数理解析研究所講究録 1285 巻 2002 年 226-233

シェルモデル乱流の不安定周期解

東大院数理科学　加藤 整
東大院数理科学　山田 道夫

1　はじめに

乱流の示す特異な統計性質として、その間欠性が挙げられる。これまで間欠性に
モデルにより現象論的理解が得られてきたが、「なぜ乱流は間欠性を示すのか」と
の問題に対する理解はこれまで得られていない。そこで我々は、乱流の不安定周期
の問題に取り組んだ。

我々は充分発達した一様等方性乱流における不安定周期解を求めたい訳であるが
な解を求めるには 100 万点の格子点数に対して計算をする必要があり、現在の計算
る。そこでここでは、実際の乱流と良く似た統計性質を示すモデルとして GOY シ
このモデルの不安定周期解を解析することによりナヴィエ–ストークス乱流につい
とする。

本稿では、乱流の間欠性が相空間でのある不安定周期解によって生じ、その解の
質を記述できることをモデルの範囲内において示す。最後にこの結果がナビエ–ス
る示唆につて述べる。

2　不安定周期軌道理論

ここで、これまでの不安定周期軌道理論について簡単に振り返ってみよう。常微
の解明において周期解の果たす重要性を初めて指摘したのは Poincaré [3] であった
おける不安定周期軌道は古典系でのカオスの量子化において重要な役割を果たすこ
系の半古典量子化条件は、量子力学の成立当初から EBK 量子化条件として知られ
半古典量子化条件がその約 50 年後、Gutzwiller により Gutzwiller 跡公式として導
り、1980 年以降の量子カオス研究が開花することになる。

このような不安定周期解理論がカオス研究において用いられたのはハミルトン系
でにローレンツ系やエノン写像系のカオスといった少数自由度カオスにおける不安
について調べられている [5, 6]。またこの様な不安定周期解はカオス制御においても
更に最近では、蔵本–シバシンスキー方程式、ナビエ–ストークス方程式といった
ける不安定周期解についての研究も行なわれ始めている [9, 10]。

3　GOY シェルモデルと不安定周期解の計算法

我々が本研究で用いるシェルモデルは GOY シェルモデルである。このモデルは
のモデルとして提案され [1]、その後、山田と大木谷によって、速度変数を複素化す
張された [2] もので、高いレイノルズ数においてコルモゴロフのエネルギースペク
グを示すことが知られている [11]。

†kato@gfd01.ms.u-tokyo.ac.jp
‡yamada@ms.u-tokyo.ac.jp

モデル方程式は複素変数u_jを各シェルjの代表速度、Nをシェルの数とすると

$$\left(\frac{d}{dt}+\nu {k_j}^2\right)u_j = i[a_j u_{j+1}u_{j+2}+b_j u_{j-1}u_{j+1}+c_j u_{j-1}u_{j-2}]^* + f\delta_{j,1}, \tag{1}$$

$$k_j = 2^{(j-4)},\quad a_j = k_j,\quad b_j = -\delta k_{j-1},\quad c_j = (\delta-1)k_{j-2}, \tag{2}$$

$$b_1 = c_1 = c_2 = a_{N-1} = a_N = b_N = 0 \tag{3}$$

と表せる。ここで$*$は複素共役、δはカスケードを特徴づける結合係数、fは外力の大きさ、νは粘性係数である。一般のシェルモデルにおいては、外力は$j=4$のシェルに注入されるが、ここでは、低波数領域におけるエネルギーの逆カスケードを避ける為に、エネルギーを$j=1$のシェルに注入している。外力なし、非粘性時にこのモデルはそれぞれの保存量に対応する解、即ち固定点解

$$u_j = C_j^1 k_j^{-1/3},\ u_j = C_j^2 k_j^{(-\log_2(\delta-1)+1)/3} \tag{4}$$

を持つことが知られている。ここで、C_j^1, C_j^2はそれぞれ任意のjに対して、$C_j = C_{j+3}$となるような複素関数である。後者はそれぞれ$\delta = 1/2$でヘリシティースケーリング、$\delta = 5/4$でエンストロフィースケーリングを与える。

Biferaleらは、カスケードと多重フラクタルの関連性という観点から、パラメータδを変化させた時の解の挙動を調べた [12] [1][2]。これにより、これまで高次元カオスの性質だけを示すと考えられてきたGOYシェルモデルも、一般の乱流同様に乱流への遷移を起こすことが明らかにされた。δの小さい範囲においてこのモデルは安定固定点を持ち、更にδの値を次第に0.5に近付けていくとそれまでの安定固定点解はホップ分岐を経て、安定周期軌道へ遷移し、さらに0.5へ近付けると解は乱流化する。

さて、一般に高次元力学系において不安定周期解を求めるのは、支配方程式が与えられている時においても困難である。我々は前述した点に着目しGOYシェルモデルの不安定周期解を求めた。前に述べたようにδの値を次第に0.5に近付けていくとそれまでの安定固定点解は乱流へ遷移するが、安定周期解が不安定化する際、この極限軌道が不安定周期解として生き残ることが予想される。我々はこれに従いパラメータδの値が小さい時の極限軌道を初期予想として採用し、δを0.5に近付けながら、ニュートン–ラフソン法の拡張であるMees法 [14, 15] により周期解を検出した。パラメータを変化させるルートとしては、

1: $(1.0\times10^{-4}, 0.31) \to (1.0\times10^{-4}, 0.50)$

2: $(1.0\times10^{-4}, 0.36) \to (1.0\times10^{-4}, 0.50)$

3: $(1.95\times10^{-3}, 0.4973) \to (1.95\times10^{-3}, 0.50) \to (1.50\times10^{-3}, 0.50)$

の三つを考える。ここで括弧内の値は、それぞれ各点での粘性ν、結合比δである。次節においてそれぞれのルートにおける解の検出とその振舞いを示す。

以下で用いる数値計算法について述べておく。以降の議論で用いられるシェルモデルの計算は$N = 12, 14$の2ケースであるが、それぞれ時間刻は$\Delta t = 10^{-2}$である。時間積分には4次のルンゲクッタ法を用いている。速度場の初期条件としては、エネルギースペクトル$E_j(t=0)$が$E_j = k_j^2\exp(-k_j^2))$となるように選び、位相はランダムとしている。またそれぞれの計算に於いて乱流場になり統計的に定常になるまでの期間については無視している。外力fについては$f = 5\times(1+i)\times10^{-3}$である。また以下で用いられる法の記号$\equiv$は全てmod(3)において等しいことを示す。

[1]パラメータδの値が0.5に近付くに連れ、順方向のカスケードが抑制され、それによりエネルギーがあるシェルに充填され、ある時それが放出されることで間欠性が生じているとしている [12]。しかし後で見るように$\delta = 0.5$においても低波数から高波数まで瞬時にエネルギーがカスケードする解 (コルモゴロフ解) も存在しておりこの議論はあたらないと考える。

[2]山田と大木谷もこれに先立ちパラメータδを変化させた時のカスケード理論を独自に展開している [13]。

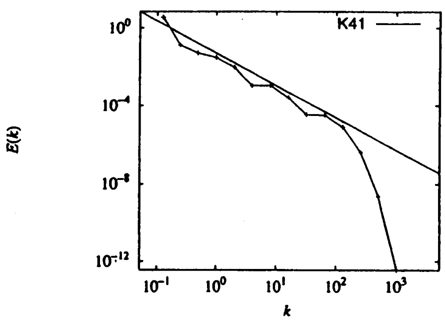


図 1: 不安定平衡解のエネルギースペクトル

4　周期解の構造

4.1　不安定定常解

1のルートでは、初期予想として、$(\nu, \delta) = (1.0 \times 10^{-4}, 0.31)$ での固定点を採用し、結合係数 δ を $\delta = 0.5$ にしてニュートン–ラフソン法により解を求める。解の相対誤差 $Err_j^{rel} = f_j(\boldsymbol{u})/u_j$ は 1 から $2N$ の j に対して $Err_j^{rel} \simeq 10^{-17}$ 程度である。この定常解のエネルギースペクトルを図 1 に示す。$-5/3$ 乗則の成立する慣性領域を見ることができる。GOY シェルモデルは、非粘性、外力なしの時に、厳密に K41 のスケーリングに従う不安定定常解 (4) を持つことが知られている。これに対し上の結果は粘性と外力がある場合でも K41 のスケーリングに近い不安定定常解が得られることを示している[3]

4.2　コルモゴロフ解

2のルートでは、初期予想として $(\nu, \delta) = (1.0 \times 10^{-4}, 0.36)$ でのリミットサイクルを採用し、結合係数 δ を 10^{-3} づつ $\delta = 0.5$ まで大きくしながら解を追跡する。このとき最終的に得られた不安定解の各モードにおける相対誤差 $Err_j^{rel} = (F_j(\boldsymbol{u}, T) - u_j)/u_j$ は $Err_j^{rel} \simeq 10^{-7}$ 程度であり、この解の周期 T は $T = 133.13$ である。この解は後で見るように、間欠性を示さず、コルモゴロフのスケーリングに従うことから以降では、ここで得られた解をコルモゴロフ解と呼ぶことにする。

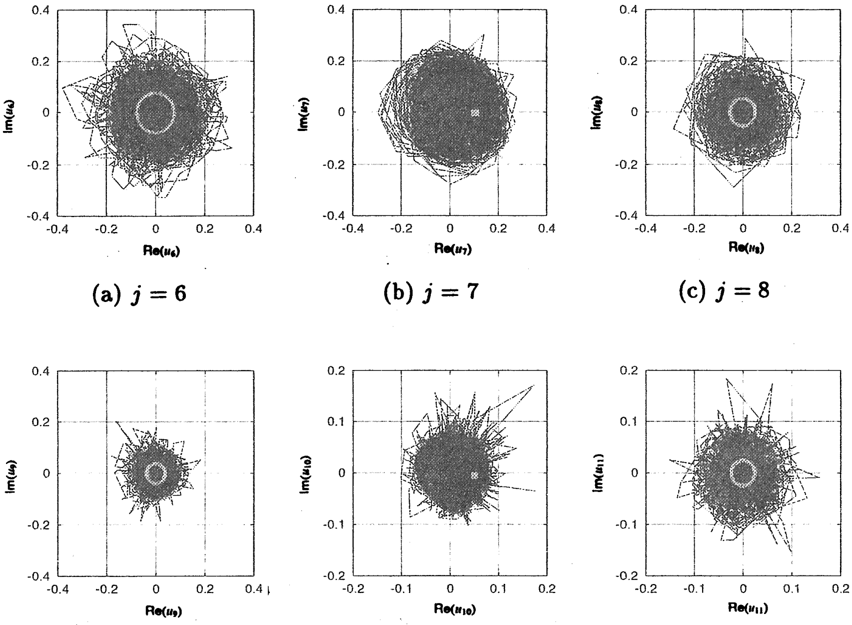
図 2 に同じパラメータにおける乱流解とコルモゴロフ解の時間発展の様子を示す。$j \equiv 0$　のシェルでの変数 u_j は時間的に変化せず、それ以外のシェルでは、振幅 $|u_j|$ 一定の円になる。コルモゴロフ解は振幅の大きさ $|u_j|$ は時間的に一定であり、従って二次の量は変化しない。即ちエネルギーのカスケードはエネルギーが注入される $j = 1$ のシェルからエネルギーが散逸される高波数領域の全領域において瞬間的に行なわれる。

乱流解はコルモゴロフ解の周囲を取り巻くが、高波数になるにつれ、コルモゴロフ解からのずれが大きくなることが見てとれる。このことは、乱流解はここで得られたコルモゴロフ解のみからは説明できないことを示唆している。

4.3　間欠解

3のルートでは、初期予想として $(\nu, \delta) = (1.95 \times 10^{-3}, 0.497)$ でのリミットサイクルを採用し、結合係数 δ を 10^{-4} づつ $\delta = 0.500$ まで大きくしながら解を追跡する。このとき最終的に得られた不安定解の各モードにおける相対誤差 Err_j^{rel} は $Err_j^{rel} \simeq 10^{-5}$ 程度であり、この解の周期 T は $T = 243.15$ である。この解は後で見

[3]この解は、$\nu \to 0$ の極限で、解 (4) のうちエネルギースケーリングを与える解に近付くものと予想されるが、係数 C の決定に関する問題に関しては未解決の問題である。



(a) $j=6$ (b) $j=7$ (c) $j=8$

(d) $j=9$ (e) $j=10$ (f) $j=11$

図 2: $N=14, \nu=1.00\times10^{-4}$ における各シェルの速度の位相平面上での時間発展。黒線は乱流解、灰色線はコルモゴロフ解。$j=7,10$ のシェルでの点は不安定解がそこに留まることを示す。

るように、間欠性を示すので間欠解と呼ぶことにする。$\nu=1.95\times10^{-3}$ では粘性が高く、余り乱流が発達していないので徐々に粘性を下げレイノルズ数をあげる。この時解の周期 T は単調に減少し、$\nu=1.50\times10^{-3}$ では周期 T は $T=179.98$ である。間欠解と乱流解は図 3 の様になる。

5 間欠性

5.1 スケーリング指数

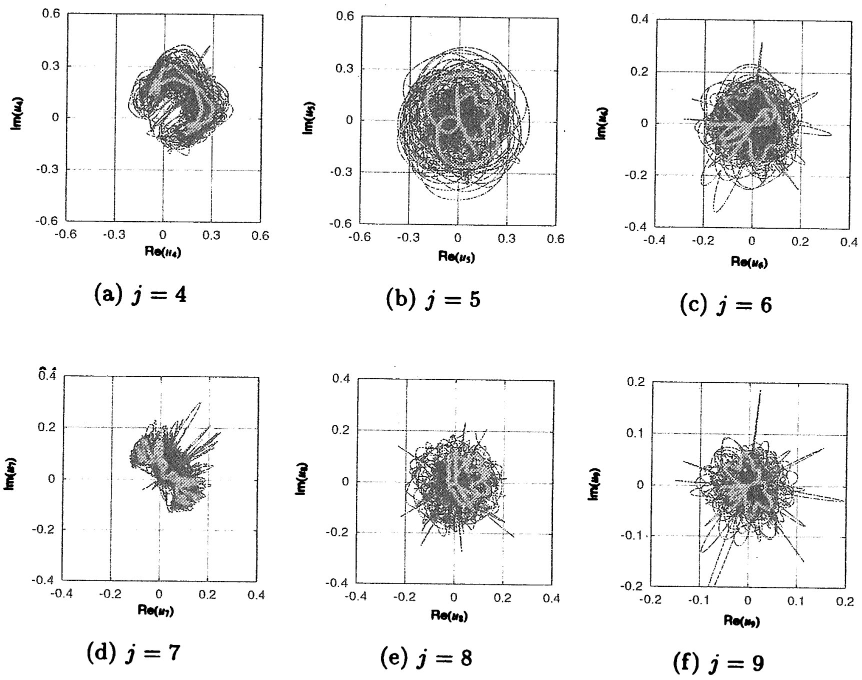
GOY シェルモデルには空間構造はないが、フーリエ空間におけるアナロジーから p 次の構造関数 S_p は $S_p(k_j)=<|u_j|^p>$ の様に、またスケーリング指数 ζ_p は $S_p(k_j)\propto k_j^{-\zeta_p}$ の様に定義される。比較的粘性が高いため、スケーリング領域が短く、そのままでは r^{ζ_p} でフィットすることが難しい。そこでここでは、Benzi ら [16] による拡張された自己相似性 (ESS) を用いる。Benzi らは $S_p(k_j)$ を $S_p(k_3)$ に対してプロットし、

$$S_p(k_j)=S_p(k_3)^{\zeta_p} \tag{5}$$

の関係を用いて ζ_p を求めた。ここでは、エネルギー流束が一定と見做せる $j=1$ から $j=6$ の波数領域を慣性領域と考えている。

図 4 を見るとコルモロフ解のスケーリング指数は $p/3$ に従うことが分かる。これは周期解が全く間欠性を示さないので当然の結果であるといえる。

図 5 に間欠解のスケーリング指数を示す。ここでは $j=1$ から $j=5$ でスケーリングしている。図 5 を見ると $p=10$ 程度まで乱流解のスケーリングに近いマルチスケーリングを示すことが分かる。



(a) $j = 4$ (b) $j = 5$ (c) $j = 6$

(d) $j = 7$ (e) $j = 8$ (f) $j = 9$

図 3: $N = 12, \nu = 1.50 \times 10^{-3}$ における各シェルの速度の位相平面上での時間発展。黒線は乱流解、灰色線は間欠解。

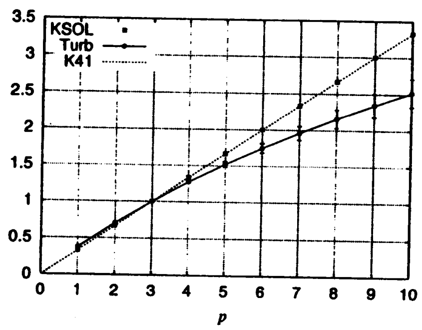


図 4: スケーリング指数 (コルモゴロフ解 (KSOL)

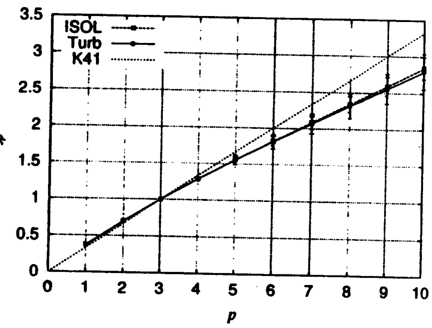
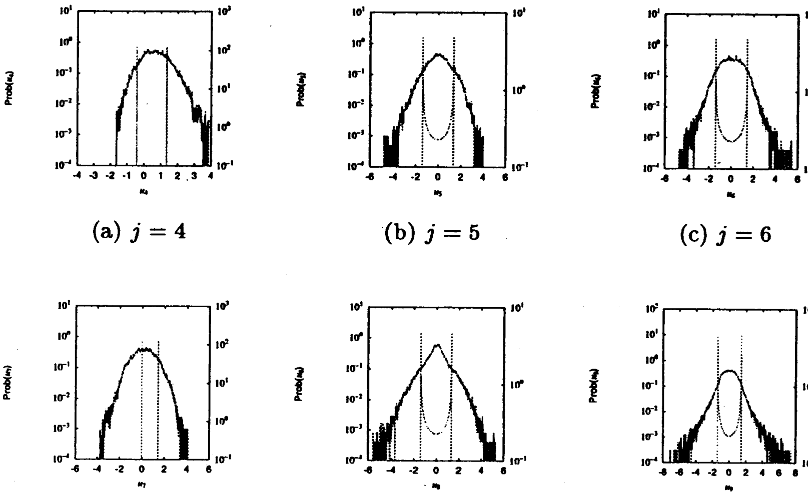


図 5: スケーリング指数 (間欠解 (ISOL))

5.2 確率密度関数

図 6 と図 7 にそれぞれコルモゴロフ解、間欠解における変数の確率密度分布を示す。



(a) $j=4$ (b) $j=5$ (c) $j=6$

(d) $j=7$ (e) $j=8$ (f) $j=9$

図 6: $N=14, \nu=1.00\times10^{-4}$ における各シェルの速度の確率密度関数。黒線は乱流解、灰色線はコルモゴロフ解。乱流解は左側縦軸、コルモゴロフ解は右側縦軸の値。

図 6 はコルモゴロフ解の確率密度分布を示す。乱流解は高波数側で正規分布から外れ、裾野の広がる分布になっていくのが見える。$j=1$ で平均が 0 からずれて正の値をとっているのは、外力の影響である。この影響は、高波数側で小さくなっている ($j=4,7$ のシェル)。コルモゴロフ解では、$j\equiv1$ のシェルには二つのピークが見えるがこれらは u_j の実部と虚部に対応している。複素平面上でのコルモゴロフ解の時間発展からも想像できるように、乱流解の確率密度関数からは程遠い形をしている。

図 7 は間欠解の確率密度分布を示す。乱流解の性質に関しては先ほどと変らないが、$j\equiv1$ のシェルでの非対称性が目立ち、間欠解にも同じ傾向が現れている。間欠解の確率密度分布は滑らかではないが、乱流解の中心付近での概形はよく捉えていると言える。間欠解が取らない外れ値は、乱流解もとる確率が低いため、乱流解の統計量は間欠解の統計量によって、良く近似される。

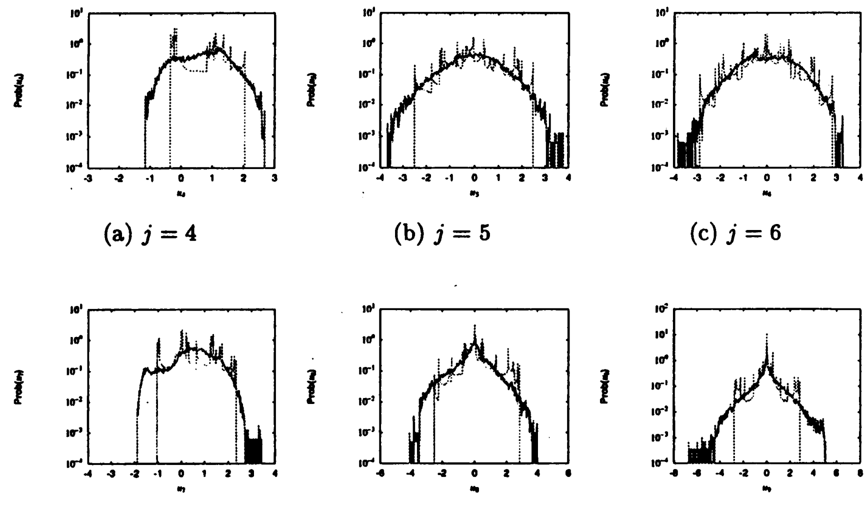
6 対称性とアトラクターの構造

GOY シェルモデルの位相対称性に関しては Gat たち [17] によって指摘された。ナヴィエ–ストークス方程式は、外力のない時、空間並進不変である。フーリエ空間では、$\boldsymbol{r}$ だけの空間並進変換は

$$\tilde{u}(\boldsymbol{k}) \to \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\tilde{u}(\boldsymbol{k}) \tag{6}$$

と表される。GOY モデルには、このような並進対称性の直接の対応物はないが、位相に関する以下の類似した変換に対する不変性を持っている。本研究では外力を u_1 の実部と虚部に等価に加えていることを考えると、モデル方程式は位相変換

$$\begin{cases} u_j \to u_j, \\ u_{j+1} \to e^{i\phi}u_{j+1}, \\ u_{j+2} \to e^{-i\phi}u_{j+2} \end{cases} \tag{7}$$



(a) $j=4$ (b) $j=5$ (c) $j=6$

(d) $j=7$ (e) $j=8$ (f) $j=9$

図 7: $N=12, \nu=1.70\times10^{-3}$ における各シェルの速度の確率密度関数。黒線は乱流解、灰色線は間欠解。

に対して不変であることが分かる。但しここでは $j\equiv1$ とした。

図 3 を見ると $j\equiv2,0$ のシェルにおいては、解は間欠解を原点の周りに一周回転させた時に掃かれる状態空間点の周りを取り囲んでいるように見える。これは、前述の位相対称性により間欠解が任意の位相に対して解になることにより、乱流解がその解軌道上を渡り歩くためであると考えられる。

一方コルモゴロフ解の図 2 を見ると、円や点の位相をいくら回転させても乱流解の振舞いを示さない。このことも乱流解がこのコルモゴロフ解からは説明できないと考えられることのサポートとなるといえよう。

7 まとめ

本稿では、GOY シェルモデルにおける不安定周期軌道について調べ、その発見された 3 つの不安定解のうち間欠解の統計性質が乱流解と良く似た統計性質を示すことを示した。従来、乱流間欠性は現象論的に確率モデルやマルチフラクタルモデルなどを用いて論じられてきたが、本論文の結果は、乱流間欠性は、統計性の結果と言うよりも寧ろ、一つの不安定周期解 (間欠解) の示す性質として捉えうることを示唆している。これは言い換えれば、少なくともシェルモデルに関しては、乱流状態における相空間内のストレンジアトラクターが、一つの間欠解から位相変換によって生成される集合によって良く近似されることを示している[4]。即ち、間欠性を含むシェルモデル乱流の統計性質は概ね、この一つの間欠解の閉軌道を調べることで、求めることが可能と考えられる。

ここでの結果は発達したナヴェエ–ストークス一様等方乱流について、少数の重要な不安定解が存在することを想像させるが[5]、そのような解の探索は有効な手法を欠いたままであり、高次元系での周期解を効率的に求めるニュートン法の開発や、その DNS への適用、周期解の数学的な存在証明など今後の研究の発展が期待される領域である。

[4]このことはストレンジアトラクターが 2 次元的であり、その他の次元は平面に厚みを作ることで次元を稼いでいることを示している。

[5]相空間でのこのような不安定周期解は物理空間においては乱流中の渦管の生成、消滅に対応すると予想される。

引用文献

[1] E. B. Gledzer, System of hydordynamic type admitting two quadratic integrals of motion, Sov. Phys. Dokl. **18**, 216 (1973).

[2] M. Yamada and K. Ohkitani, Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence, J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 4210 (1987).

[3] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste* (Guthier-Villars, Paris, 1892–1899).

[4] M. C. Gutzwiller, Phase-integral approximation in momentum space and the boud states of an atom, J. Math. Phys. **8**, 1979 (1967).

[5] E. Kazantsev, Rapport de recherche 3344, INRIA (unpublished).

[6] D. Auerbach, P Cvitanovic, J.P.Eckmann, G. Gunaratne, and I. Procaccia, Exploring Chaotic Motion Through Periodic Orbits, Phys. Rev. Lett. **58**, 2387 (1987).

[7] T. Shinbrot, C. Grebogi, E.Ott, and J. Yorke, Using small perturbations to control chaos, Nature **363**, 411 (1993).

[8] F. Moss, Chaos under contral, Nature **370**, 596 (1994).

[9] F. Christiansen, P. Cvianović, and V. Putkaradze, Spatiotemporal chaos in terms of unstalbe recurrent pattens, Nonlinerity **10**, 55 (1997).

[10] G. Kawahara and S. Kida, Periodic motion embeded in plane Couette turbulence: Regenaration cycle and burst, J. Fluid. Mech. **449**, 291 (2001).

[11] M.H.Jensen, G.Paladin, and A. Vulupiani, Intermittency in a cascade model for three-dimensional turbulence, Phys. Rev. A **43**, 798 (1991).

[12] L. Biferale, A. Lambert, R. Lima, and G. Paladin, Transition to chaos in a shell model of turbulence, Physica D **80**, 105 (1995).

[13] M. Yamada and K. Ohkitani, The constant of motion and the inertial subrange spectrum in fully developed model turbulence, Phys. Rev. A **124**, 165 (1988).

[14] A. I. Mess, *Dynamics of Feedback Systems* (John Wiley and Sons, New York, N.Y., 1981).

[15] T. S. Parker and L. O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Stystems* (Springer-Verlag, New York, N.Y., 1989).

[16] R. Benzi, G. Ruiz S. Ciliberto, and R. Tripiccione, Extended self-similarity in the dissipation range of fully developed turbulence, Europhys. Lett. **24**, 275 (1993).

[17] O. Gat, I. Procaccia, and R. Zeitak, Breakdown of dyanmic scaling and intermittency in a cascade model of turbulence, Phys. Rev. E **51**, 1148 (1995).