

## 直線渦管に巻き込まれたらせん渦層のエネルギー散逸

京都大工 河原 源太 (Genta Kawahara)  
 核融合研 木田 重雄 (Shigeo Kida)  
 岡山大工 柳瀬 眞一郎 (Shinichiro Yanase)  
 京工織大 田中 満 (Mitsuru Tanaka)

### 1. はじめに

様々な乱流場において渦度の集中した管状渦構造が広く観測されており、エネルギーの大半がこの管状構造で散逸されるものと古くから考えられている (Tennekes 1968). 一方、渦管以外でエネルギー散逸を担う構造としては層状渦が考えられる (Corrsin 1962) が、乱流中の渦層構造については未だ十分な理解が得られていない. 本稿では、この層状構造、特に実際に乱流場で観測されているらせん状の渦層におけるエネルギー散逸を解析的に議論する.

らせん状構造の起き得る生成メカニズムとしては次の2つが考えられる. その1つは渦層の Kelvin-Helmholtz 不安定であり、渦層が巻き上がって渦管を形成すると、巻き上がった渦層自身は渦管まわりに2重らせんを形成する (Passot *et al.* 1995). このメカニズムで生成される渦層は、層内の渦度が渦管に平行になる、いわゆる Lundgren (1982) のらせん渦層に相当する. これに対して、渦管が弱い渦度場の中に存在するときには、渦管は周囲の渦線を自分自身に巻き付け、かつ伸長し、2重らせん渦層を発生させる (Moore 1985; Kawahara *et al.* 1997). この場合は、巻き込みによる渦度の伸長・強化の結果、らせん渦層内の渦度は渦管に垂直な成分が支配的になる. つまり、渦線の巻き込みによって生成される Moore のらせん渦層は、層内での渦度が渦管に垂直になる点で、Lundgren のらせん渦層とは異なることに注意されたい.

最近、Kida & Miura (2000) は、一様等方乱流の直接数値シミュレーションにおいて、渦管に垂直な渦度成分をもった2重らせん渦層、つまり Moore のらせん渦層が実際に乱流場中に存在することを示した. 本報では、この Moore のらせん渦層に伴うエネルギー散逸について考える.

### 2. Moore のらせん渦層

図1にここで考察する流れの概観を示す.  $x$  軸方向の一様剪断流  $S_y$  における、 $x$  軸を中心軸にもつ直線渦管 (図中の2重矢印) を考える. ここに  $S (> 0)$  は剪断率である. 渦管の渦度は  $x$  の正の方向を向いているものとし、その循環を  $\Gamma (> 0)$  とする. この流れ場は Moore (1985) が取り扱ったものと全く同一である.

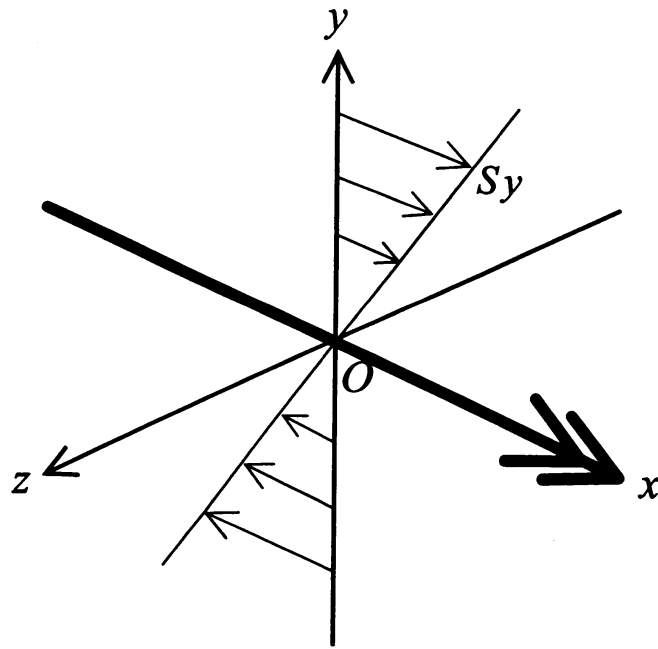


図 1. 流れの概観. 2重矢印で示す渦管の中心軸は  $x$  軸上にある.

流れが非圧縮で, かつ  $x$  軸に沿って一様であると仮定すると, 速度場  $\mathbf{v}(y, z, t)$  および渦度場  $\boldsymbol{\omega}(y, z, t)$  が

$$\mathbf{v} = u \mathbf{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_y - \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\nabla^2 \psi \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_y - \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_z \quad (2)$$

と表せる. ここに,  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  は  $x, y, z$  方向の基底ベクトルであり,  $u(y, z, t)$  は速度の  $x$  方向成分,  $\psi(y, z, t)$  は速度の  $y, z$  成分の流れ関数を表す.  $\nabla^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  は 2次元 Laplace 作用素である.

流れ関数  $\psi$  の時間発展は ( $x$  方向) 渦度方程式

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi - \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(y, z)} = 0 \quad (3)$$

に支配される. ここに  $\nu$  は流体の運動粘性係数である. ここでは  $\psi$  の初期条件として

$$\psi(y, z, t=0) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (4)$$

なる強さ  $\Gamma$  の渦糸を与える. ここに  $r = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$  は  $x$  軸 (渦管の中心軸) からの距離を表す. この初期条件の下で式 (3) の解は

$$\psi(r, t) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1 - e^{-\xi^2}}{\xi} d\xi \quad (5)$$

と一意に決定され、対応する  $x$  方向渦度成分は

$$-\nabla^2\psi(r,t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\eta^2} \quad (6)$$

となる。ここに、 $\eta = \frac{1}{2}r(\nu t)^{-\frac{1}{2}}$  は相似変数であり、この解はいわゆる Lamb-Oseen 渦（軸対称拡散渦）を表す（Saffman 1992 参照）。

さて、流れ関数  $\psi$  が与えられると、 $x$  方向速度成分  $u$  の時間発展が Navier-Stokes 方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right)u - \frac{\partial(\psi, u)}{\partial(y, z)} = 0 \quad (7)$$

によって決定される。ここでは、初期時刻で  $u$  が一様剪断流に等しい、すなわち

$$u(y, z, t = 0) = Sy \quad (8)$$

とする。式 (7) の解を変数分離された相似解の形

$$u = Sr \operatorname{Re} [f(\eta) e^{-i\theta}] \quad (9)$$

に置くと、 $f$  に対して

$$f'' + \left(2\eta + \frac{3}{\eta}\right) f' + i \frac{\Gamma}{2\pi\nu} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} f = 0 \quad (10)$$

なる常微分方程式が得られる。ここに、 $\theta$  は  $(y, z)$  平面における偏角である ( $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ )。  $f$  の境界条件は  $\eta = 0$  で  $rf$  が正則、かつ  $\eta \rightarrow \infty$  で  $f \rightarrow 1$  となることである。この方程式は Moore (1985) によって得られたものである。

図 2 は、Reynolds 数  $R_\Gamma = \Gamma/(2\pi\nu) = 100$  に対して式 (10) を数値的に解くことにより得られた渦管に垂直な渦度成分の大きさ  $[(\partial u/\partial r)^2 + r^{-2}(\partial u/\partial \theta)^2]^{\frac{1}{2}}/S$  を示したものである。時刻は後述の臨界時刻  $St_c = 2.94$  にとった。図中には渦線が実線で示されている。渦管の誘導する  $r$  に依存した周方向速度によって渦線が渦管まわりに巻き込まれて伸長され、強い周方向の渦度成分をもった 2 重らせん渦層が形成されている。

式 (10) の高 Reynolds 数  $R_\Gamma = \Gamma/(2\pi\nu) \gg 1$  における漸近解は Moore (1985) によって導出されており、さらにその解は Kawahara *et al.* (1997) により任意の方向を向いた渦管に対して拡張されている。高 Reynolds 数における遠方場

$$r \gg \left(\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\right)^{\frac{1}{4}} (\nu t)^{\frac{1}{2}}$$

での近似解は

$$f \approx \exp\left(i \frac{R_\Gamma}{4\eta^2} - \frac{R_\Gamma^2}{48\eta^6}\right) \quad (11)$$

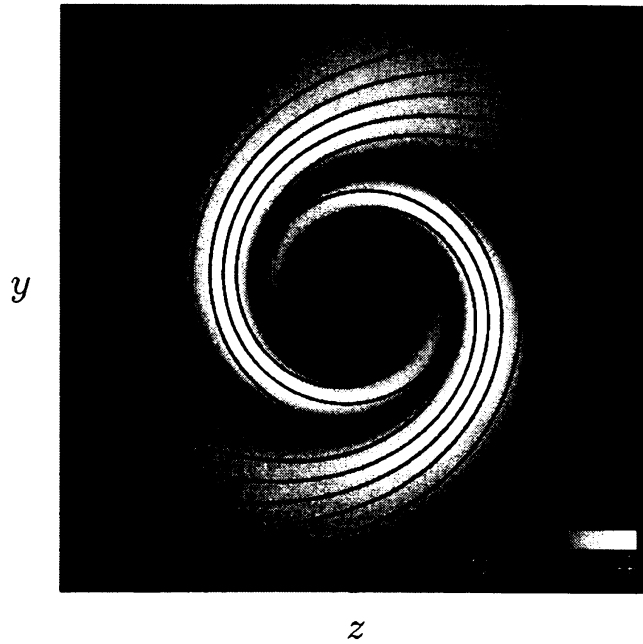


図 2. 渦管垂直方向の渦度成分の大きさ  $[(\partial u/\partial r)^2 + r^{-2}(\partial u/\partial \theta)^2]^{1/2}/S$  の空間分布.  $\Gamma/(2\pi\nu) = 100$ ,  $St = 2.94$ . 実線は渦線を表す. 図の対角線の長さは  $40(\nu t)^{1/2}$  である.

で与えられる. 解 (11) は渦管の遠方でのらせん渦層, つまり渦糸まわりの粘性らせん渦層を表し, したがって渦管の内部構造の詳細には依らない一般性の高い漸近解であることに注意されたい.

### 3. エネルギー散逸

単位質量あたりの粘性散逸率  $\Phi$  は

$$\Phi(r, \theta, t) = \nu S^2 + D_T + D_S \quad (12)$$

で与えられる. ここに,  $\nu S^2$  は一様剪断流の寄与であり,

$$D_T(r, t) = \nu \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2, \quad (13)$$

$$D_S(r, \theta, t) = \nu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 - S^2 \right] \quad (14)$$

は, それぞれ渦管およびらせん渦層に伴うエネルギー散逸を表す. 図 3 に図 2 に示した流れ ( $R_T = 100$ ,  $St = 2.94$ ) に対するエネルギー散逸率  $(D_T + D_S)/(\nu S^2)$  の

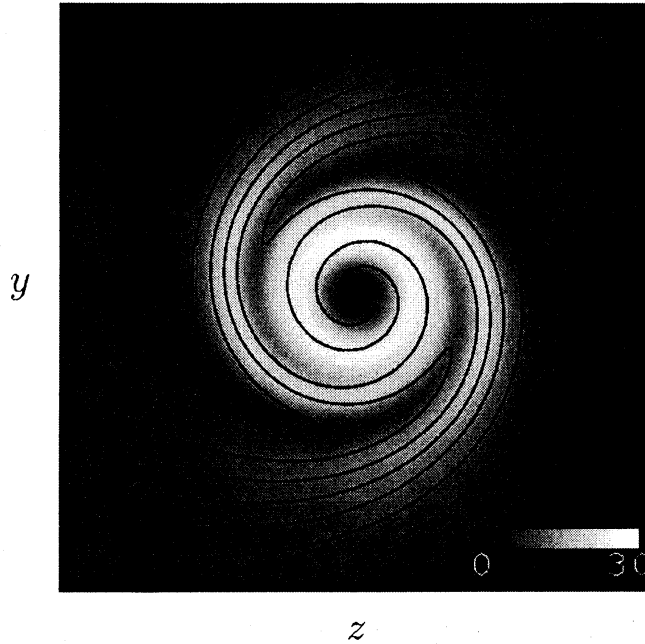


図 3. エネルギー散逸率  $(D_T + D_S)/(\nu S^2)$  の空間分布.  $\Gamma/(2\pi\nu) = 100$ ,  $St = 2.94$ . 実線は渦線を表す. 図の対角線の長さは  $40(\nu t)^{\frac{1}{2}}$  である.

空間分布を示す. 図中には図 2 と同様に渦線が実線で示されている. エネルギー散逸分布には, 渦管に伴う円環状の高散逸領域まわりに 2 重らせん渦層に伴うらせん状高散逸領域が形成されている.

渦管から (渦管方向単位長さあたりの) 総エネルギー散逸への寄与は

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr D_T = \frac{\Gamma^2}{2\pi t} \int_0^\infty \eta d\eta \left[ \frac{1}{\eta^2} - \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) e^{-\eta^2} \right]^2 = \frac{\Gamma^2}{8\pi t} \quad (15)$$

と評価される. 一方, らせん渦層からの寄与は

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr D_S = 8\pi\nu^2 S^2 I_0 t \quad (16)$$

と表され, 積分  $I_0$  は

$$I_0 = \int_0^\infty \eta d\eta \left[ \frac{1}{2} |\eta f'|^2 + \frac{1}{2} \eta (|f|^2)' + |f|^2 - 1 \right] \quad (17)$$

で与えられる. 高 Reynolds 数  $R_\Gamma = \Gamma/(2\pi\nu) \gg 1$  での  $I_0$  の漸近形は (11) を用いて

$$I_0 \approx 2^{-3} 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma(\frac{1}{3}) \left( \frac{\Gamma}{2\pi\nu} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (18)$$

と表される. ここに  $\Gamma$  はガンマ関数である. この漸近形 (18) は図 4 に示すように比較的低い Reynolds 数においてもよい近似を与える. (16), (18) から, 高 Reynolds

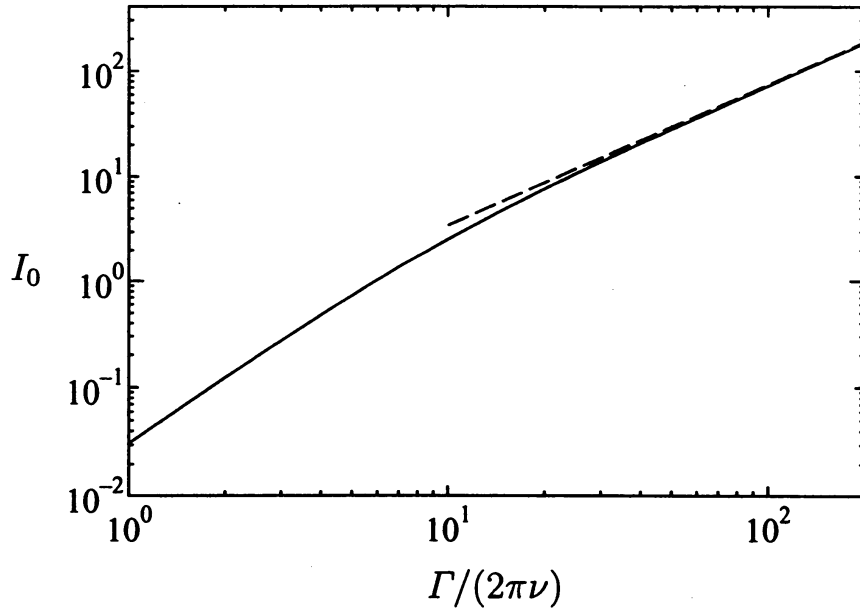


図 4. 積分  $I_0$  の Reynolds 数依存性. 実線は数値解, 破線は漸近形 (18) を表す.

数におけるらせん渦層の寄与は

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr D_S \approx 1.29\pi\nu^2 S^2 \left(\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\right)^{\frac{4}{3}} t \quad (19)$$

と評価される.

渦管の総エネルギー散逸 (15) は時間とともに減少し, 一方らせん渦層のそれ (16) は時間とともに増加する. したがって, 両者は

$$St_c = \frac{1}{4} I_0^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

なる臨界時刻で等しくなり,  $t > t_c$  ではらせん渦層のエネルギー散逸が渦管のそれを上回ることになる.  $\Gamma/(2\pi\nu) \gg 1$  では, (18) を用いて

$$St_c \approx 0.623 \left(\frac{\Gamma}{2\pi\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (21)$$

が得られる. 図 5 に臨界時刻  $t_c$  の Reynolds 数依存性を示す.

さて, ここで Moore のらせん渦層に伴うエネルギー散逸を直観的に解釈してみよう. 渦糸に誘導される周方向流れによる渦軸方向速度成分  $u$  の移流拡散は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \nu \nabla^2 u \quad (22)$$

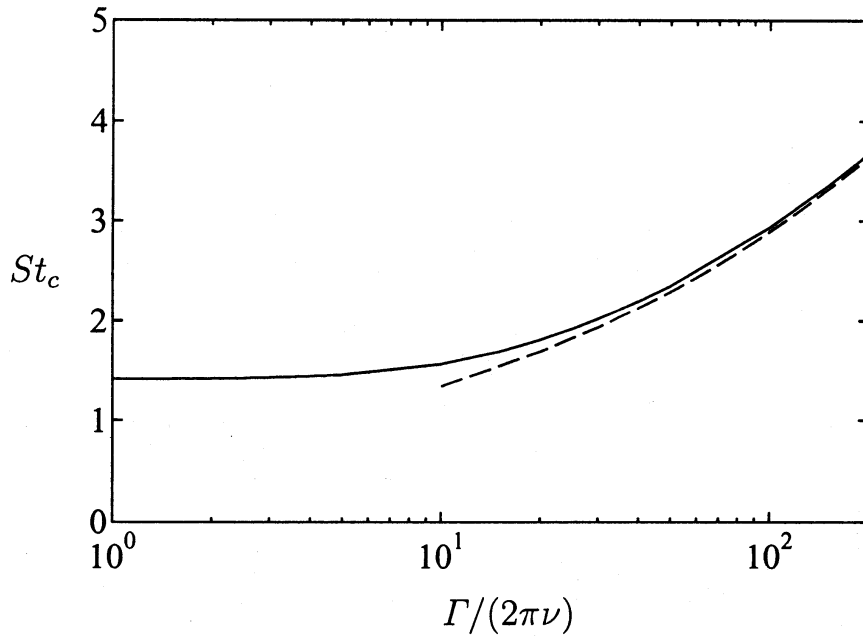


図5. 臨界時刻  $t_c$  の Reynolds 数依存性. 実線は数値解, 破線は漸近形 (21) を表す.

に従う.  $\nu = 0$  に対する式 (22) の非粘性解は, 初期条件 (8) の下で

$$u = Sr \cos\left(\theta - \frac{\Gamma t}{2\pi r^2}\right) \quad (23)$$

となる. この解中の余弦関数はらせん

$$\theta - \frac{\Gamma t}{2\pi r^2} = \text{const.} \quad (24)$$

上で同一位相となる. らせんの間隔  $\Delta r$  は, 上式において  $\theta$  が  $\pi$  だけ変化したときの  $r$  の変化分であるので, 双方の変化分の関係

$$\frac{\Gamma t}{r^3} \Delta r \approx \Delta\theta \approx 1$$

から

$$\Delta r \approx \frac{r^3}{\Gamma t} \quad (25)$$

と与えられる. らせん渦層に伴う速度勾配は

$$\frac{u}{\Delta r} \approx S \frac{\Gamma t}{r^2} \quad (26)$$

となる. したがって, 非粘性らせんでは,  $r$  がゼロに近づくとつれ (渦糸に近づくとつれ), らせんの間隔  $\Delta r$  はゼロに近づき, その結果, 速度勾配は無量大に

なる。しかし、実際には  $r$  が小さくなると粘性の影響が現れ、式 (22) における非定常項と粘性項とが釣り合うことになる。両者の釣り合い

$$\frac{1}{t} \approx \nu \left( \frac{\Gamma t}{r^3} \right)^2$$

から、釣り合いが実現する半径方向位置は

$$r \approx \left( \frac{\Gamma}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} (\nu t)^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

となる。この位置では、らせんの間隔は  $\Delta r \approx (\nu t)^{\frac{1}{2}}$  であり、速度勾配は最大値

$$\frac{u}{\Delta r} \approx S \left( \frac{\Gamma}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (28)$$

をとり、エネルギー散逸率も最大値

$$\nu \left( \frac{u}{\Delta r} \right)^2 \approx \nu S^2 \left( \frac{\Gamma}{\nu} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (29)$$

をとる。したがって、らせん渦層の総散逸率のオーダーは、この  $r \approx (\Gamma/\nu)^{\frac{1}{3}} (\nu t)^{\frac{1}{2}}$  なる散逸最大領域からの寄与で決まり、

$$\nu \left( \frac{u}{\Delta r} \right)^2 \left( \frac{\Gamma}{\nu} \right)^{\frac{2}{3}} \nu t \approx \nu^2 S^2 \left( \frac{\Gamma}{\nu} \right)^{\frac{4}{3}} t \quad (30)$$

と評価される。この直観的な評価 (30) は、厳密な漸近形 (19) のオーダーと一致している。散逸最大領域のエネルギー散逸率は時間に依らず一定である。らせん渦層の総散逸率が時間  $t$  に比例して増加するのは、渦線の巻き込みによってらせん渦層の全断面積  $O(\Gamma t)$  が時間  $t$  とともに線形に増加するためである。

#### 4. 乱流におけるらせん渦層のエネルギー散逸

従来、乱流におけるエネルギー散逸の多くが渦管によってなされるものと考えられてきた。しかし、最近この考えに対する否定的な結果が Jiménez *et al.* (1993, 1998) によって報告されている。他方、本報告第3章の結果から、渦管よりむしろらせん渦層のエネルギー散逸が重要であることが示唆される。そこで、以下では乱流場における高 Reynolds 数での渦管とらせん渦層のエネルギー散逸について考察する。

乱れの速度と渦度の平均強度を以下  $u'$ ,  $\omega'$  と書くと、Kolmogorov 長は  $(\nu/\omega')^{\frac{1}{2}}$  の程度であり、また Taylor 長は  $\lambda \approx u'/\omega'$  となる。Taylor 長に基づく Reynolds 数を  $R_\lambda = u'\lambda/\nu$  とする。この  $R_\lambda$  を用いると、積分長は  $L \approx \lambda R_\lambda$  となる。いま渦



Reynolds 数, および体積  $L^3$  の領域内での渦管 (そしてらせん渦層) の全長  $l$  がそれぞれ

$$\frac{\Gamma}{\nu} \approx R_\lambda^\alpha, \quad \frac{l}{L} \approx R_\lambda^\beta$$

のように Taylor 長 Reynolds 数  $R_\lambda$  でスケーリングされるものとしよう. また, 乱流中の渦管は Kolmogorov 長程度の径をもつ Burgers 渦 (伸長拡散渦, Saffman 1992 参照) で近似できると仮定すれば, その場合, 渦管の伸長率は  $\sigma \approx \omega'$  になる. さらに, 渦管まわりの渦度強度は  $O(\omega')$  であると考えられるので, (19) における剪断率 (直線渦周囲の渦度) は  $S \approx \omega'$  である. 前述のように, らせん渦層の断面積は巻き込みのため時間とともに増加するので, 時間  $L/u'$  での平均的な断面積を考えることにする.

以上の仮定の下に渦管からの寄与を考えると, その体積占有率および乱流エネルギー散逸への寄与率はそれぞれ

$$\frac{(\nu/\sigma) \times l}{L^3} \approx R_\lambda^{\beta-3}, \quad \frac{\Gamma^2 \sigma \times l}{\nu \omega'^2 \times L^3} \approx R_\lambda^{2\alpha+\beta-3} \quad (31)$$

と評価される. 一方, 第 3 章の結果を用いると, 時間  $L/u'$  にわたる平均的ならせん渦層の体積占有率および散逸への寄与率はそれぞれ

$$\frac{\nu(\Gamma/\nu)^{\frac{2}{3}} L/u' \times l}{L^3} \approx R_\lambda^{\frac{2}{3}\alpha+\beta-2}, \quad \frac{\nu^2 S^2 (\Gamma/\nu)^{\frac{4}{3}} L/u' \times l}{\nu \omega'^2 \times L^3} \approx R_\lambda^{\frac{4}{3}\alpha+\beta-2} \quad (32)$$

となる.

最近の一様等方乱流の直接数値シミュレーションに基づく低圧力渦の詳細な解析 (榎原, 木田 2002) によれば, 渦 Reynolds 数および渦管の全長のスケーリング指数は  $\alpha = 0.16$ ,  $\beta = 2.26$  である. そこで,  $\alpha \approx 0$ ,  $\beta \approx 2$  として乱流中の渦構造の体積占有率と散逸への寄与率を見積もると, 渦管に対しては, 式 (31) から体積, 散逸のいずれも  $R_\lambda^{-1}$  が得られ, らせん渦層に対しては, 式 (32) から体積, 散逸のいずれも  $R_\lambda^0$  が得られる. この評価では, 高 Reynolds 数極限  $R_\lambda \rightarrow \infty$  での渦管の寄与は消えてしまうが, らせん渦層の寄与の方は有限値に保たれることになる.

以上の結果は, もし仮に Jiménez *et al.* (1993, 1998) が主張しているように高 Reynolds 数乱流中の渦管自身のエネルギー散逸への寄与が小さいとしても, 少なくとも渦管まわりに形成されるらせん渦層においては, 高 Reynolds 数でも乱流エネルギー散逸への重要な寄与がなされることを示唆している.

## 文献

Corrsin, S. 1962 Turbulent dissipation fluctuations. *Phys. Fluids* **5**, 1301–1302.

Jiménez, J., Wray, A. A., Saffman, P. G. & Rogallo, R. S. 1993 The structure of intense

- vorticity in homogeneous isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **255**, 65–90.
- Jiménez, J. & Wray, A. A. 1998 On the characteristics of vortex filaments in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **373**, 255–285.
- Kawahara, G., Kida, S., Tanaka, M. & Yanase, S. 1997 Wrap, tilt and stretch of vorticity lines around a strong thin straight vortex tube in a simple shear flow. *J. Fluid Mech.* **353**, 115–162.
- Kida, S. & Miura, H. 2000 Double spirals around a tubular vortex in turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* **69**, 3466–3467.
- Lundgren, T. S. 1982 Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. *Phys. Fluids* **25**, 2193–2203.
- 槇原孝文, 木田重雄 2002 等方乱流中の低圧力渦の構造. 京都大学数理解析研究所講究録, 本号.
- Moore, D. W. 1985 The interaction of a diffusing line vortex and aligned shear flow. *Proc. R. Soc. Lond.* **A399**, 367–375.
- Passot, T., Politano, H., Sulem, P. L., Angilella, J. R. & Meneguzzi, M. 1995 Instability of strained vortex layers and vortex tube formation in homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **282**, 313–338.
- Saffman, P. G. 1992 *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.
- Tennekes, H. 1968 Simple model for the small-scale structure of turbulence. *Phys. Fluids* **11**, 669–671.