

リプシッツ作用素の半群の生成定理

岡山大学理学部 田中直樹 (Naoki Tanaka)
 Department of Mathematics, Faculty of Science,
 Okayama University, Okayama 700-8530

1. 序論

このノートは、実 Banach 空間の閉集合上で定義されたリプシッツ作用素の半群の基礎的な性質を系統的に明らかにすることを目的に、リプシッツ作用素の半群の生成理論について調べたものである。将来的には、[1] で調べられている保存則系への応用が可能な理論を構築する必要がある。

まず、リプシッツ作用素の半群の定義から始める。

X を実 Banach 空間とし、そのノルムを $\|\cdot\|$ で表す。 D を X の閉部分集合とする。

定義 1. D からそれ自身への作用素の族 $\{T(t); t \geq 0\}$ は、次の 3 つの条件が満たされる時、 D 上のリプシッツ作用素の半群と呼ばれる。

$$(S1) \quad T(0)x = x \quad (x \in D), \quad T(t+s)x = T(t)T(s)x \quad (x \in D, t, s \geq 0).$$

$$(S2) \quad \text{各 } x \in D \text{ に対して, } T(\cdot)x : [0, \infty) \rightarrow X \text{ は連続である.}$$

$$(S3) \quad \text{任意の } \tau > 0 \text{ に対して, } M \geq 1 \text{ が存在して, } \|T(t)x - T(t)y\| \leq M\|x - y\| \text{ (} x, y \in D, t \in [0, \tau]\text{)}.$$

定義 2. $\{T(t); t \geq 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素の半群とする。このとき、次で定義される作用素 A_0 は、 $\{T(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素と呼ばれる。

$$\begin{cases} A_0x = \lim_{t \downarrow 0} (T(t)x - x)/t \quad (x \in D(A_0)), \\ D(A_0) = \{x \in D; \lim_{t \downarrow 0} (T(t)x - x)/t \text{ が存在する} \}. \end{cases}$$

クラス (C_0) の半群に対する Feller の定理の非線形版である次の定理を紹介する。

定理 1 ([4, Theorem 4.1]). $\{T(t); t \geq 0\}$ を (S1), (S2) を満たす D からそれ自身への作用素の族とする。このとき、次の事柄は同値である。

- (i) $\{T(t); t \geq 0\}$ は D 上のリプシッツ作用素の半群である。
- (ii) 定数 $M \geq 1, \omega \geq 0$ が存在して、 $\|T(t)x - T(t)y\| \leq Me^{\omega t}\|x - y\| \quad (x, y \in D, t \geq 0).$
- (iii) 定数 $\omega \geq 0, M \geq m > 0$, リプシッツ連続な非負値汎関数 $V : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ が存在して、

$$\begin{aligned} m\|x - y\| &\leq V(x, y) \leq M\|x - y\| \quad (x, y \in D), \\ V(T(t)x, T(t)y) &\leq e^{\omega t}V(x, y) \quad (x, y \in D, t \geq 0). \end{aligned}$$

定理 1 を用いて得られる、無限小生成作用素の持つ性質を挙げておこう。

命題 2. A_0 を D 上のリプシッツ作用素の半群の無限小生成作用素とする. V を定理 1 の (iii) のものとする. このとき, A_0 は

$$D_+V(x, y)(A_0x, A_0y) \leq \omega V(x, y) \quad (x, y \in D(A_0)) \quad (\text{消散条件})$$

$$\lim_{h \downarrow 0} d(x + hA_0x, D)/h = 0 \quad (x \in D(A_0)) \quad (\text{接線条件})$$

を満たす. 但し,

$$D_+V(x, y)(\xi, \eta) = \liminf_{h \downarrow 0} (V(x + h\xi, y + h\eta) - V(x, y))/h, \quad ((x, y), (\xi, \eta) \in X \times X),$$

$$\text{各 } w \in X \text{ に対して, } d(w, D) = \inf\{\|w - z\|; z \in D\}.$$

無限小生成作用素が連続な場合には, [6, Theorem 5] の拡張である次のような生成定理が得られる.

定理 3 ([4, Theorem 4.2]). $A : D \rightarrow X$ を連続作用素とする. A が D 上のリプシッツ作用素の半群の無限小生成作用素であるための必要十分条件は, 定数 $\omega \geq 0$, $M \geq m > 0$, リプシッツ連続な非負値汎関数 $V : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ が存在して,

$$m\|x - y\| \leq V(x, y) \leq M\|x - y\| \quad (x, y \in D),$$

$$D_+V(x, y)(Ax, Ay) \leq \omega V(x, y) \quad (x, y \in D),$$

$$\liminf_{h \downarrow 0} d(x + hAx, D)/h = 0 \quad (x \in D).$$

このとき, 各 $x \in D$ に対して, $u(t) = T(t)x$ ($t \geq 0$) が, 抽象的コーシー問題

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & (t \geq 0), \\ u(0) = x \end{cases}$$

の唯一つの古典解 $u \in C([0, \infty); D) \cap C^1([0, \infty); X)$ を与える.

この定理 3 の応用例は, [4, 5] に述べられている.

2. 生成作用素が必ずしも連続とは限らない場合の理論を目指して

消散条件の見直しから始めよう.

(i) 生成作用素 $A : D \rightarrow X$ が連続の場合

接線条件 $\liminf_{h \downarrow 0} d(x + hAx, D)/h = 0$ ($x \in D$) は, 任意の $\varepsilon > 0$, $x \in D$ に対して, $h \in (0, \varepsilon]$, $x_h \in D$ が存在して, $\|x + hAx - x_h\|/h \leq \varepsilon$ を意味する. 即ち,

$$\|(x_h - x)/h - Ax\| \leq \varepsilon \quad \text{または} \quad (x_h - x)/h = Ax + z_h, \quad \|z_h\| \leq \varepsilon.$$

前進差分の 1 step 分の近似解の存在を保証する条件と考えられる. さて, もう 1 つの解 $(\hat{x}_h - \hat{x})/h = A\hat{x} + \hat{z}_h$ を考えてみよう. 2 つの x_h, \hat{x}_h を評価するために, $(V(x_h, \hat{x}_h) - V(x, \hat{x}))/h$ を考えるのは自然である. 今の設定では, 1 節で述べた消散条件のもとに $\liminf_{h \downarrow 0} (V(x_h, \hat{x}_h) -$

$V(x, \hat{x})/h \leq \omega V(x, \hat{x})$ が成り立つ. 従って, $V(x_h, \hat{x}_h)$ を $V(x, \hat{x})$ を用いて評価できそうである.

(ii) 生成作用素 A が必ずしも連続ではない場合

線形理論から $R(I - \lambda A) = X$ ($\lambda > 0$) のような値域条件が思い出される. この条件は, 任意の $\lambda > 0, x \in X$ に対して, $x_\lambda \in D(A)$ が存在して, $x_\lambda - \lambda Ax_\lambda = x$, 即ち $(x_\lambda - x)/\lambda = Ax_\lambda$ (後退差分) の 1 step 分の解の存在を保証する条件と考えることが出来る. 誤差を許す条件として, 次の条件は自然である.

任意の $\varepsilon > 0, x \in D$ に対して, $\lambda \in (0, \varepsilon], x_\lambda \in D(A)$ が存在して,

$$(x_\lambda - x)/\lambda = Ax_\lambda + z_\lambda, \quad \|z_\lambda\| \leq \varepsilon.$$

さて, もう 1 つの解 $(\hat{x}_\lambda - \hat{x})/\lambda = A\hat{x}_\lambda + \hat{z}_\lambda$ を考えてみよう. (i) のように $(V(x_\lambda, \hat{x}_\lambda) - V(x, \hat{x}))/\lambda$ を評価できることが好ましい. $x = x_\lambda - \lambda Ax_\lambda - \lambda z_\lambda$ であるから, $(V(x_\lambda, \hat{x}_\lambda) - V(x_\lambda - \lambda Ax_\lambda, \hat{x}_\lambda - \lambda A\hat{x}_\lambda))/\lambda$ を評価できれば良い. このことから, 消散条件として

$$C_-V(x, y)(Ax, Ay) \leq \omega V(x, y) \quad (x, y \in D(A))$$

を候補にあげることは, ごく自然なことである. 但し,

$$C_-V(x, y)(\xi, \eta) = -C^+V(x, y)(-\xi, -\eta)$$

$$C^+V(x, y)(\xi, \eta) = \limsup_{h \downarrow 0, x' \rightarrow x, y' \rightarrow y} (V(x' + h\xi, y' + h\eta) - V(x', y'))/h \quad (\text{クラーク微分}).$$

一般に, $D_+V(x, y)(\xi, \eta) \geq C_-V(x, y)(\xi, \eta)$ であるから, (i) の結果を含むような拡張を目指すためには, この消散条件と上に挙げた接線条件のもとにリプシッツ作用素の半群を生成できることが目標になる. 残念ながら, この目的には達していない.

出来るだけ自然な必要条件を探したい. そこで, もう少しリプシッツ作用素の半群の持つ性質を調べることにする.

命題 4. $\{T(t); t \geq 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素の半群とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \int_0^t (V(T(\tau)x, T(s)y) - V(T(\tau)x, y)) d\tau + \int_0^s (V(T(t)x, T(\sigma)y) - V(x, T(\sigma)y)) d\sigma \\ & \leq \omega \int_0^t \left(\int_0^s V(T(\tau)x, T(\sigma)y) d\sigma \right) d\tau, \quad (0 \leq s, t < \infty; x, y \in D). \end{aligned}$$

命題 5. A_0 を D 上のリプシッツ作用素の半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \limsup_{\delta \downarrow 0} (V(T(\delta)x, y) - V(x, y))/\delta \\ & + C_-V(x, y)(0, A_0y) \leq \omega V(x, y) \quad (x \in D, y \in D(A_0)). \end{aligned}$$

この命題を考慮して, 次のような消散条件と接線条件が一体化した条件を導入する.

(*) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $h_0 \in (0, \varepsilon]$ が存在し, 次が成り立つ. 任意の $x \in D$ に対して, $\delta \in (0, \varepsilon], (x_\delta, \xi_\delta) \in A$ が存在して

$$(i) \quad (V(x_\delta, y) - V(x, y))/\delta + (V(x_\delta, y) - V(x_\delta, y - h\eta))/h \leq \omega V(x, y) + \varepsilon$$

$$(h \in (0, h_0], (y, \eta) \in A)$$

$$(ii) \quad \|x_\delta - x - \delta\xi_\delta\| \leq \delta\varepsilon.$$

この条件は, 大雑把に言うと, 次のように解釈できる.

$x \in D$ とする. A_0 を D 上のリプシッツ作用素の半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする. $x_\delta = T(\delta)x$ と置くと,

$$(x_\delta - x)/\delta = (T(\delta)x - x)/\delta \approx A_0 T(\delta)x, \text{ 即ち } \|x_\delta - x - \delta A_0 x_\delta\| \leq \delta\varepsilon.$$

命題 5 により,

$$(V(x_\delta, y) - V(x, y))/\delta + C_- V(x, y)(0, A_0 y) \leq \omega V(x, y) + \varepsilon.$$

即ち, 条件 (*) は, リプシッツ作用素の半群を生成できるための必要条件に近い.

注記. $D_- V(x, y)(\xi, \eta) \leq \omega V(x, y)$ ($((x, \xi), (y, \eta)) \in A$), V が凸関数の場合, A が接線条件を満たすならば, A は条件 (*) を満たす.

3. リプシッツ作用素の半群の生成定理

$V : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ をつぎを満たす汎関数とする.

(V1) 定数 $L > 0$ が存在して $|V(x, y) - V(\hat{x}, \hat{y})| \leq L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|)$ ($((x, y), (\hat{x}, \hat{y})) \in X \times X$).

(V2) 定数 $M \geq m > 0$ が存在して, $m\|x - y\| \leq V(x, y) \leq M\|x - y\|$ ($(x, y) \in D$).

作用素 A は $D(A) \subset D$ および前節の条件 (*) を満たすと仮定する.

次の補助定理は, 近似解の存在を保証するものである. 証明は, [3] で用いられたアイデアを基礎としている.

補助定理 6. $\varepsilon > 0, x_0 \in D$ とする. このとき, $\bar{h} > 0, \{t_i\}_{i=0}^\infty \subset [0, \infty), \{(x_i, \xi_i)\}_{i=1}^\infty \subset A$ が存在して, つぎを満たす.

$$(i) \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < \cdots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty.$$

$$(ii) \quad t_i - t_{i-1} \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$(iii) \quad \|x_i - x_{i-1} - (t_i - t_{i-1})\xi_i\| \leq (t_i - t_{i-1})\varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$(iv) \quad (V(x_i, y) - V(x_{i-1}, y))/(t_i - t_{i-1}) + (V(x_i, y) - V(x_i, y - h\eta))/h$$

$$\leq \omega V(x_i, y) + \varepsilon, \quad h \in (0, \bar{h}], (y, \eta) \in A, i = 1, 2, \dots$$

以下, 簡単のために $\omega = 0$ の場合を記述することにする. 次の評価式が, 近似解の収束を証明するために重要な役割を果たす. 証明は, [2], [3] などの方法を用いてなされる.

補助定理 7. $T > 0, \varepsilon > 0, x_0 \in D$ とし, $\bar{h} > 0, \{t_i\}_{i=0}^N \subset [0, \infty), \{(x_i, \xi_i)\}_{i=1}^N \subset A$ は, 次の (i) から (iv) を満たすと仮定する.

- (i) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < T \leq t_N < T + \varepsilon.$
- (ii) $t_i - t_{i-1} \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N.$
- (iii) $\|x_i - x_{i-1} - (t_i - t_{i-1})\xi_i\| \leq (t_i - t_{i-1})\varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N.$
- (iv) $(V(x_i, y) - V(x_{i-1}, y))/(t_i - t_{i-1}) + (V(x_i, y) - V(x_i, y - h\eta))/h \leq \varepsilon,$
 $(h \in (0, \bar{h}], (y, \eta) \in A, i = 1, 2, \dots, N).$

さらに, $\hat{\varepsilon} \in (0, \bar{h}], \hat{x}_0 \in D$ とし, $\{\hat{t}_j\}_{j=0}^{\hat{N}} \subset [0, \infty), \{(\hat{x}_j, \hat{\xi}_j)\}_{j=1}^{\hat{N}} \subset A$ は, 次の (v) から (vii) を満たすと仮定する.

- (v) $0 = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \cdots < \hat{t}_{\hat{N}-1} < T \leq \hat{t}_{\hat{N}} < T + \hat{\varepsilon}.$
- (vi) $\hat{t}_j - \hat{t}_{j-1} \leq \hat{\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \dots, \hat{N}.$
- (vii) $V(\hat{x}_j, y) \leq V(\hat{x}_0, y) + L(\hat{t}_j \|Ay\| + (T + \hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon}), \quad j = 1, 2, \dots, \hat{N}, y \in D(A).$

このとき, 次の評価式が成り立つ.

$$\begin{aligned} V(x_i, \hat{x}_j) \leq & (M/m)L\{\|x_0 - u_0\| + \|\hat{x}_0 - u_0\| + (T + \hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} \\ & + ((t_i - \hat{t}_j)^2 + t_i\varepsilon + \hat{t}_j\hat{\varepsilon})^{1/2}\|Au_0\| \\ & + t_i\varepsilon + \sum_{k=1}^j \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1} - (\hat{t}_k - \hat{t}_{k-1})\hat{\xi}_k\|\}, \\ & (0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq \hat{N}, u_0 \in D(A)). \end{aligned}$$

定理 8. 各 $x \in D$ に対して, $T(t)x$ が抽象的コーシー問題

$$\begin{cases} u'(t) \in Au(t) & (t \geq 0), \\ u(0) = x \end{cases}$$

の唯一つの mild solution であるような D 上のリプシッツ作用素の半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ が存在する.

この証明は, まず, 補助定理 6, 7 により, 各 $x \in D$ に対して, mild solution $u(t; x)$ の一意存在を示す. 望まれるリプシッツ作用素の半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ は, $T(t)x = u(t; x)$ により定義されるものである.

この定理は, 線形の消散項を伴う Kirchhoff タイプの波動方程式の初期値問題の適切性に応用できる. 線形の消散項を伴う Kirchhoff タイプの波動方程式の初期値問題は, 別の方法で [7] により調べられている. 定理 8 は, 偏微分方程式の初期値問題に, 作用素論的な立場からの方法を与えるものである.

References

1. A. Bressan, T. P. Liu and T. Yang, L^1 stability estimates for $n \times n$ conservation laws, Arch. Ration. Mech. Anal. **149** (1999) 1–22.
2. M. G. Crandall, Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators, Proc. Sympos. Pure Math. **45** (1986) 305–337.
3. Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan **27** (1975) 640–665.
4. Y. Kobayashi and N. Tanaka, Semigroups of Lipschitz operators, Adv. Differential Equations **6** (2001) 613–640.
5. Y. Kobayashi and N. Tanaka, Generation and approximation of semigroups of Lipschitz operators, 数理解析研究所講究録 **1197** (2001) 122–136.
6. R. H. Martin Jr., Differential equations on closed subsets of a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973) 399–414.
7. Y. Yamada, On some quasilinear wave equations with dissipative terms, Nagoya Math. J. **87** (1982) 17–39.