

# 射影演算子法による Kuramoto-Sivashinsky 方程式の平均量

九州大学総合理工学府 北原洋一 (KITAHAHA Youichi)

九州大学応用力学研究所 岡村誠 (OKAMURA Makoto)

## 概要

カオスや乱流に拡張された Mori の射影演算子法を、非線形方程式の解の平均量が満たす代数方程式を導出する手法として応用する。両端で異なる固定境界条件をもつ Kuramoto-Sivashinsky 方程式の時間平均量にショック構造がみられることが、Sakaguchi によって発見されている。今回は、この手法を用いてショック構造の解析を試みた。

## 1 導入と研究背景

Kuramoto-Sivashinsky 方程式 (KS 方程式) は、様々な現象における界面の位相不安定性を記述する応用範囲の広い方程式であるとともに、時空カオスを生じさせるもっとも簡単な偏微分方程式のひとつとしても知られている。そのため、この方程式は、解析対象が流体乱流固有の特性に依存しないとき、Navier-Stokes 方程式の簡単なモデルとして新たな乱流解析手法を試みるのに用いられことが多い。また、KS 方程式自体も豊富な特性を持っており、様々な方面で研究が進められている。

KS 方程式の大規模特性は、この方程式の興味深い特性のうちのひとつである。KS 方程式は、長波長近似のもとでノイズをともなった Burgers 方程式で記述されることが、動的繰り込み群によって理論的に予想されている [3]。また、このことに基づき数値実験から、カオス的な乱れによる有効粘性をもとめる試みもいくつかなされている [2][4][5]。Zaleski は KS 方程式を形式的にノイズをともなった Burgers 方程式に対応させることで、また、Sneppen らは分散についての関係式から、数値的に有効粘性をもとめている。一方、Sakaguchi は、計算領域の両端で異なる固定境界値を与えて数値実験することで、KS 方程式の解の時間平均にショック構造

$$u = A \tanh(\kappa x) \quad (1)$$

があらわれることを発見し、このショック構造の振幅  $A$  と傾き  $\kappa$  から有効粘性をもとめた。Sakaguchi と同様の初期条件と計算方法で KS 方程式を計算し、各格子点での時間平均をもとめた一例を図 1、図 2 に掲げる。ただし、時間離散間隔は  $\delta t = 0.0002$ 、空間離散間隔は  $\delta x = 0.2$  で実行した。ここではシステムサイズを  $L = 400$  とし、固定境界条件を図 1 では  $U = 1.5$ 、図 2 では  $U = 1.4$  としている。ショック構造は、 $U = 1.5$  で  $A = 0.72$ 、 $\kappa = 0.07$  となり、 $U = 1.4$  で  $A = 0.475$ 、 $\kappa = 0.035$  となっている。境界条件  $U$  が大きくなるとともに、ショック構造の振幅  $A$  は大きくなり、傾き  $\kappa$  は急になっていることがわかる。また、このショック構造はシステムサイズを  $L = 800$ 、 $L = 1600$  と大きくしてもあらわれるため、システムサイズによらない普遍的な性質であると考えられる。ただし、この性質が有限サイズ効果によるものかどうかは、さらに大きなシステムサイズによる検証が必要である。

射影演算子法とは、対象とする物理量から着目する物理量を抽出することによって見通しをよくし、議論を進める手法である。統計力学では、多自由度系を少数自由度であらわすことが必要であるから、微視的な多自由度系を巨視的な少数変数に射影することで情報の縮約をする。Mori は、平衡状態近傍での微視的な基礎方程式を巨視的な変数から構成される関数空間に射影することで巨視的な方程式である拡張された Langevin 方程式を導いた [6]。この手法の特徴は、通常着目されない射影した空間に直交する成分を記憶関数、及び、揺動力と考えたところにある。

Mori の射影演算子法を平衡状態近傍以外に適用する試みもなされている。Iwayama らはこの手法を二次元乱流に応用し、渦度方程式を Langevin 方程式に変形したときの記憶関数項を乱流渦粘性による減衰項と考えることで、渦粘性を定量的に評価している [7]。さらに、Mori らはこの手法をカオスや乱流に拡張し、非線形項を線形な変数から構成される関数空間に射影することで、非線形方程式から拡張された Langevin 方程式を導いている [1]。この拡張された射影演算子法を用いて平均量をもとめる試みとしては、Sato らによる非線形振動子の平均量に関する研究があり、誤差が 10% 未満の精度で平均量を予測している [8]。しかし、この非線形振動子の自由度は 3 と少ないため、多自由度系での検証が必要である。

本研究では、この射影演算子法を応用し、KS 方程式の平均量にあらわれるショック構造を解析することを試みる。この手法によって導いた方程式に、ショック構造  $A \tanh(\kappa x)$  の振幅  $A$  を与えることで傾き  $\kappa$  をもとめる。そして、この  $A$  と  $\kappa$  の関係を数値実験と比較する。

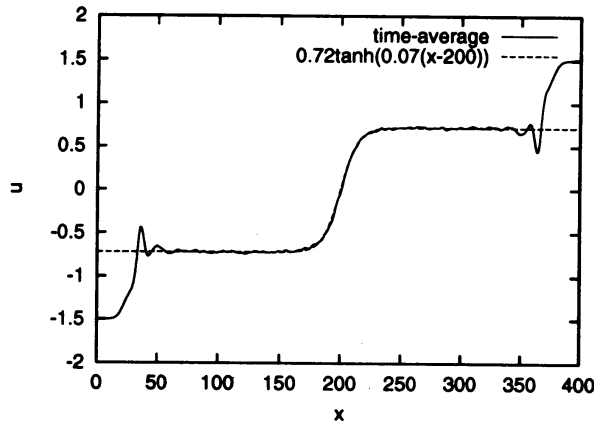


図 1: 時間平均 ( $U = 1.5$ )

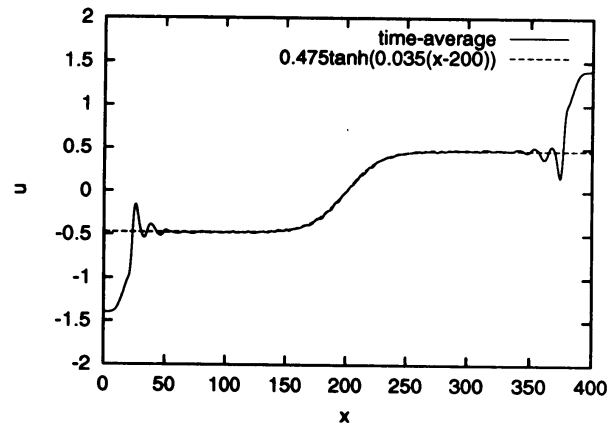


図 2: 時間平均 ( $U = 1.4$ )

## 2 カオスや乱流に拡張された射影演算子法

拡張された射影演算子法では、非線形項から線形な成分をすべて抽出したとき、その残りの完全に非線形な成分がカオスや乱流の予測困難な乱れを生じさせていると考える。変数  $u_l(t)$  ( $l = 0, 1, \dots, N$ ) から成る運動方程式

$$\frac{du_l(t)}{dt} = \Lambda u_l(t) \quad (2)$$

を考えよう。ただし、 $\Lambda$  は時間発展演算子である。式 (2) が成り立つとき、 $u_l(t)$  の任意の関数  $f(\mathbf{u}(t)) \equiv f(u_0(t), u_1(t), \dots, u_N(t))$  は、 $f(\mathbf{u}(t)) = f(e^{t\Lambda} \mathbf{u}) = e^{t\Lambda} f(\mathbf{u})$  のように、時間依存性を示す演算子  $e^{t\Lambda}$  と初期値関数  $f(\mathbf{u})$  を分離した形に変形できる。ただし、頻繁にあらわれる初期値の表記を簡略化するために  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(0)$  とした。ここで考える射影演算子は、分離された初期値関数に演算される時間依存しない演算子として定義する。任意の初期値関数  $f(\mathbf{u})$  を、すべての初期値  $u_l$  ( $l = 0, 1, \dots, N$ ) から構成される関数空間へ射影する演算子  $\mathcal{P}$  と、その空間に直交する空間に射影する演算子  $\mathcal{Q}$  を

$$\mathcal{P}f(\mathbf{u}) \equiv \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \langle f(\mathbf{u}) u_m^\dagger \rangle [(\mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger)^{-1}]_{mn} u_n \quad (3)$$

$$\mathcal{Q}f(\mathbf{u}) \equiv (1 - \mathcal{P})f(\mathbf{u}) \quad (4)$$

と定義する。ただし、 $\dagger$  はエルミート共役をあらわし、 $\langle \dots \rangle$  は集合平均をあらわし、 $(\mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger)^{-1}$  は逆行列をあらわしている。射影演算子  $\mathcal{P}$  は、形式的に線形項を抽出する演算子である。この定義に基づけば、例えば、 $u_1 u_2$  や  $u_1^2$  のような非線形項からも形式的に線形成分が抽出できる。 $\mathcal{Q}$  によって抽出される成分は、線形成分を取り去った残りの非線形な成分である。

このとき非線形項  $N_i(\mathbf{u}(t))$  は

$$\begin{aligned}
 N_i(\mathbf{u}(t)) &= e^{t\Lambda} N_i(\mathbf{u}) \\
 &= e^{t\Lambda} \mathcal{P} N_i(\mathbf{u}) + e^{t\Lambda} \mathcal{Q} N_i(\mathbf{u}) \\
 &= e^{t\Lambda} \mathcal{P} N_i(\mathbf{u}) + \int_0^t e^{(t-s)\Lambda} \mathcal{P} \Lambda e^{s\mathcal{Q}\Lambda} \mathcal{Q} N_i(\mathbf{u}) ds + e^{t\mathcal{Q}\Lambda} \mathcal{Q} N_i(\mathbf{u}) \\
 &= \sum_{n=0}^N \Omega_{ln} u_n(t) - \int_0^t \Gamma_{ln}(s) u_n(t-s) ds + r_i(\mathbf{u}, t)
 \end{aligned} \tag{5}$$

のように分解される。ただし、振動行列、揺動力、記憶関数にそれぞれ対応する  $\Omega_{ln}$ 、 $r_i(\mathbf{u}, t)$ 、 $\Gamma_{ln}(t)$  は

$$\Omega_{ln} \equiv \sum_{m=0}^N \langle N_i(\mathbf{u}) u_m \rangle [(\mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger)^{-1}]_{mn} \tag{6}$$

$$r_i(\mathbf{u}, t) \equiv e^{t\mathcal{Q}\Lambda} \mathcal{Q} N_i(\mathbf{u}) \tag{7}$$

$$\Gamma_{ln}(t) \equiv - \sum_{m=0}^N \langle [\Lambda r_i(\mathbf{u}, t)] u_m \rangle [(\mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger)^{-1}]_{mn} \tag{8}$$

と定義している。

非線形項  $N_i(\mathbf{u}(t))$  を分解した後の各項の解釈について考えよう。第一項は、非線形項から線形成分を抽出した線形項で、単調な変動をあらわしている。ただし、本研究では  $\Omega_{ln}$  を単なる線形項の係数であるとみなし、振動行列とは解釈しない。第二項は、揺動力の時間変化から線形成分を抽出した記憶関数  $\Gamma_{ln}(t)$  と変数  $u_i(t)$  の合成積となっている。この項は、拡張された Langevin 方程式との対応から粘性項として解釈でき、時間をかけて摩擦や粘性が作用することを示している。第三項は、揺動力に対応している。第三項を揺動力として解釈する理由は以下の通りである。 $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$  より

$$\langle r_i(\mathbf{u}, t) u_i \rangle = 0 \tag{9}$$

が成り立つため、 $r_i(\mathbf{u}, t)$  は初期値  $u_i$  とは相関がない。また、統計的に定常となったとき、アトラクター上での長時間平均を分布関数とし、そこに分布する位相点を初期値  $u_i$  とすれば  $r_i(\mathbf{u}, t)$  と  $\Gamma_{ln}(t)$  を関係づける第二種揺動散逸定理を導くことができる。つまり、 $r_i(\mathbf{u}, t)$  は揺動力と同じ性質を満たす。このことから、 $r_i(\mathbf{u}, t)$  は決定論的であってランダムではないけれども、定性的に揺動力であるとみなす。

Mori ら [1] と異なる点は、初期値  $u_i$  の扱いにある。本研究では、記憶関数を扱う際に近似をするため、初期値はアトラクター上において短波長成分の平均が無視できる特定の位相点の周辺に分布しているとした。これによって、高次相関の連鎖が回避できるため、平均量方程式を導くことが可能となった。しかし、揺動散逸定理が満たされなくなるため、揺動力  $r_i(\mathbf{u}, t)$  の物理的意味はあいまいになる。

### 3 平均量方程式の導出

適当な変数変換によって、1次元 KS 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + u \frac{\partial u}{\partial x} \tag{10}$$

となる。ここでは理論的取扱を簡単にするために、変域を  $-\infty \leq x \leq \infty$  とする。さらに、両端で異なる固定値をもつように境界条件を

$$u(x, t)|_{x \rightarrow -\infty} = -A, \quad u(x, t)|_{x \rightarrow \infty} = A \tag{11}$$

とする。後でチェビシエフ変換を使うために、変域を  $[-1, 1]$  に変換する。ここでは  $x = 0$  近傍でのみ急激に変化する関数

$$y = \tanh(Kx) \tag{12}$$

を用いて変換する。\$K\$ は変動スケールに関するスケールパラメータで、ショック構造の変動スケールに対応させて適当に変化させる。これによって KS 方程式 (10) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f^{(n)} u \frac{\partial u}{\partial y} + f^{(1)} \frac{\partial u}{\partial y} + f^{(2)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f^{(3)} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + f^{(4)} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad (13)$$

と変換される。ただし、

$$f^{(n)} = K(1 - y^2) \quad (14)$$

$$f^{(1)} = -2K^2 y(1 - y^2)(8K^2 - 1 - 12K^2 y^2) \quad (15)$$

$$f^{(2)} = K^2(1 - y^2)^2(8K^2 - 1 - 36K^2 y^2) \quad (16)$$

$$f^{(3)} = 12K^4 y(1 - y^2)^3 \quad (17)$$

$$f^{(4)} = -K^4(1 - y^2)^4 \quad (18)$$

である。また、境界条件 (11) は

$$u(-1, t) = -A, \quad u(1, t) = A \quad (19)$$

と変換される。固定境界条件であるから、常微分化するのにチェビシエフ変換が有効である。\$N\$ 項で打ち切るチェビシエフ変換は

$$u(y, t) = \sum_{m=0}^N \hat{u}_m(t) T_m(y) \quad (20)$$

$$T_m(y) = \cos(m \arccos y) \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad (21)$$

である。\$T\_m(y)\$ はチェビシエフ関数。チェビシエフ変換 (20) によって、境界条件 (19) は

$$\sum_{m=0}^N \hat{u}_m = A \quad (22)$$

$$\sum_{m=0}^N (-1)^m \hat{u}_m = -A \quad (23)$$

となる。同様に、チェビシエフ変換 (20) によって KS 方程式 (13) は

$$\frac{d\hat{u}_l(t)}{dt} = N_l(\hat{u}(t)) + L_l(\hat{u}(t)) + F_l \quad (24)$$

となる。ただし、\$N\_l(\hat{u}(t))\$ は非線形項、\$L\_l(\hat{u}(t))\$ は線形項、\$F\_l\$ は定数項をまとめたものとする。また、境界条件を取り込むために、(22) と (23) を用いて KS 方程式 (13) から \$\hat{u}\_N\$、\$\hat{u}\_{N-1}\$ を消去したため、式 (24) は \$N-1\$ 個の方程式となっている。定数項は元の KS 方程式 (10) には含まれていないが、固定境界条件のためにあらわれた。

次に、拡張された射影演算子法を用いて非線形項を分解することによって、拡張された Langevin 方程式と同形の方程式にする。本来は全ての変数 \$\hat{u}\_i\$ に射影すべきであるが、計算量が膨大になるため、今回は一変数 \$\hat{u}\_1\$ のみに射影することにする。このとき射影演算子は

$$\mathcal{P}f(\hat{u}) \equiv \frac{\langle f(\hat{u}) \hat{u}_1 \rangle}{\langle \hat{u}_1^2 \rangle} \hat{u}_1 \quad (25)$$

$$\mathcal{Q}f(\hat{u}) \equiv (1 - \mathcal{P})f(\hat{u}) \quad (26)$$

と定義される。射影演算子 (25)、(26) を用いて、式 (24) を

$$\frac{d\hat{u}_l(t)}{dt} = \Omega_{l0} \hat{u}_1(t) + L_l(\hat{u}(t)) - \int_0^t \Gamma_{l0}(s) \hat{u}_1(t-s) ds + r_l(\hat{u}, t) + F_l \quad (27)$$

に変形する。ただし、時間発展演算子  $\Lambda$  を

$$\Lambda \equiv \sum_{l=0}^N \{N_l(\hat{\mathbf{u}}) + L_l(\hat{\mathbf{u}}) + F_l\} \frac{\partial}{\partial \hat{u}_l} \quad (28)$$

と定義している。ここで、初期値  $\hat{u}_1$  を両辺にかけ集合平均をとると、式(9)より揺動力  $r_l(\hat{\mathbf{u}}, t)$  が消える。さらに、 $\hat{u}_1$  と  $\hat{u}_l(t)$  との相関がなくなるまで十分時間が経過し、定常状態になると  $\langle \hat{u}_l(t) \rangle$  は時間に依存しなくなるので

$$\Omega_{l0} \langle \hat{u}_1(t) \rangle + \langle L_l(\hat{\mathbf{u}}(t)) \rangle - \frac{1}{\langle \hat{u}_1 \rangle} \int_0^{t \rightarrow \infty} \Gamma_{l0}(s) \langle \hat{u}_1(t-s) \hat{u}_1 \rangle ds + F_l = 0 \quad (29)$$

となる。ここまでは近似はなく厳密であるが、 $\Gamma_{l0}(t)$  を直接計算するのは困難であるため、Iwayama らと同様の近似をする [7]。もし、系の変動がカオス的であるならば、混合作用も強いであろうから、記憶関数  $\Gamma_{l0}(t)$  は急激に減少するはずである。そこで、 $\Gamma_{l0}(t)$  の減衰時間スケールは、KS 方程式の解の平均量における特徴的な変動時間スケールであるショック構造の変動時間スケールより十分短いと仮定する。この仮定より、 $t=0$  近傍からの寄与のみを考慮して積分を評価する。 $t=0$  近傍で展開し、記憶関数  $\Gamma_{l0}(t)$  を

$$\begin{aligned} \Gamma_{l0}(t) &= \Gamma_{l0}(0) + \dot{\Gamma}_{l0}(0)t + \dots \\ &\approx \Gamma_{l0}(0) \exp\left(\frac{\dot{\Gamma}_{l0}(0)}{\Gamma_{l0}(0)}t\right) \end{aligned} \quad (30)$$

のような減衰関数であると仮定する。ただし、積分が発散しないためには

$$\frac{\dot{\Gamma}_{l0}(0)}{\Gamma_{l0}(0)} < 0 \quad (31)$$

である。デルタ関数近似をし  $t=0$  近傍のみで積分を評価すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \hat{u}_1 \rangle} \int_0^{t \rightarrow \infty} \Gamma_{l0}(s) \langle \hat{u}_1(t-s) \hat{u}_1 \rangle ds &\approx \Gamma_{l0}(0) \langle \hat{u}_1(t) \rangle \int_0^{t \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\dot{\Gamma}_{l0}(0)}{\Gamma_{l0}(0)}s\right) ds \\ &= -\frac{\Gamma_{l0}(0)^2}{\dot{\Gamma}_{l0}(0)} \langle \hat{u}_1(t) \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

となる。Iwayama らは記憶関数を評価する際に揺動散逸定理を用いているが、本研究では揺動散逸定理が有効ではないため、記憶関数の定義 (8) から直接  $\Gamma_{l0}(t)$  を計算する。

$$\Gamma_{l0}(0) = -\frac{\langle [\Lambda Q N_l(\hat{\mathbf{u}})] \hat{u}_1 \rangle}{\langle \hat{u}_1^2 \rangle} \quad (33)$$

$$\dot{\Gamma}_{l0}(0) = -\frac{\langle [\Lambda Q \Lambda Q N_l(\hat{\mathbf{u}})] \hat{u}_1 \rangle}{\langle \hat{u}_1^2 \rangle} \quad (34)$$

最終的に (32) より (29) は

$$\Omega_{l0} \langle \hat{u}_1(t) \rangle + \langle L_l(\hat{\mathbf{u}}(t)) \rangle + \frac{\Gamma_{l0}(0)^2}{\dot{\Gamma}_{l0}(0)} \langle \hat{u}_1(t) \rangle + F_l = 0 \quad (35)$$

となる。式(35)は、初期値  $\hat{u}_l$  を任意定数とするとき、定常状態での平均量  $\langle \hat{u}_l(t) \rangle$  に関する線形方程式となる。ところが、初期値  $\hat{u}_l$  は、近似(32)が成立する値でなくてはならず、任意には設定できない。近似(32)が成立するために、記憶関数  $\Gamma_{l0}(t)$  の減衰が十分速くなる位相点を初期値とする必要がある。そこで、乱れが不十分な過渡の状態ではなく、アトラクター上に初期値  $\hat{u}_l$  を設定すれば、乱れによる混合作用によって  $\Gamma_{l0}(t)$  の減衰が十分速くなると期待できる。今回扱っている系では、統計的に定常となったとき、長波長成分の平均は有限値であるが分散は小さく、また、短波長成分の平均は無視できる程小さいが分散は大きいという特徴がある。これを位相空間で考えると、長波長成分はほとんど変化せず一定値をとり短波長

成分が激しく変化するアトラクターが存在していることになる。ここで、短波長成分 ( $l > N$ ) は  $\hat{u}_l \approx 0$  となり、長波長成分 ( $l < N - 1$ ) は  $\langle \hat{u}_l \rangle = \langle \hat{u}_l(t) \rangle$  となるようなアトラクター上に初期値  $\hat{u}_l$  を設定する。ただし、 $\hat{u}_N$  より短波長の成分は十分小さいので、チェビシェフ変換 (20) の際の打ち切り時に消去している。このとき、 $\hat{u}_l$  の分布の分散は無視できる程小さいので、異なる初期値は独立 ( $\langle \hat{u}_l \hat{u}_m \rangle = \langle \hat{u}_l \rangle \langle \hat{u}_m \rangle$  for  $l \neq m$ ) となる。最終的に、 $\langle \hat{u}_l(t) \rangle$  のみならず非線形代数方程式が得られる。

## 4 結果

適当な仮定のもとで、式 (35) から得られた解と数値実験によって得られた結果を比較する。ショック解は奇関数であるから ( $\langle \hat{u}_l \rangle = 0$  for  $l = \text{even}$ ) とし、結果が偶関数にならないようにする。展開項数は、ショック解をあらわすことができるくらい十分大きな値でなくてはいけないが、値が大きすぎると計算効率が悪いので、今回は  $N = 9$  とした。また、解は変域変換の関数  $y = \tanh(Kx)$  に依存するため、スケールパラメータ  $K$  は適宜変化させる。ここでは境界条件  $U = 1.5$  のとき  $0.04 \sim 0.1$  まで  $0.005$  刻みの値を試み、 $U = 1.4$  のとき  $0.02 \sim 0.08$  まで  $0.005$  刻みの値を試みた。さらに、計算過程において、スケールパラメータ  $K$  に依存する微小項があらわれるため、 $O(K^2)$  より小さい項を無視した。これらの条件のもとで、式 (35) を Newton 法で解くことにより解がもとめられる。ただし、初期値を  $A \tanh(\kappa x)$  とし、 $A$  は数値実験から決定し、 $\kappa$  にスケールパラメータ  $K$  と同様の適当な任意の値を与える。記憶関数項は定義 (34) から明らかなように非常に複雑であるから、式 (35) を解くと初期値とスケールパラメータ  $K$  に依存して多数の解があらわれてしまう。そこで、 $A \tanh(\kappa x)$  に近い結果のみを採用することにした。

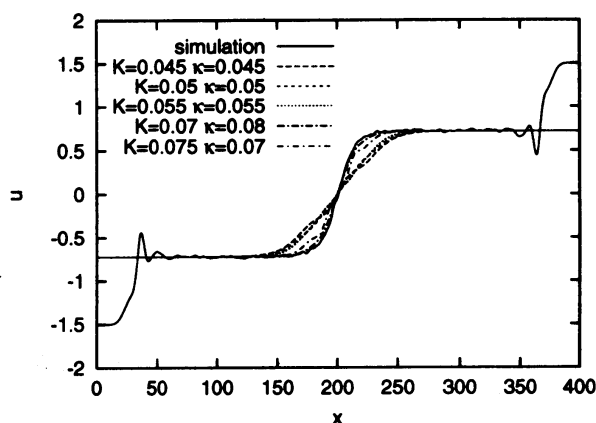


図 3: 数値実験との比較 ( $U = 1.5$ )

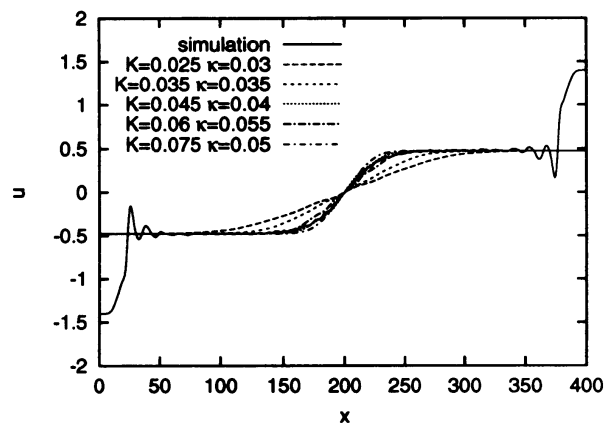


図 4: 数値実験との比較 ( $U = 1.4$ )

数値実験 (図 1、図 2) と式 (35) を解いた結果の一例を比較したものを図 3 と図 4 に示す。ショック構造の中心が重なるように式 (35) の結果は、座標変換  $x \rightarrow x - 200$  をしている。固定境界値は、図 3 では  $U = 1.5$ 、図 4 では  $U = 1.4$  としている。式 (35) は非常に複雑な非線形方程式であるため、得られる解の大半は歪んだり乱れたりしており、ショック構造があらわれる確率は 10% にも満たない。さらに、ショック構造解のうち傾き  $\kappa$  が数値実験と一致するショック解の場合は、5% にも満たないことが多い。具体的に、図 3 を見てみよう。  $K$  が比較的小さい  $K = 0.045$ 、 $K = 0.05$ 、 $K = 0.55$  のときは傾き  $\kappa$  がおよそ  $0.03$  となり数値実験と大きく異なっており、 $K$  が比較的大きい  $K = 0.07$  と  $K = 0.075$  のときは数値実験に近い結果となっている。また、 $K = 0.075$  のときは、ショックの角がやや欠けていることがわかる。このように、ショック形状に近いが、完全な  $A \tanh(\kappa x)$  とはならず多少歪んでいる解があらわれることもある。これは、展開項数が  $N = 9$  と少ないことが原因のひとつである。次に、図 4 を見てみよう。  $K = 0.025$  や  $K = 0.035$  で  $\kappa = 0.035$  としたときの結果は、数値実験と大きく異なっている。  $K = 0.035$  で  $\kappa = 0.02$  としたときと

$K = 0.06$  としたときには、数値実験と比較的に近い結果が得られており、 $K = 0.04$  のときは数値実験とほぼ一致している。 $A = 0.475$  としたときには、他にも数値実験に近い結果がいくつか得られているが、繁雑になるために省略している。全般的に、数値実験と近い結果が得られるけれども、傾き  $\kappa$  が大きく異なる解も得られる。さらに、結果がスケールパラメータ  $K$  に依存する傾向があることもわかる。そのため、今回の方法では一意的に平均量の解を予測することは困難であることがわかった。

## 5 まとめと今後の課題

本研究では、射影演算子法を用いることによって、両端で固定境界値が異なる KS 方程式の解の平均量が満たす非線形代数方程式を導いた。さらに、この方程式を適当な仮定のもとで解くことにより、平均量のショック構造を定量的にもとめた。この結果と数値実験を比較したところ、数値実験に近い解が得られることがわかった。しかし、数値実験と異なる解もあらわれるため、数値実験がなければどれが真の解であるか判別できず、解を一意的に予測することはできなかった。また、ショック解があらわれないときが圧倒的に多く、ショック解への収束性は悪い。最終的な方程式 (35) から実験値に近い結果が得られているため、平均量方程式 (35) はショック構造解を満たしている。したがって、導出過程におけるいくつかの仮定は妥当なものであると考えられる。平均量を予測するためには式 (35) の複雑さに起因する望ましくない解をうまく排除することが必要である。

最後に今後の課題について述べる。本来すべての変数に射影しなければいけないが、今回は計算効率を考慮し一変数のみに射影している。そのため、記憶関数と揺動力に  $\hat{u}_1$  以外の線形成分が含まれている。定義 (8) から分かるように、記憶関数は揺動力  $r(\hat{u}, t)$  に依存しており、そこに線形成分が含まれていた場合、記憶関数が正確な有効粘性をあらわしていない可能性がある。そこで、できるだけ多変数に射影することが必要となる。次に、ショック構造解への収束性改善も課題のひとつとして残っている。現在の記憶関数に関する近似方法は効率が悪く、このことが計算効率やショック解への収束性に影響を及ぼしている。したがって、記憶関数の性質を調べ適切に近似することが、今後の研究における重要課題である。記憶関数は、ラプラス変換によって原理的にもとめることが可能であるが、KS 方程式のような多自由度の方程式では計算が困難である。そこで、今後は少数自由度の方程式を用いて、効率的な記憶関数の近似方法を研究する必要がある。また、現在得られる結果は変域変換関数  $y = \tanh(Kx)$  に依存しており、適切な変域変換関数を用いていない場合、射影演算子法が期待どおりに機能していても望ましい結果が得られない可能性がある。そのため、少ない項数で適切な形状をあらわすことのできる変域変換関数を見つけることも必要となる。より本質的には、射影する初期値  $\hat{u}_i$  をどのように扱うかという問題がある。今回は  $\langle \hat{u}_i \rangle = \langle \hat{u}_i(t) \rangle$  となるような初期値に射影しているが、このとき近似 (32) が妥当であるかを検証する必要があるし、このような射影をすると解を一意的に決定することは難しくなるという問題点を含んでいる。また、数値実験の結果が初期値に依存しないような場合でも、射影演算子を使う現在の方法で平均量方程式を導いた場合、必ず初期値に依存してしまう。このような初期値依存性の問題を克服することも、解を一意的に決定できる平均量方程式を導くためには必要となるであろう。

## 参考文献

- [1] H. Mori, H. Fujisaka, Phys. Rev. E **63**, 026302 (2001)
- [2] H. Sakaguchi, Phys. Rev. E **62**, 8817 (2000)
- [3] V. Yakhot, Phys. Rev. A **24**, 642 (1981)
- [4] S. Zaleski, Physica D **34**, 427 (1989)
- [5] K. Sneppen, J. Krug, M. H. Jensen, C. Jayaprakash, T. Bohr, Phys. Rev. A **46**, R7351 (1992)
- [6] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33**, 423 (1965)
- [7] T. Iwayama, H. Okamoto, Prog. Theor. Phys. **90**, 343 (1993)
- [8] K. Sato, M. Okamura, submitted