

波動写像の特異点

静岡大学工学部 太田 雅人 (Masahito Ohta)

Faculty of Engineering, Shizuoka University

企画者の三沢正史氏からの要請に従い, 中西賢次氏との共著論文 [4] の紹介をする. ここで考える問題は, 波動写像を局所座標系で書いた半線形波動方程式系

$$(\partial_t^2 - \Delta)u^i + \sum_{j,k=1}^N \Gamma_{j,k}^i(u)(\partial_t u^j \partial_t u^k - \nabla u^j \nabla u^k) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (1)$$

$1 \leq i \leq N$, に対する初期値問題の非適切性であり, 与えられた講演題目「波動写像の特異点」とは必ずしも合致していないことを始めにお断りしておく.

(1) に対する初期値問題の適切性に関するこれまでの結果を纏めると

- $s > n/2, n \geq 2$ のとき, Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^n) \oplus H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ において時間局所的に適切である ([1] for $n = 3$, [2] for $n \geq 2$).
- $n \geq 2$ のとき, 斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{2,1}^{n/2}(\mathbb{R}^n) \oplus \dot{B}_{2,1}^{n/2-1}(\mathbb{R}^n)$ における小さいデータに対して時間大域的に適切である ([5] for $n \geq 4$, [6] for $n = 2, 3$, [4] for $N = 1, n \geq 2$).
- $n \geq 1, N = 1, r > 1$ のとき, Besov 空間 $B_{2,r}^{n/2}(\mathbb{R}^n) \oplus B_{2,r}^{n/2-1}(\mathbb{R}^n)$ における小さいデータに対して時間局所的に適切でない ([4]). ここで, $B_{2,2}^s = H^s$ に注意する.
- $n = 1, N = 1$ のとき, $B_{2,1}^{1/2}(\mathbb{R}) \oplus \dot{B}_{2,1}^{-1/2}(\mathbb{R})$ における小さいデータに対して時間局所的に適切でない ([3]).

以下では, 3 番目の結果について述べる. $N = 1$ の場合 (単独方程式) を考えるので

(1) を

$$(\partial_t^2 - \Delta)u + f(u)(|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \quad (2)$$

と書き替える. ここで, $u = u(t, x)$ と $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ は実数値関数である. よく知られているように, (2) は Cole-Hopf-Nirenberg 変換

$$v = G(u) := \int_0^u \exp\left(\int_0^s f(r)dr\right) ds$$

によって線形の波動方程式 $(\partial_t^2 - \Delta)v = 0$ に変換される. また, $G(0) = 0$, $G'(0) = 1$, $G'(u) = \exp\left(\int_0^u f(r)dr\right) > 0$ だから

$$a := \lim_{u \rightarrow -\infty} G(u), \quad b := \lim_{u \rightarrow +\infty} G(u)$$

とおくと, $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$ であり, $G: \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ は C^∞ 級微分同相である.

今回紹介するのは次の定理である.

定理 1 ([4, Theorem 4.5]) $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ とし, $a > -\infty$ または $b < +\infty$ を仮定する. このとき, 任意の $r > 1$, $\varepsilon > 0$ に対して, $\|\varphi\|_{B_{2,r}^{n/2}} + \|\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} < \varepsilon$ なる関数 $(\varphi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^2$, $0 < T < \varepsilon$ なる T と \mathbb{R}^n の球 Q が存在して, $u(0) = \varphi$, $\partial_t u(0) = \psi$ なる (2) の古典解 $u(t, x)$ は $0 \leq t < T$ で存在して, $t = T$ において次の意味で爆発する:

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \inf_{x \in Q} |u(t, x)| = \infty.$$

以下で使う記号を定義し, 定理 1 の証明を述べる.

記号 $H := G^{-1}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$m := \begin{cases} n/2 + 1/2, & n \text{ が奇数のとき,} \\ n/2 + 1, & n \text{ が偶数のとき.} \end{cases}$$

$$W_{t_0}(f, g) : \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)v = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \\ v(t_0) = f, \quad \partial_t v(t_0) = g, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \text{の解.}$$

$\tilde{f}(\xi) : f(x)$ の Fourier 変換.

$$\|f\|_{B_{2,r}^\sigma} := \|\tilde{f}\|_{L^2(|\xi| < 1)} + \left\| 2^{j\sigma} \|\tilde{f}\|_{L^2(2^{j-1} \leq |\xi| < 2^j)} \right\|_{\ell^r(j \in \mathbb{N})}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, 1 \leq r \leq \infty.$$

定理 1 の証明 証明が長いので $\boxed{0} \sim \boxed{7}$ の 8 段階に分ける.

$\boxed{0}$ 一般性を失うことなく, $-a \geq b < \infty$ と仮定してよい. Sobolev の埋込定理より

$$\exists C_0 \geq 1 \text{ s.t. } \|g\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} \leq C_0 \|g\|_{H^{n/2+1/2}}, \quad \|g\|_{L^\infty} \leq C_0 \|g\|_{H^{n/2+1/2}}.$$

また, 補題 2 より $\exists \delta \in (0, 1)$ s.t.

$$\|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}} + \|\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} < \delta \Rightarrow \|H(\varphi)\|_{B_{2,r}^{n/2}} + \|H'(\varphi)\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} < \varepsilon. \quad (0.1)$$

実際, 補題 2 (i) より

$$\begin{aligned} \|H(\varphi)\|_{B_{2,r}^{n/2}} &\leq \|H(\varphi)\|_{B_{2,1}^{n/2}} \leq \|H(\varphi)\|_{L^2} + \|H(\varphi)\|_{\dot{B}_{2,1}^{n/2}} \\ &\leq \|H'(\varphi)\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^2} + C \sum_{\ell=1}^m \|H^{(\ell)}(\varphi)\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{\dot{B}_{2,1}^{n/2}}^\ell \\ &\leq C \|H'(\varphi)\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}} + C \sum_{\ell=1}^m \|H^{(\ell)}(\varphi)\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}}^\ell. \end{aligned}$$

ここで, $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq C_0 \|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}} \leq C_0 \delta$ だから

$$\|H(\varphi)\|_{B_{2,r}^{n/2}} \leq C \sup_{|\lambda| \leq C_0 \delta} |H'(\lambda)| \|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}} + C \sum_{\ell=1}^m \sup_{|\lambda| \leq C_0 \delta} |H^{(\ell)}(\lambda)| \|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}}^\ell.$$

また, 補題 2 (ii) より

$$\begin{aligned} \|H'(\varphi)\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} &= \|\psi + (H'(\varphi) - 1)\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} \\ &\leq \|\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} + \|(H'(\varphi) - 1)\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} \\ &\leq \|\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} + \|H'(\varphi) - 1\|_B \|\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}}. \end{aligned}$$

ここで, $n = 1$ のときは $B = H^m(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R})$ で, $n \geq 2$ のときは $B = \dot{B}_{2,1}^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ である. さらに,

$$\|H'(\varphi) - 1\|_B \leq C \sum_{\ell=1}^m \|H^{(\ell+1)}(\varphi)\|_{L^\infty} \|\varphi\|_B^\ell \leq C \sum_{\ell=1}^m \sup_{|\lambda| \leq C_0 \delta} |H^{(\ell+1)}(\lambda)| \|\varphi\|_{H^{n/2+1/2}}^\ell.$$

以上より, $\delta > 0$ を十分小さく取れば, (0.1) が成り立つことが示された.

□ $0 \leq \chi_1 \leq 1$, $\chi_1(s) = 0$ for $|s| \geq \pi/3$, $\chi_1(s) = 1$ for $|s| \leq \pi/6$ なる $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ と $N < M$ なる $N, M \in \mathbb{N}$ に対して $\psi_1 \in \mathcal{S}$ を

$$\tilde{\psi}_1(\xi) := \sum_{k=2^N}^{2^M-1} a_k \chi_1\left(|\xi| - \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right), \quad a_k = \frac{1}{k^{n-1}j} \text{ if } 2^j \leq k < 2^{j+1}$$

と定義し, $v_1 := W_0(0, \psi_1)$ とおく. このとき N と M を十分大きく取れば

$$v_1(1, 0) \geq b + 1, \quad \|\psi_1\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} < \delta/9 \quad (1.1)$$

が成り立つ. 実際,

$$v_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \tilde{\psi}_1(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

より

$$\begin{aligned} v_1(1, 0) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin|\xi|}{|\xi|} \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi \geq C \sum_{k=2^N}^{2^M-1} a_k \int_{\pi/3+2\pi k}^{2\pi/3+2\pi k} \frac{1}{r} r^{n-1} dr \\ &\geq C \sum_{k=2^N}^{2^M-1} a_k k^{n-2} \geq C \sum_{j=N}^{M-1} \frac{1}{j} \sum_{2^j \leq k < 2^{j+1}} \frac{1}{k} \geq C \sum_{j=N}^{M-1} \frac{1}{j} \sim \log \frac{M}{N}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{2^j \leq k < 2^{j+1}} \frac{1}{k} \sim \log \frac{2^{j+1}}{2^j} = \log 2$$

であることを用いた. また

$$\begin{aligned} \|\psi_1\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} &= \|2^{(n/2-1)j} \tilde{\psi}_1\|_{L^2(2^{j-1} \leq |\xi| < 2^j)} \|e^{r(\cdot)}\|_{(j \in \mathbb{N})} \\ &\leq C \|2^{(n/2-1)j} \left(\sum_{2^j \leq k < 2^{j+1}} a_k^2 \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} r^{n-1} dr \right)^{1/2}\|_{e^{r(N \leq j < M)}} \\ &\leq C \left\| \left(\sum_{2^j \leq k < 2^{j+1}} a_k^2 k^{2(n/2-1)} k^{n-1} \right)^{1/2} \right\|_{e^{r(N \leq j < M)}} \\ &\leq C \left\| \frac{1}{j} \left(\sum_{2^j \leq k < 2^{j+1}} \frac{1}{k} \right)^{1/2} \right\|_{e^{r(N \leq j < M)}} \leq C \left\| \frac{1}{j} \right\|_{e^{r(N \leq j < M)}} \\ &\leq C \left(\int_N^\infty \frac{ds}{s^r} \right)^{1/r} \leq CN^{1/r-1}. \end{aligned}$$

$r > 1$ だから, N と M を適当に大きく取れば (1.1) が成り立つことが分かる.

[2] $K \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_2 = 2^{-K} < \varepsilon$, $v_2(t, x) := v_1(t/\varepsilon_2, x/\varepsilon_2) = W_0(0, \psi_2)$, $\psi_2(x) = \psi_1(x/\varepsilon_2)/\varepsilon_2$ とすると,

$$v_2(\varepsilon_2, 0) = v_1(1, 0) \geq b + 1, \quad \|\psi_2\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} = \|\psi_1\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} < \frac{\delta}{9}$$

が成り立つ. 実際, $\tilde{\psi}_2(\xi) = \tilde{\psi}_1(\xi) = 0$ if $|\xi| < 1$, $\tilde{\psi}_2(\xi) = \varepsilon_2^{n-1} \tilde{\psi}_1(\varepsilon_2 \xi)$ より

$$\begin{aligned} \|\psi_2\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} &= \|2^{(n/2-1)j} \varepsilon_2^{n-1} \|\tilde{\psi}_1(\varepsilon_2 \xi)\|_{L^2(2^{j-1} \leq |\xi| < 2^j)}\|_{\ell^r(j \in \mathbb{N})} \\ &= \|2^{(n/2-1)j - (n-1)K + nK/2} \|\tilde{\psi}_1\|_{L^2(2^{j-K-1} \leq |\xi| < 2^{j-K})}\|_{\ell^r(j \in \mathbb{N})} \\ &= \|2^{(n/2-1)(j-K)} \|\tilde{\psi}_1\|_{L^2(2^{j-K-1} \leq |\xi| < 2^{j-K})}\|_{\ell^r(j \in \mathbb{N})} = \|\psi_1\|_{B_{2,r}^{n/2-1}}. \end{aligned}$$

[3] $\|\psi_2 - \psi_3\|_{H^{n/2+1/2}} < \delta/(9C_0)$ なる $\psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ をとり, $v_3 := W_0(0, \psi_3)$ とおくと, $v_3(\varepsilon_2, 0) > b$ が成り立つ. 実際, [2] と

$$\begin{aligned} |v_2(\varepsilon_2, 0) - v_3(\varepsilon_2, 0)| &\leq \|v_2(\varepsilon_2) - v_3(\varepsilon_2)\|_{L^\infty} \\ &\leq C_0 \|v_2(\varepsilon_2) - v_3(\varepsilon_2)\|_{H^{n/2+1/2}} \leq C_0 \varepsilon_2 \|\psi_2 - \psi_3\|_{H^{n/2+1/2}} < \frac{\delta}{9} \varepsilon_2, \end{aligned}$$

より

$$v_3(\varepsilon_2, 0) \geq v_2(\varepsilon_2, 0) - \frac{\delta}{9} \varepsilon_2 \geq b + 1 - \frac{\delta}{9} \varepsilon_2 > b.$$

これから,

$$\exists T \in (0, \varepsilon_2) \text{ s.t. } \|v_3(t)\|_{L^\infty} < b \text{ for } 0 \leq t < T, \|v_3(T)\|_{L^\infty} = b.$$

このとき一般性を失うことなく

$$\exists X \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } v_3(T, X) = b, \partial_t v_3(T, X) \geq 0$$

としてよい. また, 有限伝播性より

$$\exists R_3 > 0 \text{ s.t. } v_3(t, x) = 0 \text{ if } 0 \leq t \leq T \text{ and } |x| \geq R_3.$$

$\chi_3(x) = 1$ for $|x| \leq R_3 + T$ なる $\chi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, $M_3 := \max\{\|\chi_3\|_{H^{n/2+1/2}}, 1\}$ と

おき, $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ を $C_0 M_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 < b/2$, $C_0 M_3 \varepsilon_3 < \delta/9$ ととる.

□4 $v_4 := v_3 + W_0(0, \varepsilon_3 \chi_3)$ とおくと, $v_4(t, x) = v_3(t, x) + \varepsilon_3 t$ if $0 \leq t \leq T$, $|x| \leq R_3$,
 $v_4(t, x) = W_0(0, \varepsilon_3 \chi_3)$ if $0 \leq t \leq T$, $|x| \geq R_3$ より

$$\min_{0 \leq t \leq T, |x| \leq R_3} v_4(t, x) = \min_{0 \leq t \leq T, |x| \leq R_3} \{v_3(t, x) + \varepsilon_3 t\} > -b,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T, |x| \geq R_3} |v_4(t, x)| \leq C_0 \|\varepsilon_3 \chi_3\|_{H^{n/2+1/2}} T \leq C_0 \varepsilon_3 M_3 \varepsilon_2 < \frac{b}{2}.$$

これと $\partial_t v_4(T, X) = \partial_t v_3(T, X) + \varepsilon_3 > 0$ より

$\exists \delta_4 \in (0, \min\{\varepsilon_2, b\})$ s.t.

$$\inf_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n} v_4(t, x) \geq -b + \delta_4, \quad \partial_t v_4(t, x) > 0 \text{ if } |x - X| + |t - T| < \delta_4.$$

また, $v_4(T, X) = v_3(T, X) + \varepsilon_3 T = b + \varepsilon_3 T > \|v_4(t)\|_{L^\infty}$ for $0 \leq t < T$.

□5 $v_5 := \frac{b}{v_4(T, X)} v_4$ とおくと,

$$\|v_5(t)\|_{L^\infty} = \frac{b}{v_4(T, X)} \|v_4(t)\|_{L^\infty} < b, \quad 0 \leq t < T, \quad v_5(T, X) = b,$$

$$\partial_t v_5(t, x) > 0 \text{ for } |x - X| + |t - T| < \delta_4, \quad \inf_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n} v_5(t, x) \geq -b + \delta_4.$$

有限伝播性より

$\exists R_5 > 0$ s.t. $v_5(t, x) = 0$ if $0 \leq t \leq T$ and $|x| \geq R_5$.

$\chi_5(x) = 1$ for $|x| \leq R_5 + T$ なる $\chi_5 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, $M_5 := \max\{\|\chi_5\|_{H^{n/2+1/2}}, 1\}$ と

おき, $\varepsilon_5 \in (0, \delta_4/4)$ を $C_0 \varepsilon_5 + 8C_0^2 M_5 \varepsilon_2 \varepsilon_5 / \delta_4 < \min\{\delta_4, \delta/9\}$ ととる. 補題3より

$\exists g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\exists \delta_5 > 0$ s.t. $\|g\|_{H^{n/2+3/2}} < \varepsilon_5$, $g(x) = 0$ for $|x - X| \geq \varepsilon_5$,

$$v_5(T, x) + g(x) = b \text{ for } |x - X| \leq \delta_5, \quad v_5(T) + g \leq b.$$

□6 $v_6 := W_T(v_5(T) + g, \partial_t v_5(T))$, $\varepsilon_6 := 4C_0 \varepsilon_5 / \delta_4$ とおくと

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} v_6(t, x) \leq b + \varepsilon_6(T - t) \text{ for } 0 \leq t \leq T \quad (6.1)$$

が成り立つ。実際, (i) $T - \delta_4/4 \leq t \leq T$, $|x - X| \leq \delta_4/2$ のとき, $\partial_t v_5(t, x) \geq 0$ より $\partial_t v_6(t, x) - \partial_t v_5(t, x) \leq \partial_t v_6(t, x)$. よつて, $v_6(T, x) = v_5(T, x) + g(x) \leq b$ に注意すると

$$\begin{aligned} v_6(t, x) &\leq v_6(T, x) + \int_t^T |\partial_t v_5(s, x) - \partial_t v_6(s, x)| ds \\ &\leq v_6(T, x) + \int_t^T \|\partial_t v_5(s) - \partial_t v_6(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq b + C_0 \int_t^T \|\partial_t(v_5(s) - v_6(s))\|_{H^{n/2+1/2}} ds \\ &\leq b + C_0(T-t)\|g\|_{H^{n/2+3/2}} \leq b + C_0(T-t)\varepsilon_5 \leq b + \varepsilon_6(T-t). \end{aligned}$$

(ii) $T - \delta_4/4 \leq t \leq T$, $|x - X| \geq \delta_4/2$ のとき, $g(x) = 0$ for $|x - X| \geq \varepsilon_5$, $\varepsilon_5 < \delta_4/4$ より $v_6(t, x) = v_5(t, x) \leq b$. (iii) $0 \leq t \leq T - \delta_4/4$ のとき,

$$\begin{aligned} v_6(t, x) &\leq v_5(t, x) + C_0\|g\|_{H^{n/2+1/2}} \\ &\leq b + C_0\varepsilon_5 \leq b + C_0(T-t)\frac{4\varepsilon_5}{\delta_4} = b + \varepsilon_6(T-t). \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) より, (6.1) が示された。また, 次の関係にも注意する。

$$C_0\varepsilon_5 + 2C_0M_5\varepsilon_2\varepsilon_6 < \min\{\delta_4, \delta/9\}.$$

□ $v_7 := W_T(v_6(T), \partial_t v_6(T) + 2\varepsilon_6\chi_5)$ とおくと, $v_7 = W_T(v_5(T) + g, \partial_t v_5(T) + 2\varepsilon_6\chi_5) = v_5 + W_T(g, 2\varepsilon_6\chi_5)$ より

$$|x - X| \leq \delta_5 \Rightarrow v_7(T, x) = v_5(T, x) + g(x) = b. \quad (7.1)$$

また,

$$\|v_7(t)\|_{L^\infty} < b \text{ for } 0 \leq t < T \quad (7.2)$$

が成り立つ。実際, (i) $0 \leq t < T$, $|x| \leq R_5$ のとき,

$$\begin{aligned} v_7(t, x) &= v_6(t, x) + 2\varepsilon_6(t - T) \\ &\leq b + \varepsilon_6(T - t) - 2\varepsilon_6(T - t) = b - \varepsilon_6(T - t) < b. \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq t < T$, $|x| \geq R_5$ のとき, $v_7(T, x) = v_5(T, x) + g(x) = g(x)$, $\partial_t v_7(T, x) = \partial_t v_5(T, x) + 2\varepsilon_6 \chi_5(x) = 2\varepsilon_6 \chi_5(x)$ より

$$\begin{aligned} |v_7(t, x)| &\leq C_0 \|g\|_{H^{n/2+1/2}} + C_0 \|2\varepsilon_6 \chi_5\|_{H^{n/2+1/2}} T \\ &\leq C_0 \varepsilon_5 + C_0 2\varepsilon_6 M_5 \varepsilon_2 < \delta_4 < b. \end{aligned}$$

(iii) $0 \leq t \leq T$ のとき,

$$\begin{aligned} |v_5(t, x) - v_7(t, x)| &\leq C_0 \|g\|_{H^{n/2+1/2}} + C_0 \|2\varepsilon_6 \chi_5\|_{H^{n/2+1/2}} T \\ &\leq C_0 \varepsilon_5 + C_0 2\varepsilon_6 M_5 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} v_7(t, x) &\geq \inf_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n} v_5(t, x) - C_0 \varepsilon_5 - 2C_0 M_5 \varepsilon_2 \varepsilon_6 \\ &\geq \inf_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n} v_4(t, x) - C_0 \varepsilon_5 - \frac{8C_0^2 M_5 \varepsilon_2 \varepsilon_5}{\delta_4} \\ &\geq -b + \delta_4 - C_0 \varepsilon_5 - \frac{8C_0^2 M_5 \varepsilon_2 \varepsilon_5}{\delta_4} > -b. \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) より (7.2) が示された. 最後に

$$\|v_7(0)\|_{H^{n/2+1/2}} + \|\partial_t v_7(0)\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} < \delta \quad (7.3)$$

を示す. $v_7 = v_5 + W_T(g, 2\varepsilon_6 \chi_5)$, $v_5(0) = 0$ より

$$\begin{aligned} \|v_7(0)\|_{H^{n/2+1/2}} &\leq \|g\|_{H^{n/2+1/2}} + \|2\varepsilon_6 \chi_5\|_{H^{n/2+1/2}} T \\ &\leq \varepsilon_5 + 2\varepsilon_6 M_5 \varepsilon_2 \leq C_0 \varepsilon_5 + 2C_0 M_5 \varepsilon_2 \varepsilon_6 < \frac{\delta}{9}. \end{aligned}$$

また

$$\|\partial_t v_7(0)\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} \leq \|\partial_t v_5(0)\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} + \|W_T(g, 2\varepsilon_6 \chi_5)(0)\|_{B_{2,r}^{n/2-1}}.$$

ここで

$$\partial_t v_5(0) = \frac{b}{v_4(T, X)} \partial_t v_4(0) = \frac{b}{v_4(T, X)} (\psi_3 + \varepsilon_3 \chi_3)$$

$$\begin{aligned}
\|\partial_t v_5(0)\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} &\leq \|\psi_3\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} + \|\varepsilon_3 \chi_3\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} \\
&\leq \|\psi_2\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} + C_0 \|\psi_2 - \psi_3\|_{H^{n/2+1/2}} + C_0 \varepsilon_3 \|\chi_3\|_{H^{n/2+1/2}} \\
&< \frac{\delta}{9} + \frac{\delta}{9} + C_0 \varepsilon_3 M_3 < \frac{3}{9} \delta.
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\|W_T(g, 2\varepsilon_6 \chi_5)(0)\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} &\leq C_0 \|W_T(g, 2\varepsilon_6 \chi_5)(0)\|_{H^{n/2+1/2}} \\
&\leq C_0 \|g\|_{H^{n/2+1/2}} + C_0 \|2\varepsilon_6 \chi_5\|_{H^{n/2+1/2}} T \\
&\leq C_0 \varepsilon_5 + C_0 2\varepsilon_6 M_5 \varepsilon_2 < \frac{\delta}{9}.
\end{aligned}$$

よって $\|\partial_t v_7(0)\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} < 4\delta/9$ が成り立つ。これで (7.3) が示された。

結論として, (0.1), (7.1), (7.2), (7.3) より, $u(t, x) = H(v_7(t, x))$ は定理 1 の条件をすべてみたす (2) の解であることが分かる。 (証明終)

補題 2 ([4, Lemma 3.1]) $n \in \mathbb{N}, r \geq 1, F \in C^m(\mathbb{R}), F(0) = 0$ とし, B を $\dot{B}_{2,1}^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ または $H^m(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき 定数 $C = C(n) > 0$ が存在して以下の評価が成り立つ。

$$(i) \quad \|F(\varphi)\|_B \leq C \sum_{\ell=1}^m \|F^{(\ell)}(\varphi)\|_{L^\infty} \|\varphi\|_B^\ell,$$

$$(ii) \quad \|\varphi\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}} \leq C \|\varphi\|_B \|\psi\|_{B_{2,r}^{n/2-1}}. \text{ 但し, } n=1 \text{ かつ } B = \dot{B}_{2,1}^{n/2} \text{ の場合は除く.}$$

補題 2 の証明は省略する。

補題 3 ([4, Lemma 4.3]) $M \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \leq M, \varphi(X) = M$ とする。

このとき $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \exists \delta > 0$ s.t. $\|g\|_{H^{n/2+3/2}} < \varepsilon, g(x) = 0$ for $|x - X| \geq \varepsilon,$

$$\varphi(x) + g(x) = M \text{ for } |x - X| \leq \delta, \quad \varphi + g \leq M.$$

補題 3 の証明 $0 \leq \chi(x) \leq 1, \chi(x) = 0$ if $|x| \geq 2, \chi(x) = 1$ if $|x| \leq 1$ なる $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$g(x) := \chi \left(\frac{x - X}{\delta} \right) (M - \varphi(x)), \quad \delta > 0$$

とおく. このとき

$$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad g(x) = 0 \text{ for } |x - X| \geq 2\delta,$$

$$\varphi + g \leq M, \quad \varphi(x) + g(x) = M \text{ for } |x - X| \leq \delta.$$

また $\varphi(X) = M = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)$ より, $\nabla \varphi(X) = 0$. 任意の $\mu \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \|g\|_{H^\mu} &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha+\beta \leq \mu} \|(\partial_k^\alpha \chi) \left(\frac{x - X}{\delta} \right) \delta^{-\alpha} \partial_k^\beta (M - \varphi)\|_{L^2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha+\beta \leq \mu} \|\partial_k^\alpha \chi\|_{L^2} \delta^{-\alpha+n/2} \|\partial_k^\beta (M - \varphi)\|_{L^\infty(|x-X| \leq 2\delta)} \\ &\leq C \sum_{\alpha+\beta \leq \mu} \delta^{-\alpha+n/2} \delta^{2-\beta} \leq C \delta^{n/2+2-\mu}. \end{aligned}$$

ここで, C は μ, n, χ, φ には依るが δ には依らない正定数である. n が奇数のときは, $\mu = n/2 + 3/2$ とし, δ を十分小さく取ればよい. n が偶数のときは, 複素補間 $[H^{n/2+1}, H^{n/2+2}]_{1/2} = H^{n/2+3/2}$ より望みの結果を得る. (証明終)

References

- [1] S. Klainerman and M. Machedon, Smoothing estimates for null forms and applications, *Duke Math. J.* **81** (1995) 99–133.
- [2] S. Klainerman and S. Selberg, Remarks on the optimal regularity for equations of wave maps type, *Comm. Partial Differential Equations* **22** (1997) 901–918.
- [3] K. Nakanishi, Local wellposedness and illposedness in the critical Besov spaces for semilinear wave equations with quadratic forms, *Funkcialaj Ekvacioj* **42** (1999) 261–279.

- [4] K. Nakanishi and M. Ohta, On global existence of solutions to nonlinear wave equations of wave map type, *Nonlinear Anal.* **42** (2000) 1231–1252.
- [5] D. Tataru, Local and global results for wave maps I, *Comm. Partial Differential Equations* **23** (1998) 1781–1793.
- [6] D. Tataru, On global existence and scattering for the wave maps equation, *Amer. J. Math.* **123** (2001) 37–77.