数理解析研究所講究録 1285 巻 2002 年 211-218

一様乱流の速度分布の慣性正規性

国際高等研究所　巽　友正 (Tomomasa Tatsumi)
International Institute for Advanced Studies

日立製作所　吉村卓弘(Takahiro Yoshimura)
Hitachi Corporation

1．交差独立性理論

巽(1998)はさきに、この研究集会において「一様乱流における速度の交差独立性と速度分布」について報告し、交差独立性に仮説のもとに、自由減衰する一様乱流の一点速度分布が、エネルギー減衰率 ε に比例する拡散係数をもつ正規分布となること、さらに時間 t の逆一乗に比例するエネルギー減衰則を持つことを示した。　さらに、この仮説を三点速度に適用して、二点速度分布に対する閉じた方程式を導いたが、具体的に解を求めるには至らなかった。

今回は、交差独立仮説の三点速度への適用の仕方を工夫して、二点速度分布に対するより簡単で、しかも保存諸条件を満たす方程式を導き、この方程式を用いて、解のさまざまな性質を調べることができた。　最も著しい性質は、一点速度分布の際に見られた、粘性率 ν を含まない*慣性正規性*(inertial normality)が二点速度分布においても見られることで、非正規性は、粘性の影響を受ける散逸領域においてのみ現れる。　今回は、これらの結果について報告する。

2．Kolmogorov仮説

一様乱流において、時刻 t 、二点 x_1、x_2 での乱流の速度を $u(x_1, t)$、$u(x_2, t)$ で表わせば、一点・二点速度分布は次のように定義される。

$$f(1)=f(u_1, t)=\langle \delta(u(x_1, t)-u_1)\rangle \qquad \mathrm{I}(3)$$

$$f^{(2)}(1,2)=f^{(2)}(u_1, u_2; r, t)=\langle \delta(u(x_1, t)-u_1)\,\delta(u(x_2, t)-u_2)\rangle \qquad \mathrm{I}(4)$$

ここに、 $u_i\,(i=1,2)$ は速度 $u(x_i, t)$ に対応する確率変数、δ は三次元デルタ関数、$\langle\ \rangle$ は初期分布に対する平均値、そして、$r=x_2-x_1$ は二点間の距離を表わす。　なお、式番号の前の I は前論文(巽(1998))の式番号を示す。

距離$|\mathbf{r}|$が極めて大きいか、極めて小さいかの極限においては、$f^{(2)}$と f との間に次のような関係が成り立つ。

分離の条件： $\lim_{|r|\to\infty} f^{(2)}(1,2)=f(1)f(2)$ I(7)

一致の条件： $\lim_{|r|\to 0} f^{(2)}(1,2)=f(1)\,\delta\,(u_2-u_1)$ I(8)

これらの条件以外、一般に二点分布と一点分布との関係は存在しない。 ただ、多点分布を低次の分布と関係づけるのに広く用いられるのは*独立性*の仮定で、二点分布に対しては、

$$f^{(2)}(1,2)=f(1)f(2) \qquad \mathrm{I}(12)$$

のように表わされる。 この関係は、I(7)から明らかなように、$|\mathbf{r}|$が極めて大きい場合に成り立つ。

ここで見方を変えて、速度 u_1 と u_2 との*和*および*差*、

$$u_+=\frac{1}{2}(u_1+u_2), \qquad u_-=\frac{1}{2}\Delta u=\frac{1}{2}(u_2-u_1) \qquad \mathrm{I}(13)$$

を分布の新たな変数と考え、速度変数 u_+、u_- の分布をI(14)、I(15)のように定義すれば、$f^{(2)}$と f との独立関係I(12)とは違った関係、

$$f^{(2)}(1,2)=f^{(2)}(u_1,u_2;\mathbf{r},t)=2^{-3}g^{(2)}(u_+,u_-;\mathbf{r},t) \qquad \mathrm{I}(19)$$

$$g^{(2)}(u_+,u_-;\mathbf{r},t)=g_+(u_+,\mathbf{r},t)\,g_-(u_-,\mathbf{r},t) \qquad \mathrm{I}(20)$$

を考えることができる。 これが*交差独立性*である。 この関係は、通常の独立性I(12)とは違って、分離条件I(7)と一致条件I(8)をともに満たすことができる。

この交差独立性は、Kolmogorov(1941)の局所等方性乱流理論における基本仮説と同等であることが、Tatsumi(2001)によって示されている。 局所等方性乱流では、乱流の小規模成分は統計的に一様等方的であり、大規模成分とは独立な平衡状態にあると仮定し、小規模成分を表わす変数として速度差 Δu をとっている。この仮説は、I(13)とI(20)を考慮すれば、まさに*交差独立仮説*に他ならない。

この仮説についてはSreenivasan他(1998)による実験的検証がなされており、等方性乱流では、小規模成分に関する統計量は、慣性領域において大規模成分に依存しないとの結論が得られている。 この結論は、ここでの対象が一様等方性乱流であり、仮説の適用が慣性領域以下の距離 r に限られていることから見て、その有効性に十分な保証を与えるものと言えよう。

3. 慣性正規性

交差独立仮説を用いて導いた一点速度分布方程式 I(29) と、その解の表わす正規分布I(43)は、いずれもパラメターとしてはエネルギー散逸率 ε (I(32))のみを

含み、粘性率νを含まない。　これは、ここで得られた分布が、Kolmogorovの意味での慣性相似則に従う*慣性正規分布*(inertially normal distribution)であることを示している。　このことは、この分布のもつ乱流Reynolds 数が $R=\infty$ であり、Kolmogorov 長さが $\eta=0$ であることを意味しており、それは、この一様等方性乱流が有限の特性長さをもたないことに起因している。

この乱流のエネルギー減衰則 $E\propto t^{-1}$、エネルギー散逸の減衰則 $\varepsilon\propto t^{-2}$ (I(44)) は、いずれもこの意味に理解されなければならない。　すなわち、現在の多くの実験結果から帰納されるエネルギー減衰則は $E\propto t^{-1.2}$ であるが、この程度の誤差は、実験の乱流Reynolds数の有限性から止むを得ないものと思われる。

4. 二点速度分布方程式

二点速度分布を求めるには、二点分布方程式 I(53) の粘性項と圧力項に含まれる高次分布に交差独立仮説を適用して、閉じた方程式を導かなければならない。

粘性項に関しては、前回は一点分布の場合と同様、距離が 0 となる二点に対して仮説を適用して、粘性項の閉じた表現 I(53) を導いたが、今回もこの結果を用いる。　圧力項に関しては、前回は三点一致の条件 I(54) による仮説 I(57) を用いて、圧力項の閉じた表現 I(57) を導いた。　しかし、この仮定は一意的ではなく、得られた結果も取り扱いが難しいために、今回は粘性項と同じ方式での仮説の適用を行なう。

以上の方針のもとに解析(省略)を行なえば、次のような*二点速度分布方程式*が得られる。

$$[\partial/\partial t+(u_2-u_1)\cdot\partial/\partial r+\alpha^2\{|\partial/\partial u_1|^2+|\partial/\partial u_2|^2\}$$
$$-\{(\partial/\partial u_1\cdot\partial/\partial x_1)\beta(u_1,\ t)+(\partial/\partial u_2\cdot\partial/\partial x_2)\beta(u_2,\ t)\}]\times$$
$$\times f^{(2)}(u_1,u_2;r,t)=0 \quad (1)$$

$$\beta(u_i,t)=(4\pi)^{-1}\iint|r'|^{-1}(u_i\cdot\partial/\partial r')^2 g_-(u_-',r',t)\,dr'\,du_-',\quad i=1,2 \quad (2)$$

二点速度分布 $f^{(2)}$ は、二変数関数であるために取り扱いが難しく、一般にこれを速度和と速度差の分布に分けて考察するのが常である。　このため、(1)式を交差速度u_+、u_- に対して書き換えれば、次のようになる。

$$[\partial/\partial t+2u_-\cdot\partial/\partial r+\tfrac{1}{2}\alpha^2(|\partial/\partial u_+|^2+|\partial/\partial u_-|^2)$$
$$-\{(\partial/\partial u_1\cdot\partial/\partial x_1)\beta(u_+-u_-,t)+(\partial/\partial u_2\cdot\partial/\partial x_2)\beta(u_++u_-,t)\}]\times$$
$$\times g^{(2)}(u_+,u_-;r,t)=0 \quad (3)$$

5．速度和の分布

5.1 速度和の分布方程式

速度和の分布 g_+ に対する方程式は、(3)式を u_- のすべての値に対して積分することによって、次のようになる。

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_+|^2$$
$$-\{(\partial/\partial u_1\cdot\partial/\partial x_1)+(\partial/\partial u_2\cdot\partial/\partial x_2)\}\times$$
$$\times\{\beta(u_+,t)+\langle\beta(u_-)\rangle\}]g_+(u_+,r,t)=0$$

ところが、u_i と x_i $(i=1,2)$ による微分は、速度和 u_+ の関数に対して働くため、

$$\partial/\partial u_1=\tfrac{1}{2}(\partial/\partial u_+-\partial/\partial u_-),\quad \partial/\partial u_2=\tfrac{1}{2}(\partial/\partial u_++\partial/\partial u_-)$$
$$-\partial/\partial x_1=\partial/\partial x_2=\partial/\partial r \tag{4}$$

となるから、圧力項は消えて、方程式は次式に帰着する。

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_+|^2]g_+(u_+,r,t)=0 \tag{5}$$

(5)式は交差独立仮説による*速度和の分布方程式*を与えるが、方程式は粘性項の係数$\frac{1}{2}$を除いて一点速度分布方程式 I(29) と同形であり、距離 r を含まない。

5.2 速度和の正規分布

(5)式は I(29) の係数 α^2 を $\frac{1}{2}\alpha^2$ で置き換えたものであるから、同じ手順によって、一点速度分布I(43)から直ちに速度和の分布 g_+ に対する*三次元正規分布*、

$$g_+(u_+,r,t)=g_+(u_+,t)=(t/2\pi\alpha_0^2)^{3/2}\exp(-|u_+|^2 t/2\alpha_0^2) \tag{6}$$

および*一次元正規分布*、

$$g_+(u_+,r,t)=g_+(u_+,t)=(t/2\pi\alpha_0^2)^{1/2}\exp(-u_+^2 t/2\alpha_0^2) \tag{7}$$

が得られる。

速度和の分布 g_+ の分散が一点速度分布 f の分散の$\frac{1}{2}$であることは、g_+ が互いに独立な一点速度 u_1 と u_2 の和の分布に等しいことを示している。

速度和の分布の実験的測定は数多くなされているが、いずれも正規分布とほとんど一致しており、ただ平坦度は正規分布の 3よりやや小さい2.66となっている(Sreenivasan 他(1998))。　測定結果では分布が規格化されているため、$r\to 0$ の極限で、速度和の分布がどのように一点分布に移行しているかは分からない。

5.3 速度和の分布の慣性正規性

(6)、(7)式で与えられる速度和の分布が、一点速度分布 I(43) と同じ慣性正規

性をもつことは、分離の条件I(7)がすべての距離において成り立つことを意味する。　このことは、距離0での一致の条件I(8)と矛盾するように見えるが、これは分布の慣性相似性によって解決する。　慣性相似性の下では、Kolmogorov長さ$\eta=(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$は0であるから、散逸領域の大きさは無限小となる。　このとき、解は無限小の散逸領域の下端$r=0$において一致の条件I(8)を満たし、上端$r=0(\eta)>0$において分離の条件I(7)を満たすと考えればよい。　そして、解がrのすべての値に対して分離の条件I(7)を満たすことは、上に見た通りである。

5.4 準正規近似理論

二点速度分布に対する分離の条件I(7)が、距離0の近傍を除くすべての領域において成立することは、この条件に基礎をおく乱流の準正規近似理論に大きな物理的根拠を与える。　よく言われるように、この近似は低Reynolds数においてのみ有効なのではなく、逆に、慣性極限($\nu\to0$、$\varepsilon>0$)に近い高Reynolds数においても成立することは、上に示されたとおりである。

では、なぜ準正規近似理論のあるものは破綻し、あるものは一定の成果を収め得たのか。　その原因は、高Reynolds数における有限の慣性散逸($\varepsilon>0$)の存在にある。　近似理論の物理的根拠が何であれ、結果として有限の慣性散逸をどう取り入れたかによって、理論の成否が分かれたものである。　しかし、有限の慣性散逸は、元来、人為的な仮定ではなく、I(27)、I(28)におけるように、散逸項に乱流の小規模成分を繰り込むことによって導かれるべきものである。

6. 速度差の分布

6.1 速度差の分布方程式

速度差の分布g_-に対する方程式は、(3)式をu_+のすべての値について積分することによって、次のようになる。

$$[\partial/\partial t+2u_-\cdot\partial/\partial r+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_-|^2$$
$$-\{(\partial/\partial u_1\cdot\partial/\partial x_1)+(\partial/\partial u_2\cdot\partial/\partial x_2)\}\times$$
$$\times\{\langle\beta(u_+)\rangle+\beta(u_-,\ t)\}]\,g_-(u_-,r,t)=0$$

ところが、u_iとx_i $(i=1,2)$による微分は、小規模成分u_-の関数に働くため、

$$\partial/\partial u_1=-\partial/\partial u_-,\quad \partial/\partial u_2=\partial/\partial u_-,\quad -\partial/\partial x_1=\partial/\partial x_2=\partial/\partial r \qquad (8)$$

となり、方程式は次式に帰着する。

$$[\partial/\partial t+2u_-\cdot\partial/\partial r+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_-|^2$$
$$-2(\partial/\partial u_-\cdot\partial/\partial r)\beta(u_-,\ t)]g_-(u_-,r,t)=0 \qquad (9)$$

ここに、速度差u_-の関数は速度和u_+の関数に比べてより激しい変化を示すことを考慮して、$\langle\beta(u_+)\rangle$ を$\beta(u_-,t)$に比べて無視している。

(9)式は、速度差の分布に対する方程式を与えるが、圧力項に積分を含むため取り扱いが難しい。 このため、これを簡単化した近似方程式を導いておく。(2)式にu_-を代入して、主変数u_-と副変数u_-'との間に等方独立性を仮定すれば、

$$\beta(u_-,t)=(4\pi)^{-1}\iint|\ r'\ |^{-1}(u_-\cdot\partial/\partial r')^2g_-(u_-',r',t)dr'\,du_-'$$
$$=(12\pi)^{-1}|u_-|^2\iint|r'\ |^{-1}|\ \partial/\partial r'\ |^2g_-(u_-',r',t)dr'\,du_-'$$
$$=-(1/3)|v_-|^2\iint\delta(r')g_-(v_-',r',t)dr'\,dv_-'=-(1/3)|v_-|^2 \qquad (10)$$

となるから、(9)式は次のように書ける。

$$[\partial/\partial t+2u_-\cdot\partial/\partial r+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_-|^2$$
$$+(2/3)(\partial/\partial u_-\cdot\partial/\partial r)|u_-|^2]g_-(u_-,r,t)=0 \qquad (11)$$

以下、簡単のためこの方程式を用いる。

6.2 遠隔解

(11)式は一般に距離rに依存するが、遠隔領域ではr微分が無視できるため、

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_-|^2]\ g_-(u_-,r,t)=0 \qquad (12)$$

に帰着する。

(12)式は速度和の(5)式と同一であり、その解もまた*三次元正規分布*、

$$g_-(u_-,r,t)=g_-(u_-,t)=(t/2\pi\alpha_0^2)^{3/2}\exp(-|u_-|^2t\ /2\alpha_0^2) \qquad (13)$$

および*一次元正規分布*、

$$g_-(u_-,r,t)=g_-(u_-,t)=(t/2\pi\alpha_0^2)^{1/2}\exp(-u_-^2t/2\alpha_0^2) \qquad (14)$$

によって与えられる。

速度差の分布g_-の遠隔解(13)、(14)が、速度和の分布g_+と同形の正規分布となることは、二点速度が互いに独立であるとき、速度差も速度和と同様に独立偶然量の和となることからの当然の帰結である。

6.3 近接解

近接領域においては分布の非等方性が現れるため、(11)式の解を座標成分ごとの一次元分布に分解する必要がある。 ただ等方性乱流では、距離rに関する軸対称性を仮定することができるため、直角座標系 $x=(x,y,z)$ において、距離ベ

クトルを$r=(r,0,0)$、速度差を$u_-=(u_\parallel,v_\perp,w_\perp)$ととれば、*一次元速度差分布*は、

$$g_\parallel(u_\parallel,r,t)=\iint g_-(u_-,r,t)\,dv_\perp dw_\perp$$
$$g_\perp(v_\perp,r,t)=\iint g_-(u_-,r,t)\,du_\parallel dw_\perp \qquad (15)$$
$$g_\perp(w_\perp,r,t)=\iint g_-(u_-,r,t)\,du_\parallel dv_\perp$$

のように表わされる。$g_\parallel$は軸に平行な*縦速度差の分布*を、二つの$g_\perp$は垂直な*横速度差の分布*を表わす。軸対称性により、二つの横速度差の分布$g_\perp$は相等しい。

6.4 横速度差の分布の近接解

横速度差の分布$g_\perp$に対する方程式は、(11)式を$u_\parallel$、$w_\perp$のすべての値に対して積分すれば、次のように得られる。

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2\partial^2/\partial v_\perp^2]\,g_\perp(v_\perp,r,t)=0 \qquad (16)$$

(16)式は、遠隔領域に対する(12)式の一次元形に他ならないから、横速度差の分布の近接解は、遠隔解(14)と同じ*一次元正規分布*として次のように与えられる。

$$g_\perp(v_\perp,r,t)=g_\perp(v_\perp,t)=(t/2\pi\alpha_0^2)^{1/2}\exp(-v_\perp^2t/2\alpha_0^2) \qquad (17)$$

6.5 縦速度差の分布の近接解

縦速度差の分布$g_\parallel$に対する方程式は、(11)式を$v_\perp$、$w_\perp$のすべての値に対して積分すれば、次のように得られる。

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2\partial^2/\partial u_\parallel^2$$
$$+\{2u_\parallel+(2/3)(\partial/\partial u_\parallel)(u_\parallel^2+2\langle v_\perp^2\rangle)\}(\partial/\partial r)]g_\parallel(u_\parallel,r,t)=0 \qquad (18)$$

(18)式の最初の二項は距離rに依らない正規分布を与え、これに対して第三項はrに依存する非正規分布を与える。

(18)式の解として、一点速度分布と同じ時間的自己相似性をもつものを考え、

$$\alpha^2=\alpha_0^2t^{-2},\quad u_\parallel=u\,t^{-1/2}\alpha_0,\quad r=s\,t^{1/2}\alpha_0,\quad g_\parallel(u_\parallel,r,t)=t^{1/2}G(u,s) \qquad (19)$$

とおけば、(15)により、

$$\langle v_\perp^2\rangle=\int v_\perp^2g_\perp(v_\perp,t)\,dv_\perp=\alpha_0^2t^{-1} \qquad (20)$$

となり、(18)式は次のように書ける。

$$[1+u\partial/\partial u+\partial^2/\partial u^2]G+[-s+(4/3)\{5u+(2+u^2)\partial/\partial u\}]\partial G/\partial s=0 \qquad (21)$$

近接領域においては分布はuとsに対して急激に変化すると考えられるから、(21)式において最高階の項のみを考慮すれば、

$$\partial^2G/\partial u^2+(4/3)(2+u^2)\partial^2G/\partial u\partial s=0 \qquad (22)$$

(22)式の一般解は、Hを任意関数として次式で与えられる。

$$G(u,s)=H(u+u^3/6-(3/8)s) \tag{23}$$

(23)式は、Hとしてδ関数のような原点に集中した関数を考えれば、

$$s \ll 1 \text{ に対して} \qquad u \propto s \tag{24}$$

$$s \gg 1 \text{ に対して} \qquad u \propto s^{1/3} \tag{25}$$

の関係が成り立つことを示している。 このうち、(24)は、縦速度差の*正則相似則*を表わし、(25)は*慣性相似則*を表わしている。 このことから、近接解(23)は、正則領域と慣性領域に対応する解であることが分かる。

以上の結果は、本論文における交差独立仮説が局所平衡仮説と同等であることからの当然の帰結であると思われる。 ただ、(23)における関数Hの具体形を求めるには、有限の散逸領域を考慮した解析が必要であるが、これは次の論文の課題としたい。

7. 慣性相似分布の普遍性

以上の理論的結果は、一様乱流の一点・二点速度分布が、近接領域における縦速度差の分布を除いて、すべて*慣性正規分布*であることを示している。 この一様乱流における慣性相似分布の存在は、*交差独立仮説*による散逸領域の局在化によってもたらされたもので、より複雑な非一様乱流においても、その普遍的存在が期待される。 このことは、*交差独立仮説*の複雑乱流への応用に対して、明るい展望を与えるものと期待される。

引用文献

Kolmogorov, A.N.(1941) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.* 30, 301-305.

Lundgren, T.S.(1967) *Phys. Fluids* 10, 969-975.

Monin, A.S.(1967) *PMM J. Appl. Math. Mech.* 31, 1057-1068.

Sreenivasan, K.R. & Dhruva, B.(1998) *Prog. Theo. Phys. Suppl.* 130, 103-120.

Tatsumi, T.(1998) 数理解析研究所講究録, No.1052, pp.29-39.

Tatsumi, T.(2001) In Kambe, T. ed. *Geometry and Statistics of Turbulence.* Kluwer Acad. Publ. pp.3-12.