

## 弾性体の幾何学的非線形問題に対する ALE 有限要素法

横浜国立大学 大学院環境情報研究院 山田貴博 (Takahiro YAMADA)  
Graduate School of Environment and Information Sciences  
Yokohama National University

### 1. 序

構造物の幾何学的非線形問題の解析では、予め与えられた初期形状から出発し、連続な釣り合い経路上に存在する変形後形状を順次求めていくことでひとつの釣り合い経路を追跡する方法が基本である。したがって、釣り合い経路上に分岐点が存在する場合には、釣り合い経路上の分岐点の位置の特定と分岐経路の探索のための手法（たとえば、[1]など）を用いるか、あらかじめ初期不整などを与えることで一意性のある釣り合い経路を解が進行するように問題を設定することが必要となる [2]。

たとえば、曲げ剛性のない膜構造は、内部に生じた張力による幾何剛性によって形状を保持する構造であり、非常に不安定である。そのため、予め与えられた初期形状から出発し、荷重を漸増することで得られる連続な釣り合い経路を考えた場合には、その経路上には多数の分岐点が存在する場合が多い。したがって、膜構造の幾何学的非線形解析では、分岐解析を併用するか分岐点を通るための工夫が必要となる。

また、アーチやシェルなどの座屈解析では、不整量を与えた初期形状から出発し、滑らかな曲線を示す釣り合い経路を追跡することで座屈分岐点を回避する解析手法がしばしば用いられる。しかしながら、このようにして得られた解は、不整量がない場合の解とは異なったものとなる。

さらに、大変形状態を想定した設計が必要な膜構造などでは、幾何学的非線形性から、通常は設計変更毎に繰返し非線形解析を行わなければならないこととなる。

そこで本研究では、履歴不依存な超弾性体を仮定することにより、これらの幾何学的非線形解析に筆者等の提案する ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 有限要素法 [4] を適用することを考える。ALE 有限要素法では、初期形状を可変とできることから、ある初期形状から出発した釣り合い経路上の点から、異なる初期形状から出発した釣り合い経路上の点へを移動することが可能となる。すなわち、ALE 有限要素法では、ひとつの釣り合い経路を追跡するのではなく、初期形状の変更により移動可能な釣り合い経路上の解を順次求めることで、所定の初期形状に対応する変形後形状を決定することが可能である。したがって、分岐点を含まない釣り合い経路から、目的とする分岐点を含む釣り合い経路へ移動することで、分岐点の通過を回避することが可能であると考えられる。また、釣り合い経路の追跡を行うことなく、連続的に初期形状と変形後形状の対を求めることができることから、幾何学的非線形性を考慮した構造物に対する一つの形態解析手法として設計等への応用も考えられる。本研究は、このような ALE 型変形記述に基づく有限要素解析手法を幾何学的非線形性が重要となる問題である膜および棒の問題に適用するものである。

## 2. ALE 型変形記述による幾何学的非線形解析

本研究では、Total Lagrange 型変形記述により問題が記述される履歴不依存な超弾性体の境界値問題を考える。Total Lagrange 型変形記述においては、初期形状から変形後形状への写像である変形写像  $\varphi$  によって変形は定義され、超弾性体の境界値問題は、この変形写像  $\varphi$  を未知関数とする問題として定式化される。したがって、幾何学的非線形問題においては、変形写像  $\varphi$  を釣り合い経路上において順次求めることとなる。

このような非線形問題に対して、超弾性体に対する Total Lagrange 型変形記述を基本とした ALE 型変形記述 [3][4] を適用する。ALE 型変形記述においては、初期形状と変形後形状の両方に独立な仮想的な参照形状を導入し、参照形状から初期形状への写像  $\phi_0$  と参照形状から変形後形状への写像  $\phi$  を考える。この時、変形写像  $\varphi$  は次の合成写像として表わされる。(Fig. 1 参照)

$$\varphi = \phi \circ \phi_0^{-1} \quad (1)$$

したがって、変形写像  $\varphi$  を求める問題は、釣り合い経路上の像  $\phi_0$  と  $\phi$  の組を求める問題に書き換えられる。そこで、適当な制約条件 [4] の下で境界条件に対応する  $\phi_0$  と  $\phi$  を求めることで、1つの釣り合い経路上の初期形状に対応する変形後形状を求めることができる。特に、 $\phi_0$  を固定し、 $\phi$  を未知数とする場合は、初期形状を  $\phi_0^{-1}$  によって座標変換した参照形状によって記述を行う Lagrange 型変形記述に対応し、 $\phi$  を固定し、 $\phi_0$  を未知数とする場合は、変形後形状において注目する物質点の初期形状における位置を求める一種の Euler 型変形記述を意味している。

また、幾何学的非線形解析の途中で  $\phi_0$  を変化させる、すなわち初期形状の変更を計算途中に行うことも可能となる。このような ALE 型変形記述による計算では、Fig. 2 に示すようにある初期形状から出発した釣り合い経路上の点から、異なる初期形状から出発した経路上の点へ移動しながら、所定の初期形状に対応する変形後形状を求めることとなる。

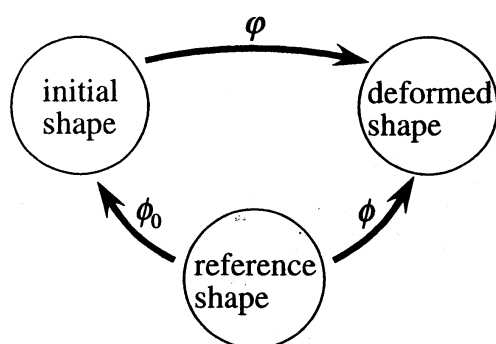


Fig. 1 Diagram of Domains and Mappings for ALE Description

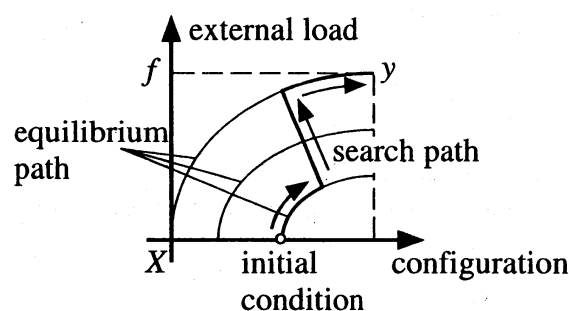


Fig. 2 Schematic Diagram of the Large Deformation Analysis using ALE description

### 3. 膜の ALE 有限要素法

本節では、膜構造の大変形問題に対する ALE 有限要素法と数値計算例を示す。

#### 3.1 膜の ALE 定式化

本研究では、Simo 等らによって提案された幾何学的に厳密なシェル理論 [5] に基づき、ALE 型変形記述を導入した膜の定式化を行う。

2次元のパラメータ  $\xi^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) を用いることにより、Fig. 3 のように初期形状  $\phi_0(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^3$  および変形後形状  $\phi(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^3$  の膜の中央面を表すことができる。

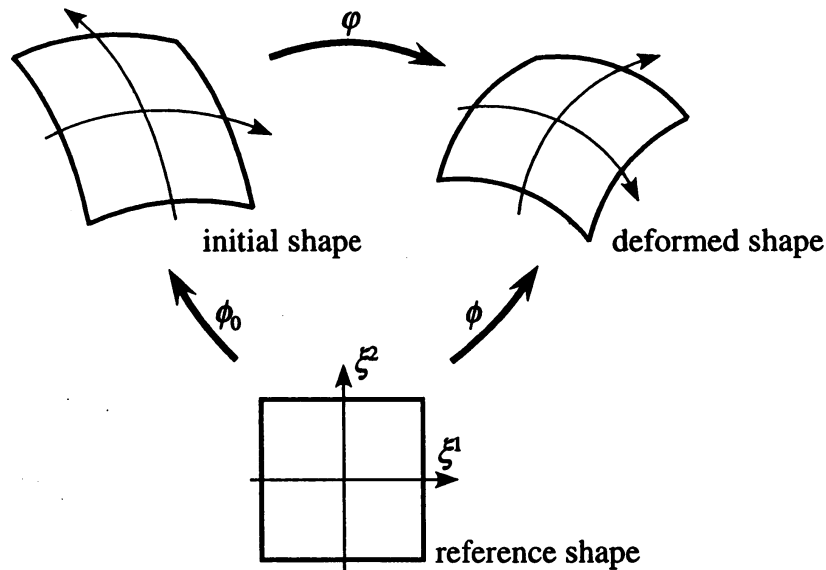


Fig. 3 Kinematics of membrane

変形の測度としては、Simo 等の定式化に従い、次の Green-Lagrange ひずみを膜ひずみとして考える。

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\phi_{,\alpha} \cdot \phi_{,\beta} - \phi_{0,\alpha} \cdot \phi_{0,\beta}) \quad (2)$$

応力としては、式 (2) で定義された Green-Lagrange ひずみの速度に関して双対なものとして、第 2 種の Piola-Kichhoff 応力  $\sigma^{\alpha\beta}$  を厚さ方向に積分した次の合応力  $n^{\alpha\beta}$  を考える。

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{\alpha\beta} dt \quad (3)$$

ここで、 $t$  は厚さ方向の座標、 $h$  は膜厚である。

本研究では、膜に対する履歴不依存な超弾性体として、Green-Lagrange ひずみ  $\epsilon_{\alpha\beta}$  で定義される St. Venant-Kirchoff 材料を考える。いま、初期形状に対する共変計量テンソル  $a_{0\alpha\beta}$ 、反変計量テンソル  $a_0^{\alpha\beta}$  は

$$a_{0\alpha\beta} = \phi_{0,\alpha} \cdot \phi_{0,\beta}, \quad a_0^{\alpha\beta} a_{0\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (4)$$

と定義されることから、ひずみエネルギー密度関数  $W(\epsilon_{\alpha\beta}, a_0^{\alpha\beta})$  は次式で表される。

$$W(\epsilon_{\alpha\beta}, a_0^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} \quad (5)$$

このとき、合応力  $n^{\alpha\beta}$  は、次式のように Green-Lagrange ひずみ  $\epsilon_{\alpha\beta}$  に関して線形関係で表される。

$$n^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} = H^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \quad (6)$$

ここで、等方性を仮定すると  $H$  は、ヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  によって、

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \nu a_0^{\alpha\beta} a_0^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (1-\nu) (a_0^{\alpha\delta} a_0^{\beta\gamma} + a_0^{\alpha\gamma} a_0^{\beta\delta}) \right\} \quad (7)$$

と表される。

仮想変位  $\mathbf{v}$  を用いると、パラメータ  $\xi^\alpha$  で表される領域  $A$  における変形後形状  $\phi$  を未知数とする平衡方程式の弱表現は、次式で表される。

$$N(\varphi; \mathbf{v}) = \int_A n^{\alpha\beta} v_{(\alpha,\beta)} j_0 d\xi^1 d\xi^2 - G_{\text{ext}}(\mathbf{v}) = 0 \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} j_0 &= |\phi_{0,1} \times \phi_{0,2}| && : \text{曲面のヤコビアン} \\ v_{(\alpha,\beta)} &= \frac{1}{2} (\phi_{,\alpha} \cdot \mathbf{v}_{,\beta} + \phi_{,\beta} \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}) && : \mathbf{v} \text{ に対する仮想ひずみ} \end{aligned}$$

であり、 $G_{\text{ext}}(\mathbf{v})$  は外力の仮想仕事である。

上述の定式化においては、膜を記述するパラメータ  $\xi^\alpha$  を参照形状の座標と考えれば、初期形状を表す  $\phi_0$  と変形後形状を表す  $\phi$  がそのまま 2 節で述べた ALE 型変形記述に対応する。このとき、平衡方程式の弱表現は  $\phi_0$  と  $\phi$  によって、次式のように表されるものとする。

$$N(\varphi; \mathbf{v}) = N(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \quad (9)$$

弱形式(9)の増分形は、初期形状の移動量  $\mathbf{U}$  と増分変位  $\mathbf{u}$  を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} N(\phi_0 + \mathbf{U}, \phi + \mathbf{u}; \mathbf{v}) &= N(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \\ &+ D_{\phi_0} N(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \cdot \mathbf{U} + D_{\phi} N(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - G_{\text{ext}}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、式(10)の右辺第3項は、増分変位に対する通常の接戦剛性であり、次式で与えられる。

$$D_{\phi} N(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \approx \int_A (H^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{(\alpha,\beta)} v_{(\delta,\gamma)} + n^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \cdot u_{,\beta}) j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (11)$$

また、式 (10) の右辺第 2 項の初期形状変化に関する項は、平衡方程式に対する初期形状を変更したときの感度であり、次式で与えられる。

$$D_{\phi_0} N(\phi_0, \phi; v) \cdot U = \int_A \left\{ a_0^{\gamma\delta} - 2(H^{\alpha\beta\gamma\delta} + \bar{H}^{\alpha\beta\gamma\delta}) \right\} v_{(\alpha,\beta)} U_{\langle\gamma,\delta\rangle} j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (12)$$

ここで、

$$\bar{H}^{\alpha\beta\gamma\delta} = a_0^{\nu\gamma} a_0^{\mu\delta} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{\alpha\beta} \partial a_0^{\nu\mu}}, \quad U_{\langle\alpha,\beta\rangle} = \frac{1}{2} (\phi_{0,\alpha} \cdot U_{,\beta} + \phi_{0,\beta} \cdot U_{,\alpha})$$

である。

この増分形を用い、Newton-Raphson 法によって非線形方程式の求解を行うことで、初期形状を変形後形状と同様に可変とした計算が可能となる。

### 3.2 有限要素近似

Isoparametric 仮定に基づく有限要素近似において、親要素の座標を参照形状のパラメータ  $\xi^\alpha$  と考えれば、上述の ALE 型変形記述の近似となる。本研究では、このような有限要素近似として、形状、変位を 3 角形 1 次要素を用いて表す。

### 3.3 数値計算例

境界が正方形となる膜に圧力が作用する問題の計算を行った。ここでは、たるんだ初期形状に対する変形後形状を求めるために次のようなプロセスで計算を行った。

1. 初期形状として、等張力が導入される全体縮小した形状を与え、自明な変形後形状を求める。(Fig. 4 参照)
2. 圧力荷重を作用させる。
3. 圧力が作用している状態で、1 で導入した張力が開放される初期形状に変更する。(Fig. 5 参照)
4. 初期形状を圧力の方向とは逆方向にたわんだ形状に変更し、さらに圧力を増加させる。(Fig. 6 参照)

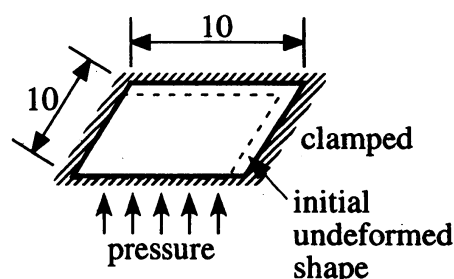
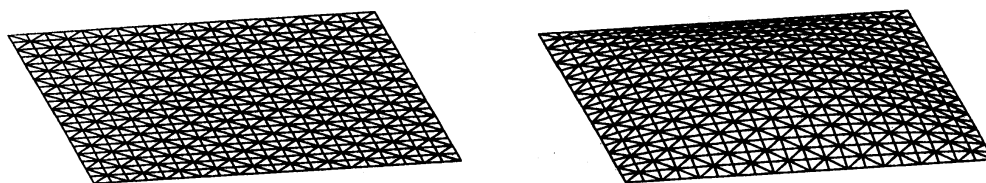


Fig. 4 Membrane with square edge

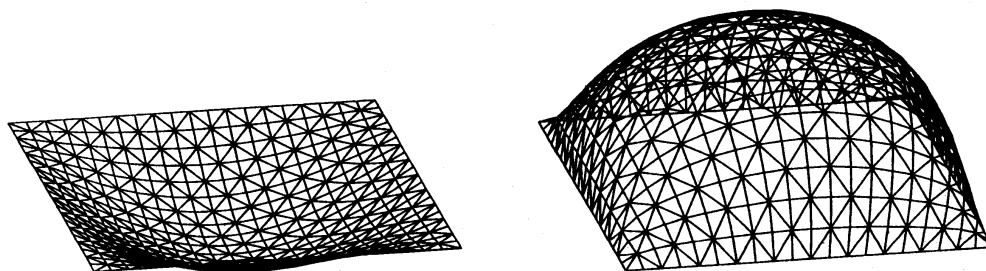
膜は張力が導入されていない状態では不安定であるため、Fig. 6 のようにたるんだ状態を初期形状とするような問題の準静的解析は困難であった。ALE 有限要素法では、安定な自明解から出発し、荷重が作用した状態で初期形状を変更し、たるんだ状態とすることで、このような問題が準静的解析として容易に計算可能である。



(a) Initial shape

(b) Deformed shape

Fig. 5 Flat initial shape and corresponding deformed one



(a) Initial shape

(b) Deformed shape

Fig. 6 Initial and deformed shapes for prescribed condition

#### 4. 棒の ALE 有限要素法

本節では、棒の大変形問題に対する ALE 有限要素法と数値計算例を示す。

##### 4.1 棒の Total Lagrange 型定式化

本研究では、Simo 等により提案された有限変形を考慮した幾何学的に厳密な棒理論とその有限要素近似 [6, 7] を基本とし、ALE 型変形記述を考慮した Total Lagrange 型定式化に修正する。

棒の配置は、断面に固定された 3 次元正規直交基底の運動として、断面中心の位置ベクトルと直交基底によって記述される。いま、 $S \in [0, L]$  を変形前の棒の断面中心に沿った長さ座標とし、初期形状における断面中心の位置を  $\phi_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  によって表すものとする。初期形状における断面に固定された正規直交基底  $\{\mathbf{E}_i(S)\}$  を、 $\mathbf{E}_3$  が断面に垂直となるものとし、初期形状における断面の定義において  $\mathbf{E}_1$  を固定するものとして次のように定める (Fig. 7 参照)。

$$\mathbf{E}_3 = \frac{d\phi_0}{dS}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_1 \quad (13)$$

このとき、 $S$  は長さ座標であることから

$$\left\| \frac{d\phi_0}{dS} \right\| = 1 \quad (14)$$

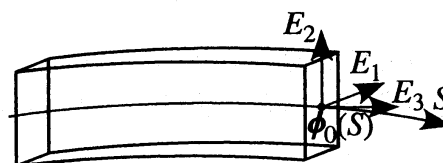


Fig. 7. Initial configuration of rod

が成立することに注意する。断面を  $\Pi \subset \mathbb{R}^2$  とすると、初期形状における棒の任意点の位置  $\mathbf{X} : [0, L] \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^3$  は、

$$\mathbf{X}(S, \xi) = \phi_0(S) + \xi^\alpha \mathbf{E}_\alpha(S) \quad (15)$$

と表される。ここで、 $\xi^\alpha (\alpha = 1, 2)$  は、断面  $\Pi$  における位置である。

変形後形状における断面中心の位置を  $\phi : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3$  によって表し、変形後の断面を表す正規直交基底  $\{t_i(S)\}$  とする。このとき、 $\{E_i(S)\}$  と  $\{t_i(S)\}$  の関係は、直交変換行列  $\Lambda : [0, L] \rightarrow \text{SO}(3)$  ( $\text{SO}(3)$  は直交回転群) によって、次式のように記述される。

$$t_I(S) = \Lambda(S)E_I(S) \quad (16)$$

さらに、初期形状の場合と同様に、変形後形状における棒の任意点の位置  $\mathbf{y} : [0, L] \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^3$  は、

$$\mathbf{y}(S, \xi) = \phi(S) + \xi^\alpha t_\alpha(S) \quad (17)$$

によって表される。

初期形状を参照配置とする軸ひずみとせん断ひずみの組となるひずみベクトル  $\Gamma$  は、 $\{E_i(S)\}$  を基底とする局所座標系上の成分として次のように定義できる。

$$\Gamma = Q^t \left( \Lambda^t \frac{d\phi}{dS} - E_3 \right) \quad (18)$$

ここで、 $Q$  は局所座標系から全体座標系への変換行列であり

$$Q = [E_1 E_2 E_3] \quad (19)$$

で表される。

また、初期形状を参照配置とする曲率と比ねじれ角の組となるベクトル  $\kappa$  も同様に、局所座標系成分として次のように定義できる。

$$\kappa = Q^t \Lambda^t \omega \quad (20)$$

ここで  $\omega$  は次の反対称テンソル  $\Omega$  に関する軸性ベクトルである。

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{d\Lambda}{dS} \Lambda^t, \quad \omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

応力の釣合を考えるために、Cauchy 応力  $\sigma$  から導かれる材軸方向の応力ベクトル  $T$  を、変形後の断面の法線ベクトル  $t_3$  を用いて次のように定義する。

$$T = \sigma t_3 \quad (22)$$

この応力ベクトルを断面  $\Pi$  にわたり積分することで、軸力とせん断力の組となる合応力ベクトル  $n$  と、モーメントベクトル  $m$  が、次式により定義できる。

$$n = \int_{\Pi} T dA, \quad m = \int_{\Pi} (\mathbf{y} - \phi) \times T dA \quad (23)$$

また、初期形状を参照配置とし、 $\{E_i\}$  を基底とする局所座標系の成分として表した合応力ベクトル  $N$  とモーメントベクトル  $M$  は

$$N = Q^t \Lambda^t n, \quad M = Q^t \Lambda^t m \quad (24)$$

によって得られる。

$\phi$  に対する許容変数を  $\eta$ 、 $\Lambda$  に対する許容変数である反対称テンソル  $\Theta$  に関する軸性ベクトルを  $\theta$  とすると、平衡方程式の弱表現は以下のように表される。

$$N(\phi, \Lambda; \eta, \theta) = \int_{[0,L]} \left\{ n \cdot \left( \frac{d\eta}{dS} - \theta \times \frac{d\phi}{dS} \right) + m \cdot \frac{d\theta}{dS} \right\} dS - G_{ext}(\eta, \theta) \quad (25)$$

ここで、 $G_{ext}(\eta, \theta)$  は、許容変数  $(\eta, \theta)$  に対する外力仕事である。

本研究では、材料として超弾性体を仮定し、構成則として、初期形状を参照配置とするひずみ、曲率と合応力、モーメントが線形関数となる次の St. Venant - Kirchhoff 材料を用いる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} \Gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (26)$$

ここで、

$$C = \text{Diag}[GA_1, GA_2, EA, EI_1, EI_2, GJ]$$

であり、 $GA_1, GA_2$  は  $E_1, E_2$  方向のせん断剛性、 $EA$  は軸剛性、 $EI_1, EI_2$  は  $E_1, E_2$  方向の曲げ剛性、 $GJ$  はねじり剛性である。

#### 4.2 棒の ALE 型定式化

上述の棒の定式化に対する ALE 型変形記述 [4, 8] の導入を考える。棒においては、初期形状は断面中心位置と断面の向きを定める直交基底によって定義される。本研究においては、初期形状の定義は断面の向きを定める直交基底を含めて断面中心位置を表す  $\phi_0$  によって行われていることから、 $\phi_0$  を可変とすることで ALE 型変形記述が実現される。また、本研究では、断面の変化は無いものと仮定し、断面に埋め込まれた直交基底  $\{E_i\}$  については、 $E_1$  を固定し、式 (13) によって移動した  $\phi_0$  に応じて変化するものとする。(Fig. 8 参照)

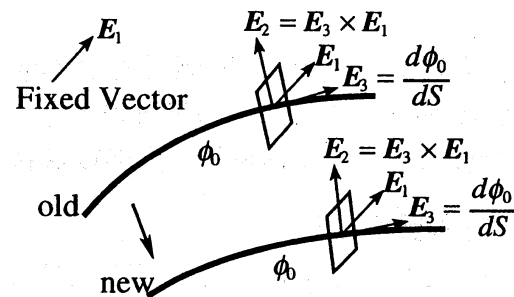


Fig. 8 Change of initial configuration of rod

いま、初期形状における断面中心の増分移動量を  $U$  とすると、 $U$  に独立な物理量  $f$  の長さ座標  $S$  に関する微分の方向微分は、形状とは独立な座標  $\zeta$  を考慮することにより、次



のように求められる。

$$\begin{aligned} D_{\phi_0} \frac{df}{dS} \cdot U &= D_{\phi_0} \left( \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dS} \right) \cdot U = \frac{df}{d\zeta} D_{\phi_0} \left\| \frac{d\phi_0}{d\zeta} \right\|^{-1} \cdot U \\ &= -\frac{df}{d\zeta} \mathbf{E}_3 \cdot \frac{dU}{d\zeta} \left( \frac{d\zeta}{dS} \right)^2 = -\frac{df}{dS} \mathbf{E}_3 \cdot \frac{dU}{dS} \end{aligned} \quad (27)$$

したがって、式(18)のひずみベクトル  $\Gamma$  について、 $U$  に関する方向微分は、

$$D_{\phi_0} \Gamma \cdot U = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \left\{ \frac{dU}{dS} \times \mathbf{E}_1 - \left( \frac{dU}{dS} \cdot \mathbf{E}_3 \right) \mathbf{E}_2 \right\} \cdot \Gamma \\ \left\{ \frac{dU}{dS} - \left( \frac{dU}{dS} \cdot \mathbf{E}_3 \right) \mathbf{E}_3 \right\} \cdot \Gamma \end{array} \right\} - Q^t \frac{dU}{dS} - \left( \frac{dU}{dS} \cdot \mathbf{E}_3 \right) \Gamma \quad (28)$$

と計算できる。また、式(20)の曲率ベクトル  $\kappa$  の  $U$  に関する方向微分は、

$$D_{\phi_0} \kappa \cdot U = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \left\{ \frac{dU}{dS} \times \mathbf{E}_1 - \left( \frac{dU}{dS} \cdot \mathbf{E}_3 \right) \mathbf{E}_2 \right\} \cdot \kappa \\ \left\{ \frac{dU}{dS} - \left( \frac{dU}{dS} \cdot \mathbf{E}_3 \right) \mathbf{E}_3 \right\} \cdot \kappa \end{array} \right\} - \left( \frac{dU}{dS} \cdot \mathbf{E}_3 \right) \kappa \quad (29)$$

と計算できる。

このような関係を用いて、弱形式(25)の増分形は、断面中心の増分変位  $\mathbf{u}$  と断面の回転増分を表すスピテンソル  $\Psi$  および初期形状における断面中心の移動量  $U$  を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} N(\phi_0 + U, \phi + \mathbf{u}, \exp(\Psi)\Lambda; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}) &\approx N(\phi_0, \phi, \Lambda; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}) \\ &+ D_{\phi_0} N(\phi_0, \phi, \Lambda; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}) \cdot U + D_{\phi} N(\phi_0, \phi, \Lambda; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{u} \\ &+ D_{\Lambda} N(\phi_0, \phi, \Lambda; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}) \cdot \Psi - G_{ext}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (30)$$

特に、右辺第2項の初期形状変化に関する項は、平衡方程式に対する初期形状を変更したときの感度である。この増分形を用い、Newton-Raphson法による非線形方程式の求解を行うことで、初期形状を変形後形状と同様に可変とした計算が可能となる。

### 4.3 有限要素近似

本研究では、Isoparametric仮定に基づき、形状、変位を1次要素を用いて有限要素近似するものとする。要素座標  $\zeta \in [0, 1]$  を用いると、初期形状および変形後形状の断面中心は次のように近似される。

$$\phi_0^h(\zeta) = N_1(\zeta) \mathbf{X}_1 + N_2(\zeta) \mathbf{X}_2, \quad \phi^h(\zeta) = N_1(\zeta) \mathbf{y}_1 + N_2(\zeta) \mathbf{y}_2 \quad (31)$$

ここで、 $\mathbf{X}_a, \mathbf{y}_a$  は、それぞれ初期形状および変形後形状における節点  $a$  の断面中心の位置ベクトルであり、 $N_a$  は補間関数であり、以下のように表される。

$$N_1(\zeta) = 1 - \zeta, \quad N_2(\zeta) = \zeta \quad (32)$$

一方、断面の回転を表す回転テンソル  $\Lambda$  についても、Total Lagrange 型で近似する必要がある。しかしながら、Simo 等の提案する有限要素近似 [6, 7] では、回転および曲率は Updated Lagrange 型で評価されてきた。そこで、要素の剛体回転と要素内の回転の変動を分離することを考え、要素内の回転を  $SO(3)$  に属する 1 次補間として、全回転を用いて次式のように近似する。

$$\Lambda^h(\zeta) = \exp(\zeta \bar{\Omega}) \Lambda_1, \quad \exp(\bar{\Omega}) = \Lambda_2 \Lambda_1^t \quad (33)$$

ここで、 $\Lambda_a$  は節点  $a$  の回転を表す直交テンソルである。このとき、要素内の曲率と比ねじれ角の組となるベクトル  $\kappa$  は、反対称テンソル  $\bar{\Omega}$  を表す軸性ベクトル  $\bar{\omega}$  を用いることにより、

$$\kappa = Q^t \Lambda^t \bar{\omega} \frac{d\zeta}{dS} \quad (34)$$

と表されることとなる。なお、実際の数値計算では節点回転については四元数を用いて表す。

以上の有限要素近似は、基本的に Timoschenko 梁に対する有限要素近似となっていることから、locking 現象を回避するため、要素剛性・応力の評価には次数低減積分である 1 点積分を用いる。

#### 4.4 数値計算例

##### 4.4.1 直線棒の Euler 座屈問題

直線棒の Euler 座屈問題に本研究で提案する ALE 有限要素法による数値計算手法を適用する。本研究では、Fig. 9 に示す両端単純支持の弾性棒を考え、軸力を強制変位によって作用させる。初期形状に対しては、座屈が励起されるよう、1、2、3 次のモードに対応する Fig. 10 のような不整を与える。このような初期不整を与えて計算を行い、座屈が適当に進行した状態で初期形状を ALE 法に基づき変更することで、初期不整の無い状態の釣合経路上の点と求め、その点から除荷と載荷を行うことで初期不整の無い棒の釣合経路を求める。

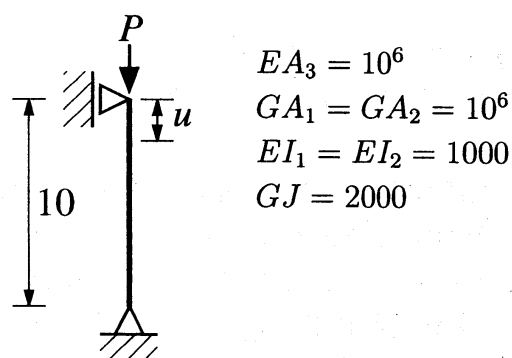


Fig. 9 Euler buckling problem

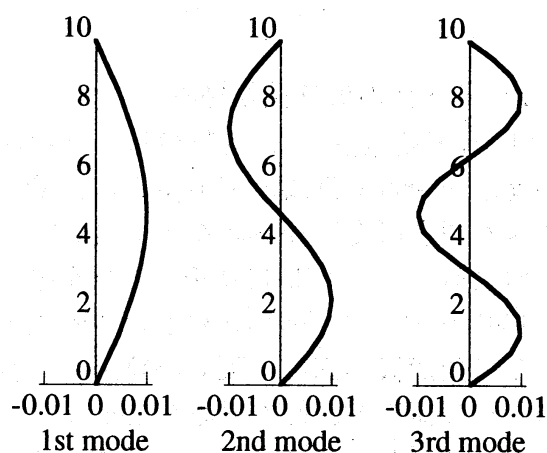


Fig. 10 Applied initial imperfection

Fig. 11 に1次モードに対応する初期不整を与えて計算したときの荷重と変位の関係を示す。この問題では、除荷経路は載荷経路と同一であることから、ALE法によって変位  $u = 0.04$  において初期不整の無い経路に侵入し、除荷を行うことで、座屈分岐点を含む釣合経路が計算できている。

また、Fig. 12 に2次モードおよび3次モードに対応する初期不整を与えて計算した荷重と変位の関係を示す。1次モードの場合と比べ、2、3次モードに対応する解は初期不整に鋭敏であることから、ALE法によって初期不整の無い経路に侵入した場合、初期不整のある場合と初期不整の無い場合の変位  $u = 0.04$  における荷重の差は、高次モードになるにしたがって増加することが分かる。

3次モードによる座屈後形状を通常の座屈分岐解析を伴う手法で求めるためには、3回の分岐解析を経ることが必要である。これに対して、本研究で提案するALE有限要素法を用いる場合には、初期不整を有する場合の解から通常の幾何学的非線形解析と同じNewton法による反復解法を用いるのみで、解が得られている。

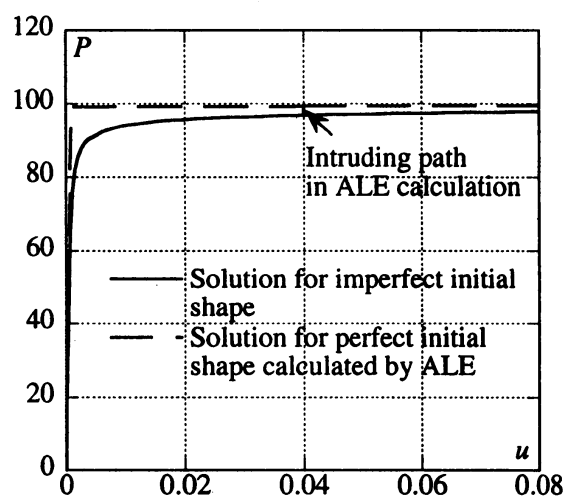


Fig. 11 Tip displacement versus applied load for 1st mode imperfection

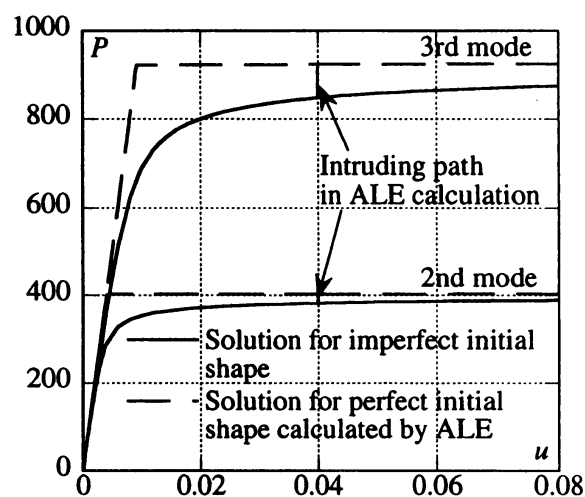


Fig. 12 Tip displacement versus applied load for 2nd and 3rd mode imperfections

#### 4.4.2 アーチの孤立経路探索

ALE有限要素法による孤立経路の探索に対する適用例として、Fig. 13 に示す頂点に集中荷重を受ける両端単純支持の放物線アーチを考える。このアーチに単調に荷重を作用させた場合の変形後形状を Fig. 14 に示す。

これに対して、初期形状をループを描くような形状に設定し、ALE有限要素法により初期形状を Fig. 13 の形状に変化させたときの変形後形状を求めた形状を Fig. 15 に示す。この変形後形状は、孤立経路上の釣合点であると考えられることから、除荷経路を計算しその荷重と変位の関係を Fig. 16 に、経路上の変形後形状を Fig. 17 に示す。変位  $u = 0.04$  付近に飛び移り点が見られることから、得られた変形後形状は、別の荷重を同時に作用させ、その後、その荷重をゼロとして求められる孤立経路上の釣合点であることが分かる。本研究で提案するALE有限要素法を用いた幾何学的非線形解析手法では、

孤立経路へ移行するための荷重パターンを考えることなく、変形状態で初期形状を変化させることにより、このような形状を求めることが可能となっている。

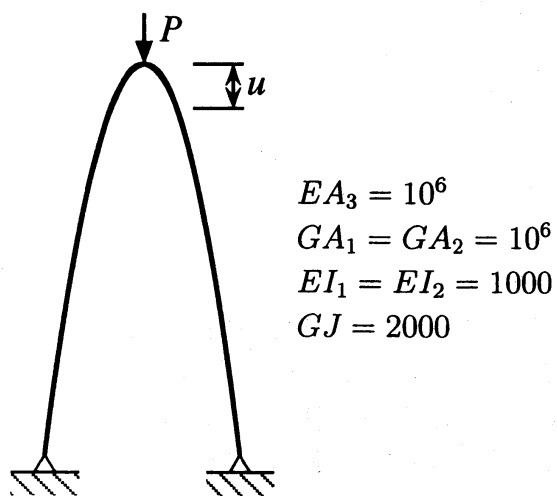


Fig. 13 Large deformation problem of parabolic arch

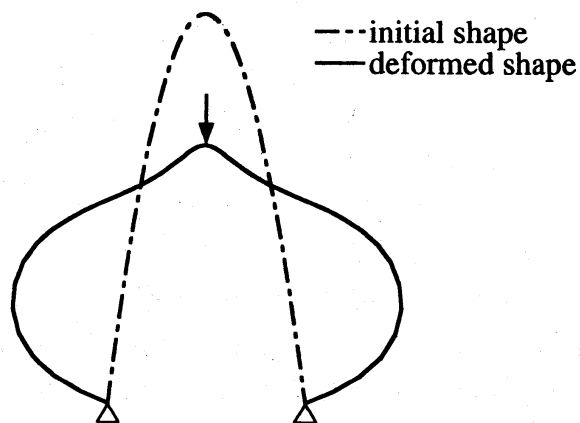


Fig. 14 Deformed shape of arch under monotonic loading

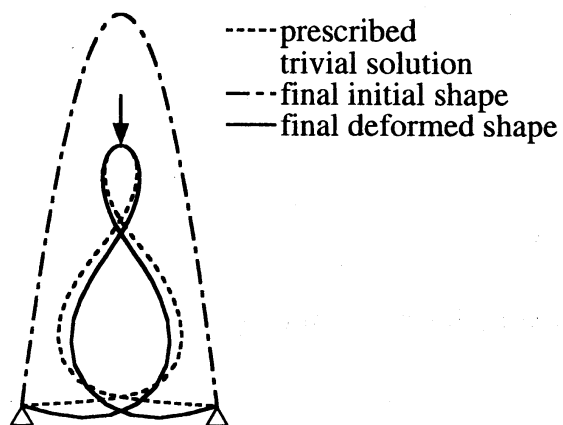


Fig. 15 Strange deformed shape of arch by ALE calculation

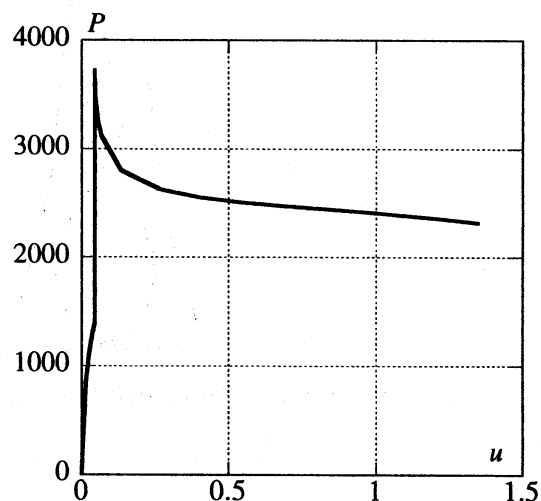


Fig. 16 Top displacement versus applied load for unloading process

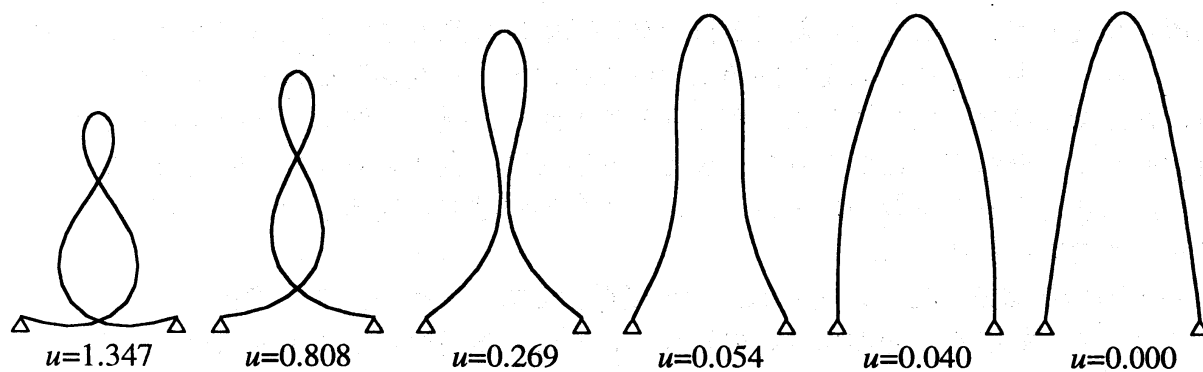


Fig. 17 Deformed shapes of arch on unloading path

#### 4.4.3 アーチの初期形状決定

ALE 有限要素法では、変形後形状に対して荷重点と境界条件を与えることによって、対応する初期形状を未知数として求める初期形状解析 [8] も考えることができる。ここでは、前項で得られた Fig. 15 に示す変形後形状を用い、荷重点である頂点の位置が Fig. 14 の形状と等しくなる初期形状を初期形状決定問題として求める。この計算では、自明解として Fig. 15 に示す変形後形状と初期形状が一致する状態から出発し、頂点の変位を徐々に大きくするよう初期形状の荷重点の位置を変更し逐次解析により所定の荷重点位置の初期形状を決定する。

計算された初期形状を Fig. 18 に示す。得られた初期形状は、Fig. 14 の形状とは異なり、曲率の符号が変化するものとなっている。その結果、得られた初期形状からは単調な荷重点により与えた変形後形状に到達することが可能であることが確認されている。となっている。また、Fig. 14 と異なる形状が得られたことは、初期形状決定問題の解が一意ではないことを意味するが、ここで用いた計算プロセスにおいては、分岐などは発生していない。

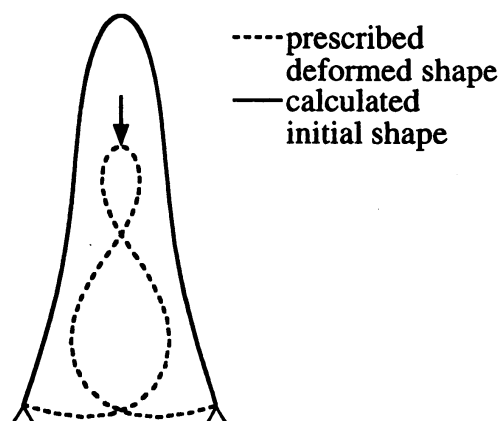


Fig. 18 Calculated initial shape of arch by inverse shape determination

## 5. 結び

本研究では、ALE 有限要素法を典型的な幾何学的非線形問題である膜と棒の大変形問題に適用し、釣り合い経路に沿った解の逐次探査ではなく、適当な変形状態において初期形状を変更することで分岐解析を行わない効率的な幾何学的非線形解析手法を提案した。提案した手法では、大変形問題における初期形状と変形後形状の対を、釣り合い経路の追跡無く連続的に求めることができることから、孤立経路上の解を求めることが可能であることを示すことができた。また、本手法は大変形を考慮した構造物に対する一つの形態解析手法と位置づけられ、このような手法は展開構造物などの形態を考える上でも有用であると考えられる。

ALE 有限要素法では、既定された変形後形状に対して荷重点と境界条件を与えることによって、対応する初期形状を未知数として求める初期形状決定問題を考えることができる。本研究では、棒の問題において、中央軸の座標を未知数として適当な初期形状を求めることが可能であることを示すことができた。一方、膜構造の場合においては、決

められた変形後形状を与える初期形状は、非常に多く存在することから、本研究で用いた単純な Newton-Raphson 法による非線形方程式の解法では、初期形状が求められないことが確認されている。したがって、ALE 有限要素法によって膜構造の初期形状決定を行うためには、何らかの制約条件や正則化の概念を導入した手法を開発する必要があると考える。

本研究で提案した ALE 有限要素法は、従来の幾何学的非線形問題で考えている初期形状を固定し変形後形状のみを未知数とする解の探索空間を、初期形状と変形後形状の組を探索するものとして拡張した手法と捉えることができる。このような手法の特徴を活かすことにより、今後は、大変形問題の解の構造の解明や大変形状態を考慮しなければならない各種構造の形態解析への応用を考えていきたい。

### 参考文献

- [1] 藤井文雄, 北川竜三: "弾性分岐問題における分岐方向の予測について", 構造工学論文集, Vol.39A, (1993), 323-331.
- [2] 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- [3] R.B. Haber: A Mixed Eulerian-Lagrangian Displacement Model for Large-Deformation Analysis in Solid Mechanics, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **43**, 277-292, 1984.
- [4] T. Yamada, F. Kikuchi: An Arbitrary Lagrangian - Eulerian Finite Element Method for Incompressible Hyper Elasticity, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **102**, 149-177, 1993.
- [5] J.C. Simo, D.D. Fox and M.S. Rifai: "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model: Part II The Linear Theory; Computational Aspects," *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **73**, 53-92, 1989.
- [6] J.C. Simo: "A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part1", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **49**, 55-70, 1985.
- [7] J.C. Simo, L. Vu-Quoc: "A Three-Dimensional Finite-Strain Rod Model. Part 2 - Computational Aspects -," *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **58**, 79-116, 1986.
- [8] T. Yamada: "Finite element procedure of initial shape determination for hyperelasticity," *Structural Engineering & Mechanics*, **6**, 173-183, 1998.