{\int_\Omega z|\nabla u|^2dz}{\int_\Omega|\nabla u|^2dz},\quad z=(x,y)$$

を用いて、Ω の位相的性質を、$\overline{S}$ に十分近い範囲の M の要素の全体 $M^{\overline{S}+\varepsilon}(\varepsilon>0$ small) に遺伝させることができる。

上の補題は、より一般的な 次の '等周不等式に対する Concentration-Compactness Lemma' から導かれる。

等周不等式に対する Concentration-Compactness Lemma.

Let $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ *be a bounded smooth domain. Consider a sequence* $\{v^n\}\subset H_0^1(\Omega;\mathbf{R}^3)\subset H_0^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^3)$ *(extended by* 0 *outside* Ω*) with*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\int_{\mathbf{R}}^2|\nabla v^n|^2<\infty,$$
$$v^n\rightharpoonup v^0 \text{ weakly in } H_0^1(\Omega,\mathbf{R}^3),$$
$$|\nabla v^n|^2\overset{*}{\rightharpoonup}\mu\quad\text{in }\mathcal{M}(\overline{\Omega}),$$
$$T^n\to T\quad\text{in }\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$$

as $n\to\infty$, *where* $T^n\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ *is a compactly supported distribution, defined by*

$$T^n(\varphi):=\int_{\mathbf{R}}^2(\varphi v^n)\cdot v_x^n\wedge v_y^n dxdy\quad\text{for }\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2).$$

Then μ *is a finite nonnegative Radon measure with* $\mu(\overline{\Omega})<\infty$ *and* T *is a compactly supported distribution with supp*$(T)\subset\overline{\Omega}$ *and the followings hold:*

(part 1) (forms of the limit measure and the limit distribution)

There exist $\exists J\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$, *nonnegative numbers* $\{\mu_j\}_{j=1}^J$, *real numbers* $\{\nu_j\}_{j=1}^J$ *and points* $\{z_j\}_{j=1}^J\subset\overline{\Omega}$ *such that:*

1.

$$\mu=|\nabla v^0|^2dxdy+\sum_{j=1}^J\mu_j\delta_{z_j}+\tilde{\mu},$$

where $\tilde{\mu}\in\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *is a nonnegative, nonatomic measure.*

2.

$$T=T_0+\sum_{j=1}^J\nu_j\delta_{z_j}\quad\text{in }\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2),$$

where T_0 *is a distribution defined by*

$$T_0(\varphi):=\int_{\mathbf{R}}^2(\varphi v^0)\cdot v_x^0\wedge v_y^0dxdy\quad\text{for }\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2).$$

3. (the isoperimetric inequality for atoms)

$$|\nu_j| \leq (\frac{1}{\overline{S}})^{3/2}\mu_j^{3/2}, \quad \forall j \in \{1, \cdots, J\}.$$

4. (the isoperimetric inequality for total mass)

$$|T(1)| \leq (\frac{1}{\overline{S}})^{3/2}\mu(\overline{\Omega})^{3/2}.$$

(part 2) (concentration-compactness alternative)

If $\mu(\overline{\Omega}) = \overline{S} = (32\pi)^{1/3}$ and $|T(1)| = 1$, then one and only one of the following statements holds true.

(a) (concentration) there exists $z_0 \in \overline{\Omega}$ such that $\mu = \overline{S}\delta_{z_0}$ and $T = \delta_{z_0}$.

(b) (compactness) $v^n \to v^0$ strongly in $H_0^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$. In this case, $\mu = |\nabla v^0|^2 dxdy$ and $T = T_0$.

Step 3. について、2つの sub-level sets の間の位相的相違をもたらす path は、

$$u_t^{\sigma,\tilde{z}}(z) := \frac{2(1-t)}{(1-t)^2 + |z - \tilde{z} - t\sigma|^2} \begin{pmatrix} x - \tilde{x} - tx_0 \\ y - \tilde{y} - ty_0 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

where $z = (x, y), \tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}^2, t \in [0, 1), \sigma = (x_0, y_0) \in \{|z| = 1\}$ に適当な cut off 関数をかけたものから構成する。

References

[BC1] H. Brezis, and J.M. Coron. *Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture,* Comm. Pure Apll. Math. **37** (1984) 149-187.

[BC2] H. Brezis, and J.M. Coron. *Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles,* Arch. Rat. Mech. Anal. **89** (1985) 21-56.

[Co] J.M. Coron. *Topologie et cas limite des injections de Sobolev,* C. R. Acad. Paris Ser. I. **299** (1984) 209-212.

[IT] T. Isobe. *Classification of blow-up points and multiplicity of solutions for H-systems,* Comm. P.D.E. **25** 7-8 (2000) 1259-1325.

[LM] L. Mou. *Uniqueness of energy minimizing maps for almost all smooth boundary data,* Indiana Univ. Math. J. **40** 1 (1991) 363-392.

[T] F. Takahashi *Multiple solutions of H-systems on some multiply-connected domains,* Adv. Diff. Eq. **7** (2002), 365-384.

[W] H. Wente. *The differential equation $\Delta x = 2Hx_u \wedge x_v$ with vanishing boundary values,* Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975) 131-137.

Appendix.

H-system に関連する話題の中で、現在未解決と思われる問題について。

問題 1 (regularity)
$H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を滑らかとする。(variable mean curvature function)

$$\Delta u = 2H(u)u_x \wedge u_y \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{R}^3)$$

の distribution solution $u \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$ の C^∞ 正則性について、次の十分条件が知られている。

- $H \equiv$ 定数 (Wente)
- $\|H\|_{L^\infty} + \sup_{y \in \mathbf{R}^3}(1 + |y|)|\nabla H(y)| < \infty$ (Heinz)
- $\|H\|_{L^\infty} + \|\nabla H\|_{L^\infty} < \infty$ (Bethuel)
- H 有界かつ $H(y^1, y^2, y^3) = H(y^1, y^2)$ for any $(y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$ (Bethuel-Ghidaglia)

より弱く、$H \in L^\infty(\mathbf{R}^3; \mathbf{R})$ かつ滑らかならば u は滑らかか？

問題 2 (multiplicity)
境界値問題 $(HD)_\gamma$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 2Hu_x \wedge u_y \quad \text{in } \mathbf{B}^2, \\ u|_{\partial \mathbf{B}^2} &= \gamma \end{aligned}$$

を考える。ここで H は定数、$\mathbf{B}^2 = 2$ 次元単位円板、$\gamma \in C^{2,\alpha}(\partial \mathbf{B}^2; \mathbf{R}^3)$ は $|H|\|\gamma\|_{L^\infty} < 1$ をみたすとする。

1. generic な境界値 γ に対して、$(HD)_\gamma$ の解の個数に bound はあるか？
   逆に、$\mathrm{card}\{u \in H^1_\gamma(\partial \mathbf{B}^2, \mathbf{R}^3) : \text{solution of } (HD)_\gamma\} = \infty$ となる境界値 γ はどれくらいあるか？
2. (Brezis) $\gamma = (x, y, 0), |H| < 1$ とする。このとき $(HD)_\gamma$ の解は丁度 2 つしかないか？

問題 3 (等周不等式の改良)

$$\overline{S}|Q(u)|^{\frac{2}{3}} \le \int_\Omega |\nabla u|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$$

を、$H_0^1(\Omega;\mathbf{R}^3)$ 写像に対する等周不等式と呼ぶ。ここに $\overline{S} := (32\pi)^{1/3}$ は最良定数。

$\overline{S}$ は $\Omega \neq \mathbf{R}^2$ では決して attain されない。また、$\mathbf{R}^2$ 全体での extremal functions の分類も知られている。(Brezis-Coron)

$$\varphi^\varepsilon(x,y) = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon > 0$$

の形の関数は extremal functions の 1 つになる。

等周不等式の両辺の差

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \overline{S}|Q(u)|^{\frac{2}{3}}$$

を、"extremal functions の集合と u との距離" を含む量で下から bound できるか？

問題 4 (higher-dimensional H-systems) H は定数、$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ とする。

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = H u_{x_1} \wedge \cdots \wedge u_{x_N}$$

を N 次元 H-system と呼ぶ (Mou-Yang)。ここに $u \in W^{1,N}(\Omega;\mathbf{R}^{N+1})$ で、非線形項 $u_{x_1} \wedge \cdots u_{x_N}$ は、関係式

$$v \cdot u_{x_1} \wedge \cdots \wedge u_{x_N} = \det[v, u_{x_1}, \cdots, u_{x_N}] \quad \forall v \in \mathbf{R}^{N+1}$$

によって一意に決まる $\mathbf{R}^{N+1}$ のベクトルとする。

Ω が N 次元 ball のとき、

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u) &= H u_{x_1} \wedge \cdots u_{x_N} \quad \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

の解 $u \in W_0^{1,N}(\Omega;\mathbf{R}^{N+1})$ は $u \equiv 0$ に限るか？