

チャネル流の周期解と乱れ生成

京大院 理学研究科 藤 定義 (Sadayoshi Toh)

Graduate School of Science, Kyoto Univ.

京大院 工学研究科 板野 智昭 (Tomoaki Itano)

Graduate School of Engineering, Kyoto Univ.

チャネル流に周期解とカオス的な解が存在することを示した。周期解は、位相空間において、乱流の吸引域境界 (basin boundary, BB) 上に存在し、この多様体内では安定な双曲的不安定解である。この周期解は、既に見出されている定常進行波 (TWS) のホモクリニック軌道に近い。周期的に乱れを生成するが、内部層に限られており、外部層の乱流を励起しない。一方、この周期解に近いが、時折外部層が励起される非定常解 (カオス的解) を見出した。この解は、内部層での乱れ生成を表す BB の周期解と外部層の乱流を結ぶ不安定な解である。このことは、内部層で作られた乱れを外部層へ”伝達”する機構が存在することを示唆している。

1 目的

壁のある流れでは、壁近傍で乱流生成が卓越する。一方、この領域では縦渦やヘアピン渦に代表される渦構造やストリークなどの秩序構造が観測されるものの、それらを含めた統計的な取扱は難しい [1]。一方、最近の研究から、乱流生成は動力学的な過程として理解できることが明らかになって来た。秩序構造の時空間欠的な出現は、位相空間の局所的な低次元性に起因しており、ナビエ・ストークス方程式の不安定な解の存在と密接に関連している [2-5]。

これまでの研究で、バーストが壁に局在した定常進行波の不安定過程として説明できる事を示した。しかし、バーストが自励的に繰り返し起きることや外部層の乱流状態の励起過程については定性的な説明しかできなかった。本研究では、内部層での乱れ生成が外部層と独立であることを示す周期解や、内部層と外部層の相互作用を記述するカオス的な解が存在することを示す結果を得たので報告する。

2 数値計算手法：シューティング法の改良

以下、ナビエ・ストークス方程式の DNS を用いた解析結果を紹介する。計算スキームは、これまでの報告と同じである [3]。本研究では、多様な解を見出すにあたり、シューティング法の

精度を上げる必要があった。また、レイノルズ数やシステムサイズが異なる場合にも用いるために、初期条件の一般化も行った。

我々の用いたシューティング法は、1方向にのみ不安定な双曲的な解を求める手法で、不安定方向成分の振幅をできる限り小さくするように初期パラメータを決めるものである。今回得た非定常解は周期が非常に長いため、初期1回だけのパラメータ設定では、精度的に十分ではない。そこで、初期のパラメータが精度内で収束した後、適当な時間経った解を初期条件として再度シューティングパラメータを与え解を求めるようにし、この過程を繰り返して非定常解を求めた。今回得た解では、7回程シューティングを接続している。この意味で、得られた解は区分的に連続であるが、周期解では1周期後に 10^{-7} 程度の相対誤差で一致することを確認しており、改良シューティング法によって得られる解の精度は極めて良いと考えている。

シューティングの初期条件としては、これまでの研究では、DNSで得たTWSに漸近すると考えられる時刻の場を用いてきたが、今回は、任意のレイノルズ数やシステムサイズに適用できるように解析的な場を与えた。この初期条件には、ポアズイユ流に壁近傍に局在した縦渦対を加えたものを用いた。これは、TWSが発達したストリークと密接に関連していることを考慮している。すなわち、ストリークの近似解を与えれば良いのだが、適当な解析解を与えるのは難しいので、縦渦対を与え自発的に形成されるストリークを用いた。

3 周期解

図1に、レイノルズ数3000、 $L_x = \pi$, $L_z = 0.4\pi$ で得られた周期解の空間構造と軌道（エネルギー散逸 D と供給 F への射影）を描いた。

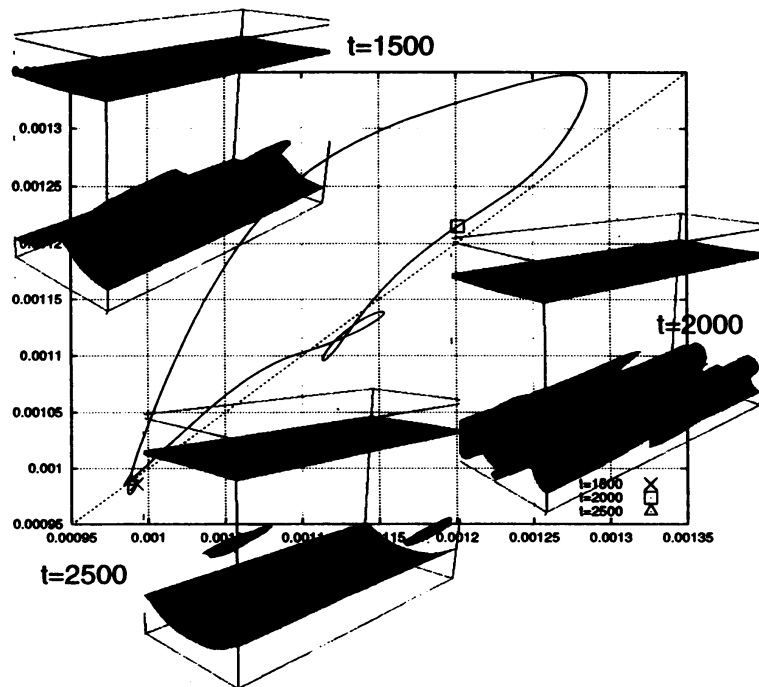


図1: 周期解の軌道と空間構造。背景の軌道は、縦軸を散逸率 $D = \frac{1}{L_x L_z} \int_V \nu \|\omega\|^2 dV$ 、横軸をエネルギーインプット $F = \frac{1}{L_x L_z} \int_V \frac{\partial \nu u_x}{\partial x} dV$ に取った2次元空間への射影。空間構造では、それぞれ、空色が u_x の等値面で盛り上がりは低速ストリークを表し、赤及び青の等値面は縦渦成分の正及び負の閾値を越える渦領域を表す。

解は、この軌道を時計回りに回る。解は周期の大半を左下隅点の近傍で過ごす。この点は、図に示すように1対のストリークと縦渦の対から成り、TWSに非常に似ている。本報告では、この点を1ストリークTWSと呼ぶ。その後、急速に離脱しエネルギーを散逸(乱れの生成)する。この過程は、TWSの不安定多様体に沿っての離脱過程と極めて似ている。その後、散逸が大きくなり左隅への回帰が始まる。□の点では、図に示したように2対のストリークが形成されており、更に時間が経つと1ストリークTWSへ戻る。図には、1サイクルの前後の空間構造 ($t = 1500$ と $t = 2500$) が示してあるが、明らかに、 z 方向の位相が半周期 ($L_z/2$) だけずれている。実は、このサイクルを2度回ると位相も元に戻る。従って、周期解は2サイクルで閉じる解になっている。

ここでは示さなかったが、同様な周期解はレイノルズ数が2500の場合にも存在する。

4 カオス的解と位相空間での表現

より低いレイノルズ数で同じ初期条件をもとにシューティングを行った時には、先に得られた周期解の特徴と間欠的に現れる乱流状態をあわせ持つ解が得られる。これも、シューティング法を用いて求められ、この意味で双曲的な不安定性を持つ解になっている。図2に適当な時刻での空間構造とエネルギーインプットの時間発展 $F(t)$ を描いた。空間構造のうち時刻400、800、1300はそれぞれTWSに近い状態にある。400と1300は z 方向は同位相であるが、800では半周期だけずれている。時刻400と1300の直後の $F(t)$ のピークが、周期解の乱れ生成に対応している。つまり、周期解の軌道を半周した後、乱流状態に移り、再び周期解に戻る。この解のシューティングはかなり難しく、図2に描いた時間しか追跡できていない。

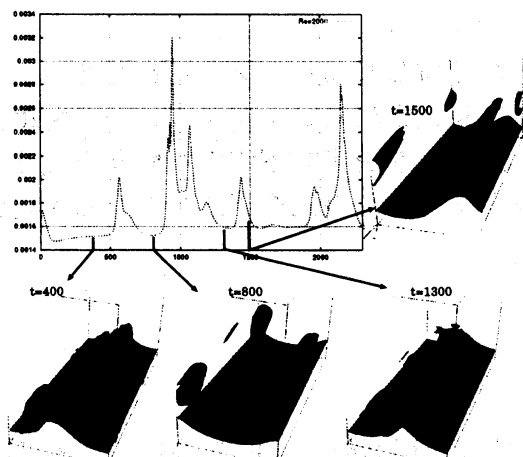


図2 カオス解の空間構造とエネルギーインプットの時間発展 $F(t)$ 。

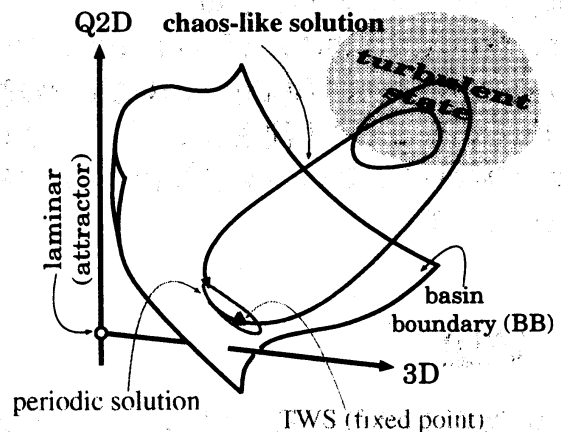


図3 模式的な位相空間。積分量で張られる空間なので、TWSはサドルとして表される。

図3に位相空間の様子を模式的に描いた。周期解とTWSは乱流の吸引域境界 (basin boundary, BB) 上に存在し、周期解は、TWSのホモクリニック軌道に近い。前節で見たように、周期解は壁近傍の内部層に局在しており、生成された乱れは外部層を励起せず、そのダイナミクスは内部層に閉じたものと考えられる。一方、カオス的な解は、BB上の周期解と乱流状態を結ぶ解になっている。つまり、内部層で生成された乱れが、外部層に輸送され、外部層を励起する過程を表していると考えられる。更に、カオス的な解は、乱流状態から再び周期解に接近するので、壁乱流での乱れ生成が自励的サイクリックな過程であるという考えを支持している。

図4に壁に平行な面内で積分したレイノルズ応力 $\langle u_x u_y \rangle(y, t) = \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} u_x u_z dx dz$ の時間発展を示した。図4(a)は図3の乱流状態の、図4(b)はそれに引き続く周期解の時間帯に対応する。乱流状態では、2度強いバーストが起こっているが、それぞれの始まりは図4(b)の周期解での乱れ生成と類似している。違いはその直後の壁から比較的遠いところで始まる乱れ生成である。実は、この上部での乱れ生成は、下部でのストリークの不安定性に伴う縦渦の成長と関連しており、縦渦の先頭部分が成長し交差し、下部の縦渦対と逆の位相を持つ縦渦対が形成されることが原因である。壁から遠方の領域で逆位相で発達した縦渦対が、壁近傍

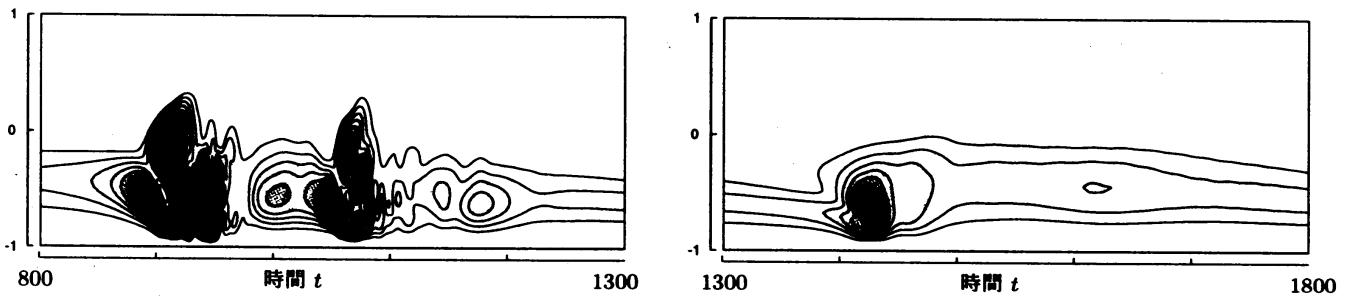


図4：カオス的な解での平行な平面で積分したレイノルズ応力 $\langle u_x u_y \rangle(y, t)$ の時間発展。

(a) 乱流状態 (b) 周期解

にあったストリークとは逆位相の、より大きなスケールのストリークを壁から遠方の領域に形成する。この大きなスケールのストリーク形成は、外部層まで達した縦渦による流体の混合の結果だと考えることができる。

また、解が乱流状態にある時間帯では、何度も壁近傍からはじまるバーストが起きている。これらのバーストと、解軌道がBBに接近離脱するときに観察されるレイノルズ応力の特徴が比較的似ていることにも注意してほしい。このことは、乱流状態を表す不安定な解が存在するというのみならず、この不安定な解が一方で解のアトラクター的な役割を果たしている可能性を示唆している。

5 結論

本研究では、DNSを用いたシューティング法を改良し、初期条件を解析的に与えることにより、異なるレイノルズ数、システムサイズに対して周期解、カオス的な解を見出した。周期解は、乱れ生成が外部層の励起と直接関連しない内部層に閉じたダイナミクスが存在することを示している。また、カオス的な解は、内部層と乱流状態を結ぶグローバルな解であり、内

部層と外部層のダイナミクスが結合されていると考えられる。このことから、壁乱流の乱れ生成が自励的な繰り返しを起こすことが理解できる。

本研究の結果は、レイノルズ数が低く、またシステムサイズも小さいので、外部層の乱流状態も比較的単純な構造をしている。しかし、カオス的な解での乱流状態の励起過程では、自己相似的な過程を想起させる、下部ストリークの上に更に新たなストリークが形成され不安定化する現象が観察された。このことから、壁から外部層への乱れの輸送を、空間的な”エネルギーカスケード”と考え、外部層の乱流状態は自己相似的な統計性質をもつ系と見做せるかもしれない。レイノルズ数やシステムサイズが大きい場合でこのアイデアが成り立つか確認することは次の課題である。

参考文献

- [1] S.K. Robinson, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23** (1991) 601.
- [2] J.M. Hamilton, J. Kim, and F. Waleffe, *J. Fluid Mech.*, **287** (1995) 317.
- [3] T. Itano and S. Toh, *J. Phys. Soc. Japan*, **70** (2001) 703.
- [4] J. Jimenez and M. P. Simens, *J. Fluid Mech.*, **435** (2001) 81.
- [5] G. Kawahara and S. Kida, *J. Fluid Mech.*, **449** (2001) 291.