

# ミンコフスキーノルム保存に着目した 超相対論的粒子の高精度数値積分法について

室蘭工業大学・電気電子工学科 川口秀樹 (Hideki Kawaguchi)

Department of Electrical and Electronic Engineering

Muroran Institute of Technology

## 1. はじめに

コンピュータの高性能化・大容量化に伴い、実用化研究、産業応用のさまざまな場面において、数値シミュレーションが以前にもまして実用的に用いられるようになってきた。その一つに加速器科学という分野があり、とりわけ数値シミュレーションによる解析、設計が大きなウェイトを占める。すなわち、装置が巨大で試行錯誤的に試作を繰り返すことが困難であり、また同時にそもそも電子や電磁場の挙動を詳細に計測することが難しい物理対象であることに起因して、可能な限り数値シミュレーションで現象を把握し装置開発に反映させる必要がある。実際、これまでも、加速器科学における数値シミュレーションは、トランスファー行列によるビームトラッキング、SUPERFISH など高周波解析コードによる空洞設計、さらには、MAFIA などによる航跡場解析とさまざまに適用され、加速器の設計において重要な役割を果たしてきている。これに対し、近年、加速器の超高エネルギー化、ビームの高密度化、さらには自由電子レーザなどの開発に際して、粒子と場の相互作用が強く現れる現象を正確に取扱う必要が生じはじめ、それとともにさらなる数値解析の高精度化が、粒子軌道解析、電磁場解析双方に要求されつつある。この典型的な事情はたとえば相対論的荷電粒子から放出されるシンクロトロン放射にみることができる。荷電粒子が円軌道運動すると電磁波を放出するが、荷電粒子の速度が相対論的になると図1のように、進行方向に鋭く指向性をもつ放射となり、これをシンクロトロン放射と呼ぶ。その特徴はすでに詳しく調べられているが、とりわけ、スペクトルごとの放射パター

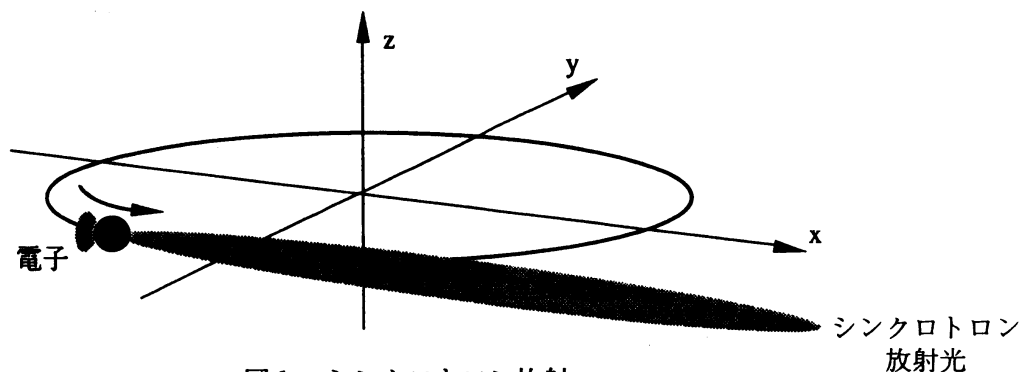


図1 シンクロトロン放射

ンはシンクロトロン放射の性質をよく反映しており興味深い。図2には、光の速度の95%で円軌道運動する電子からの遠方場の放射パターンが高調波別に示されている。基本波の $n=1$ は、電子の円運動と同じ周期をもつ放射電磁場成分に対応し、以降 $n=2, 3, 4, 5, \dots$ はその第 $n$ 番目高調波に対応した成分の放射パターンである。高調波になるに従い放射パターンは水平面を指向することがわかる。また、図3左側には図2をそのまま縮尺したものを、右側には光の速度の99%の速度をもつ電子からの放射パターンをそれとスケールをあわせてプロットしたものが示されている。これらの図からわかるように、同一円軌道運動でかつ電子の速度が増した場合、低周波成分はもはや放出されず飽和し、つぎつぎと高調波成分の放射にエネルギーが分配され、かつ、高調波になればなるほど水平面を強く指向した放射パターンとなる。そして、高エネルギーになればなるほど、電子の運動に敏感に放射場が変化することがわかる。

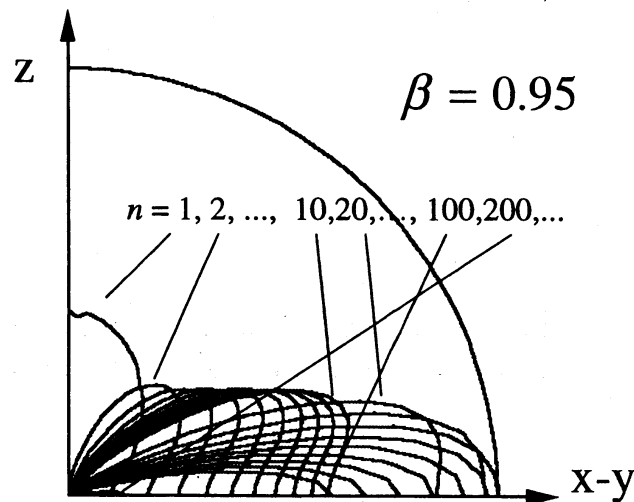


図2 シンクロトロン放射のスペクトル毎の放射パターン ( $\beta = 0.95$  の場合)

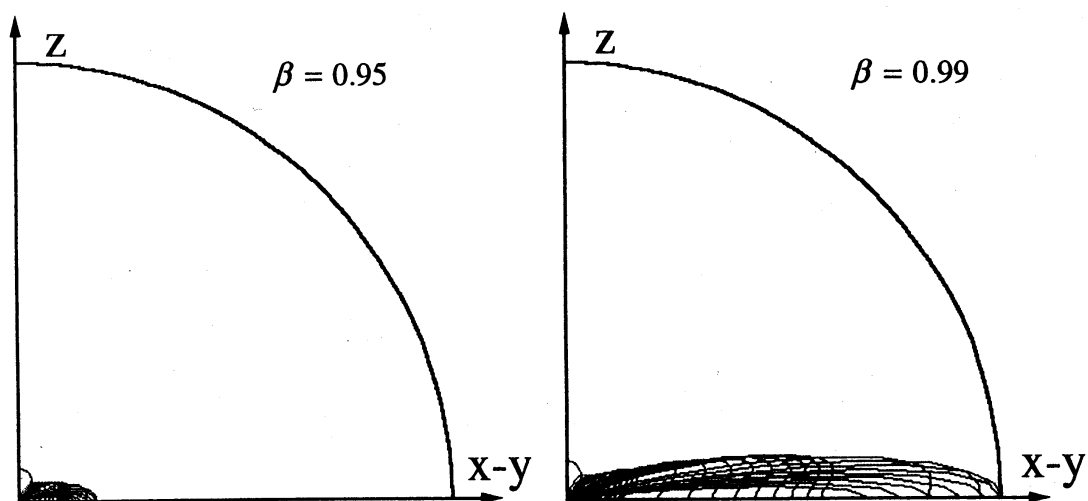


図3 シンクロトロン放射のスペクトル毎の放射パターン ( $\beta = 0.95$  と  $0.99$  の場合の比較)

このように一般に高エネルギー粒子と電磁場の相互作用の解析においてはわずかの軌道の違いに対し電磁場との相互作用は強く影響を受けることが知られており、その数値シミュレーションは極めて高精度に行なう必要がある。ところがこのとき、電磁場を放射しながら運動する電子の運動は、もはやハミルトン系に属さないことが知られており、荷電粒子軌道の高精度数値積分公式として標準的に用いられるシンプレクティック積分法はもはやその精度保証を失うことになる。このような観点から、本稿では、シンプレクティック構造とは別の指針に沿った高精度数値積分公式について議論する。

## 2. 共変形式の運動方程式におけるリー代数

前節で述べた数値積分公式の導入を行なう前に、その重要な基礎概念となる荷電粒子の運動方程式に潜在するローレンツ群リー代数構造についてまとめておく。荷電粒子のエネルギー方程式および運動方程式（ローレンツ力方程式）は、3次元表示では、次のようになる。

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\frac{d(m\mathbf{v}\gamma)}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (2)$$

$e$  は素電荷、 $m$  は粒子の質量、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  は電場および磁場である。これらは、共変形式の運動方程式として、次のように4次元的にまとめることができる。

$$mc \frac{du^\mu}{ds} = eF_\nu^\mu u^\nu \quad (3)$$

ここに、 $u^\mu$ ,  $F^\mu_\nu$  はそれぞれ次のように定義される4元速度および電磁場テンソル、また、粒子の運動のパラメータ  $s$  はミンコフスキー計量で図った粒子の世界間隔に沿った軌道の長さである。

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$F_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

このとき、(5)の電磁場テンソルは、本来は交代テンソルであったものが、(3)の運動方程式に使用されるにあたって、交代テンソルの混合成分という形に成分表示されたため、交代でもなく対称でもない成分表示になっている。しかしこのとき、次のように幾何学的な観点から考えると(5)があえて交代でも対称でもない表示になっていることが自然に解釈できる。まず、 $\mathbf{K}$ および $\mathbf{S}$ をそれぞれ次のように定義されるブーストおよび角運動量演算子として、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (K_x \quad K_y \quad K_z) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (S_x \quad S_y \quad S_z) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

(5)の電磁場テンソルを次のように書き直す、

$$F_{\nu}^{\mu} = \frac{\mathbf{E}}{c} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (8)$$

すなわち、(3)に現れる電磁場テンソルは、電場、磁場の各成分を係数としてローレンツ群のリー代数の規約表現により完全に展開表現でき、したがって、電磁場テンソルはローレンツ群のリー代数であると考えることができる。実際、これは(3)の形からも何うことができ、正確には、

$$\mathcal{M} = \frac{e}{mc} F_{\nu}^{\mu} \quad (9)$$

と定義して、

$$\frac{du^{\mu}}{ds} = \mathcal{M} u^{\mu} \quad (10)$$

と(3)を読み直すことにより、共変形式の運動方程式がローレンツ群のリー代数の性質を含んでいることがわかる。したがって、必然的に(10)の中の4元速度 $u^{\mu}$ は、パラメータ $s$ に関して運動の間そのミンコフスキーノルムを保存しなければならない。実際これは、既に保証されている。すなわち、4元速度はその定義から、

$$u^{\mu} u_{\mu} = 1 \quad (11)$$

なる恒等式を満たし、ノルムは1という値を常にもつ。

本節最後に、後の参照のため、ローレンツ群リー代数の規約表現に関する有用な公

式を列挙しておく。 まず、 $\mathbf{e}$  を任意の単位ベクトルとして、

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K})^3 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{K} \quad (12)$$

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{S})^3 = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{S} \quad (13)$$

が成り立つ。 さらに、規約表現の各要素間においては、 $\epsilon_{ijk}$  をレビ・チビタ完全反対称擬テンソルとして、

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k \quad (14)$$

$$[S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k \quad (15)$$

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k \quad (16)$$

が成り立つ。 ここに、交換子記号  $[A, B] \equiv AB - BA$  を用いた。

### 3. ミンコフスキーノルム保存をベースとした数値積分法

運動方程式に潜在するローレンツ群リー代数構造をベースにミンコフスキーノルム保存をベースとした数値積分公式を導入する。

現在、最もポピュラーに用いられている高精度数値積分公式であるシンプレクティック積分法にはいくつか種類があるもの、その基本的な考え方は同じで、ハミルトン系の運動であることと等価な条件として、“運動の間、シンプレクティック構造が保存される”

$$\omega \equiv dq \wedge dp = \text{const.} \quad (17)$$

という性質に着目し、この条件が正確に満足されるよう運動方程式を離散化するというものである。 しかしながら、シンプレクティック構造を基本とする数値積分法の定式化は、荷電粒子の運動に適用する場合、次のケースで問題が生じる。

— 共役運動量  $\mathbf{P} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$  にはベクトルポテンシャルが含まれ、3次元磁場中の運動を扱う場合、それに対応するベクトルポテンシャルが一般的には求まらない

— 超相対論的な運動を取扱う場合、放射電子の運動方程式はハミルトン系に属さずシンプレクティック構造の保存が必ずしも正確な積分である条件とはならない

すなわち、上記のケースをも取り扱える高精度な数値積分法を必要とする場合、何らかの新しい指針が必要となる。 その新しい指針として、ここでは、前節に導入した運動方程式に潜在するローレンツ群リー代数構造をもちいる。 すなわち(10)を、

”運動方程式とは、単に4元速度のミンコフスキーノルムが保存すべき”

であることを主張するものであると解釈する。 したがって、その数値積分法もミンコフスキーノルムが保存されることを主眼において構成することとする。 このような観点から、まずはじめに最も簡単な例として一様な場の中の運動に対する定式化を行ない、その後、それを改良、拡張する形で、一般の電磁場中の運動に対する定式化を行なうこととする。

### 3.1 一様な場の中の運動

場が一様であるということは、(3)中の電磁場テンソルが場所  $\mathbf{x}(t)$  にも、さらに、運動のパラメータ  $s$  にも依存しないということであり、この場合は(3)は次のように容易に解析的に積分でできる。

$$u^\mu(s) = \left[ \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu s\right) \right]_\nu^\mu u^\nu(0) \quad (18)$$

ここに、右辺の行列の指数関数の部分はその定義からローレンツ変換となる。またさらに、(18)をパラメータ  $s$  で再度積分すると、粒子の4次元座標  $x^\mu(s)$  となり、次式を得る。

$$x^\mu(s) = x^\mu(0) + \left[ \int_0^s \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu \sigma\right) d\sigma \right]_\nu^\mu u^\nu(0) \quad (19)$$

ただし、右辺第一項は  $x^\mu(0)$  が座標の初期値となるよう付け加えてた。このとき、(18)、(19)は次のように一つの行列形式にまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} x^\mu(s) \\ u^\mu(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left[ \int_0^s \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu \sigma\right) d\sigma \right]_\nu^\mu \\ 0 & \left[ \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu s\right) \right]_\nu^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\nu(0) \\ u^\nu(0) \end{bmatrix} \quad (20)$$

すなわち、粒子の4次元座標と4元運動量をまとめた8次元位相空間の座標は、(20)で定義される  $8 \times 8$  のトランスファー行列を乗じることにより、パラメータ  $s$  だけ軌道が積分されることがわかる。(20)が本稿で述べるミンコフスキーノルム保存をベースとした数値積分法そのものであるが、以後、この公式が実際に本節冒頭で述べた通り相対論的な運動に対しても期待される精度をもつかどうかなど、その性質を丁寧に調べていくことにする。まず、はじめに、公式(20)の典型的な性質を示すべく、最も簡単な例として、一様な場のケースについて具体的に(20)を構成してみる。

#### 一様な磁場中の運動

一様な磁場中の運動の場合は、電場はないので、(8)は、

$$F_\nu^\mu = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (21)$$

となる。このように電磁場テンソルのローレンツ群リー代数の規約表現での展開に、ブーストあるいは角運動量演算子のどちらか一方のみが含まれている場合は、(20)に出てくる指数関数の計算は非常に簡単となる。すなわち、行列の指数関数の無限級数での計算は不要で、公式(13)を用いると、次のように3つの項のみに還元されて表現できる。

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{e}{mc}F_{\nu}^{\mu}s\right) &= \exp\left(\frac{-e}{mc}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{S})s\right) \\ &= 1 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{S})\sin\left(\frac{e}{mc}Bs\right) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{S})^2\left(1 - \cos\left(\frac{e}{mc}Bs\right)\right)\end{aligned}\quad (22)$$

ここに、 $B = |\mathbf{B}|$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$  とした。すると、これに対応する (20) も容易に解析的に積分でき、初期条件などに注意して計算すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} x^{\mu}(s) \\ u^{\mu}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{S})\frac{mc}{eB}\left(1 - \cos\left(\frac{e}{mc}Bs\right)\right) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{S})^2\left(s - \frac{mc}{eB}\sin\left(\frac{e}{mc}Bs\right)\right) \\ 0 & 1 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{S})\sin\left(\frac{e}{mc}Bs\right) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{S})^2\left(1 - \cos\left(\frac{e}{mc}Bs\right)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{\nu}(0) \\ u^{\nu}(0) \end{bmatrix}\quad (23)$$

わかりやすくするために、この (23) を具体的に成分表示すると、

$$\begin{bmatrix} ct(s) \\ x(s) \\ y(s) \\ z(s) \\ \gamma(s) \\ \gamma(s)\frac{v_x(s)}{c} \\ \gamma(s)\frac{v_y(s)}{c} \\ \gamma(s)\frac{v_z(s)}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{mc}{eB}\sin\left(\frac{eB}{mc}s\right) & \frac{mc}{eB}\left(1 - \cos\left(\frac{eB}{mc}s\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{mc}{eB}\left(1 - \cos\left(\frac{eB}{mc}s\right)\right) & \frac{mc}{eB}\sin\left(\frac{eB}{mc}s\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{eB}{mc}s\right) & \sin\left(\frac{eB}{mc}s\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\left(\frac{eB}{mc}s\right) & \cos\left(\frac{eB}{mc}s\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct(0) \\ x(0) \\ y(0) \\ z(0) \\ \gamma(0) \\ \gamma(0)\frac{v_x(0)}{c} \\ \gamma(0)\frac{v_y(0)}{c} \\ \gamma(0)\frac{v_z(0)}{c} \end{bmatrix}\quad (24)$$

となり、明確に粒子の円運動になっていることがわかる。

### 一様な電場中の運動

一様な電場中の運動も磁場の場合とほぼ同様に計算できる。ここでは、(21)、(22) に対応する式のみを挙げるにとどめる。すなわち、

$$F_{\nu}^{\mu} = \frac{\mathbf{E}}{c} \cdot \mathbf{K}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{e}{mc}F_{\nu}^{\mu}s\right) &= \exp\left(\frac{e}{mc}\left(\frac{\mathbf{E}}{c} \cdot \mathbf{K}\right)s\right) \\ &= 1 - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{K})\sinh\left(\frac{e}{mc}\frac{\mathbf{K}}{c}s\right) + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{K})^2\left(\cosh\left(\frac{e}{mc}\frac{\mathbf{K}}{c}s\right) - 1\right)\end{aligned}\quad (26)$$

ここに、 $E = |\mathbf{E}|$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{E}/(c|\mathbf{E}|)$  とした、また (26) の指数関数の計算には公式 (12) を用いた。次の (23)、(24) に対応する式は、おおむね、磁場の場合の三角関数の部分が双曲線関数に変わるのみで計算はそれほど難しくはないのでここでは省略

### 3.2 3次元電磁場中の運動

一般の電磁場の場合は、基本的には公式(20)において、トランスファー行列中の電磁場テンソルを  $x^\mu(0)$  にて評価し、微小パラメータ  $ds$  ずつ積分を実行する。

$$\begin{bmatrix} x^\mu(ds) \\ u^\mu(ds) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left[ \int_0^s \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu(x^k(0)) \sigma\right) d\sigma \right]_\nu^\mu \\ 0 & \left[ \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu(x^k(0)) s\right) \right]_\nu^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\nu(0) \\ u^\nu(0) \end{bmatrix} \quad (27)$$

しかしながら、この場合は単純に公式(20)を用いたのでは極めて精度が悪い。実際、(18)を展開表示すると、

$$\begin{aligned} u^\mu(s) &= \left[ \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu s\right) \right]_\nu^\mu u^\nu(0) \\ &= u^\mu(0) + \frac{es}{mc} F_\nu^\mu u^\nu(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{es}{mc}\right)^2 F_a^\mu F_\nu^a u^\nu(0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{es}{mc}\right)^3 F_a^\mu F_b^a F_\nu^b u^\nu(0) + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

であり、これを  $u^\mu(s)$  のパラメータ  $s$  に関するテーラー展開式

$$\begin{aligned} u^\mu(s) &= u^\nu(0) + \frac{du^\nu(0)}{ds} s + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{du^\nu(0)}{ds} s^2 + \frac{1}{3!} \frac{d}{ds} \frac{d}{ds} \frac{du^\nu(0)}{ds} s^3 + \dots \\ &= u^\mu(0) + \frac{es}{mc} F_\nu^\mu u^\nu(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{es}{mc}\right)^2 \left( F_a^\mu F_\nu^a u^\nu(0) + \frac{\partial F_\nu^\mu}{\partial x^k} u^k(0) u^\nu(0) \right) + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

と比べればわかるように電磁場テンソルを  $x^\mu(0)$  で評価することは、 $u^\mu$  は  $s$  に関してただか1次の精度しかないことになる。しかしながら、あくまで本節で導入してきた指針をベース数値積分公式を構成するとすると、ローレンツ群リー代数の性格を残したまま精度向上のためのなんらかの修正を加える必要があり、許される可能性は(20)の公式の構造はそのまま残し、電磁場テンソルの値の評価に修正を加えることが唯一の可能性となる。ここでは、その代表的な2つの方法を挙げておく。

#### 中心差分化

(27)のように電磁場テンソルを  $x^\mu(0)$  にて評価するのは、ちょうどオイラー法に対応する。そのもっとも簡単な精度向上化は、次のような中心差分公式を用いる方法である。

$$\begin{bmatrix} x^\mu(ds) \\ u^\mu(ds) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left[ \int_0^s \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu(\bar{x}^k) \sigma\right) d\sigma \right]_\nu^\mu \\ 0 & \left[ \exp\left(\frac{e}{mc} F_\nu^\mu(\bar{x}^k) s\right) \right]_\nu^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\nu(0) \\ u^\nu(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^k = \frac{x^k(ds) + x^k(0)}{2} \quad (30)$$



したがって、必然的にこれは陰的スキームとなり、 $\bar{x}^k$ を求めるにはなんらかの再帰的な計算が必要となる。ただし、実際にはその再帰計算は、高々5～10回程度の繰り返しで収束するためそれほど大きな性能低下とならない。

### ガウス・ルジャンドル公式による評価

公式(30)では、場を評価する座標を $x^\mu(0)$ から $\bar{x}^k$ に修正したが、(27)のローレンツ群リー代数の構造を壊さないければよいのであれば、次のように、もう少し広範囲の修正も可能である。

$$\begin{bmatrix} x^\mu(ds) \\ u^\mu(ds) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left[ \int_0^s \exp\left(\frac{e}{mc} \bar{F}_\nu^\mu \sigma\right) d\sigma \right]^\mu \\ 0 & \left[ \exp\left(\frac{e}{mc} \bar{F}_\nu^\mu s\right) \right]^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\nu(0) \\ u^\nu(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_\nu^\mu = \sum_{i=1}^s b_i F_\nu^\mu(\bar{x}_i^k) \quad (31)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^k &= x^k(0) + ds \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{u}_j^k, & 0 \leq i \leq s \\ \bar{u}_i^k &= u^k(0) + ds \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{e}{mc} F_i^k \bar{u}_j^l, & 0 \leq i \leq s \end{aligned} \quad (32)$$

すなわち、(31)のように電磁場テンソルそのものに重みづけ評価などの変更を加えても、これが反対称テンソルの混合成分表示の構造を持っていればよい。こうすることで、一般のルンゲ・クッタ法のもつ高精度性を、本稿のミンコフスキーノルム保存ベースの積分スキームに継承できる。

### 3.3 放射電子の運動

本節冒頭に述べたように、そもそも本稿にてシンプレクティック積分法とは別の基準に基づいた数値積分スキームを構成するのは、その理由の一つにハミルトン系に属さない放射電子の運動を目途していたためである。ここでは、放射電子の運動に対する数値積分公式を説明する。

電子が加速度運動を行うと、電磁波を放射することが知られており、したがってこれは一種のエネルギー散逸であり、あたかも摩擦力のように運動に影響を及ぼす。その運動方程式は、次のようになることが知られている。

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (33)$$

ここに、(33)右辺第3項が電磁放射に起因するエネルギー散逸の効果を表す項であり、ローレンツ摩擦力と呼ばれている。しかしながら、この式は運動が相対論的速度になるともはや成り立たないことが知られており、相対論的な場合は、電磁放射は極めて強くなり、また図1のように進行方向に鋭く指向性を持ち、その記述には(3

3) を共変形式に拡張したローレンツ・ディラック方程式が知られている。

$$mc \frac{du^\mu}{ds} = eF_\nu^\mu u^\nu + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} u_\nu - u^\mu \frac{d^2 u_\nu}{ds^2} \right) u^\nu \quad (34)$$

今、(34) を次のように  $u^\nu$  でまとめて変形し整理する。

$$mc \frac{du^\mu}{ds} = eH_\nu^\mu u^\nu, \quad H_\nu^\mu = F_\nu^\mu + \frac{e}{6\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} u_\nu - u^\mu \frac{d^2 u_\nu}{ds^2} \right) \quad (35)$$

すると、電磁放射の反作用として追加された(35)右辺の  $H^\mu_\nu$  も反対称テンソルの混合成分表示になり、したがって構造的にローレンツ群リー代数の性質を有する。すなわち、(27)の電磁場テンソル  $F^\mu_\nu$  の部分を、(35)の  $H^\mu_\nu$  に置き換えれば、本稿で説明してきたローレンツ群リー代数をベースとした数値積分公式がそのまま適用できる。ただし、通常(34)のように高次の微分がある場合は次数分の数だけ一階微分方程式を連立させた定式化をすべきであるが、本来エネルギー収支を補正するために追加した右辺第2項はそのような通常の定式化にのせるとシミュレーションはすぐに発散し非物理的な解が支配的になるため、ここでは、放射の反作用の項は(35)のように付加項として扱う。

### 3.4 ミンコフスキーノルムと保存法則

本節最後に運動方程式がもつミンコフスキーノルム保存の性質の物理的意味について説明する。

これまで説明した数値積分公式(27)は、(11)の性質を正確に満たすことを基本に議論を進めてきた。このとき、(11)は単なる方程式がもつ数学的な性質にとどまらず、両辺に  $m^2 c^2$  を乗じて、3次元の物理量を用いて表せばわかるように、

$$\left( \frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2 \quad (36)$$

と、運動量とエネルギーが満たすべき恒等式そのものであることがわかる。すなわち、4元速度(4)を用いて、(1)、(2)をまとめて運動を4次元で扱うこの形式では、運動量とエネルギーの間の関係が常に正確に満たされるスキームが構成されている。そもそも、(1)、(2)は、それぞれエネルギーおよび運動量の時間発展を記述する方程式ではあるものの、それぞれの成分を別々に積分する従来の(シンプレクティック積分法も含めた)ルンゲ・クッタ型のスキームでは、両者の間の整合性は保証されていない。すなわち、シンプレクティック積分法は(17)の条件を課すことにより運動量と座標との間の整合性を保証するように修正したスキームであったのに対し、本稿で述べたミンコフスキーノルム保存をベースとする数値積分公式は、上述のように運動量とエネルギーの整合性を重視したスキームであり、したがって運動量と座標の間の整合性の保証が貧弱となってしまふ。そして、これに対し改善を加えたものが、(34)、(35)であると言える。

## 4. 数値計算例

前節までに説明したミンコフスキーノルム保存をベースとした数値積分法の具体的な数値計算例を示す。同数値積分の典型的な対象として、ここでは、3次元磁場中の運動、および、一様磁場中の放射電子の運動のシミュレーションを示す。

### 4.1 3次元磁場中の運動

純粋な磁場中では、(27)の公式は、指数関数を無限級数でなく(23)で説明した公式が適用できるのみでなく、(36)が正確に満たされるという条件は同時にエネルギー保存則が正確に満たされることに等価となり、このスキームの利点がよく発揮される一つのケースとなる。

ここでは、典型的な3次元磁場として、図4に示すミラー磁場中にトラップされた電子の運動を取扱う。数値シミュレーションした3次元運動を図5に示す。また、2つのエネルギー(10 MeV, 3 GeV)初期値に対し、5000ステップシミュレーションしたときのエネルギーの変化を、3つのスキーム(8次のルンゲクッタ法(RK8<sup>th</sup>), 5次のシンプレクティック陰的ルンゲクッタ積分法(SIRK 5<sup>th</sup>), および本スキーム(Presented))で行った結果を表1に示す。いずれの方法も一般の力学系の数値積分では十分な精度をもった方法であり、実際、10 MeVの低エネルギーの場合は、いずれも理論通りエネルギーに変化はない。しかしながら、超相対論的なエネルギーの3 GeVになると、通常のルンゲ・クッタ法では数値誤差による非物理的なエネルギー損失が深刻に発生し、また、シンプレクティック積分法でさえ、1%程度の誤差が生じていることがわかる。

### 4.2 一様磁場中の放射電子の運動

もう一つのシミュレーション例として、本スキーム特有のシンクロトロン放射を行いながら運動する電子の運動を取り扱う。一様磁場中において、超相対論的な初速度で円運動を行う電子が、電磁放射(シンクロトロン放射)に伴いエネルギーを失い、しだいに小さな半径の運動に遷移していき、最終的には電磁放射が無視できるくらいのエネルギーまで減衰した時点で、ほぼ等半径の円運動に落ち着いていく状況が、図6によく再現されている。ただし、この運動はもはやシンプレクティック積分法でさえ取扱いが不可能であり、数値シミュレーションは本スキームのもののみが示されている。また、参考のため同数値シミュレーションの間のミンコフスキーノルムの値のプロットを図7に示した。

## 5. まとめ

非ハミルトン系の高精度数値積分法として、ミンコフスキーノルム保存に着目した数値積分公式を導入した。とりわけ、超相対論的な荷電粒子の運動の数値積分において大きな威力を発揮することを、理論的な議論、および、具体的な数値シミュレーションとともに示した。

参考文献

- [1] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics* (2nd Ed.), Wiley, 1975.
- [2] H.Kawaguchi, Evaluation of the Lorentz Group Lie Algebra Map Using the Baker-Cambel-Hausdorff Formula, *IEEE Trans. Magn.* **35**[3] (1999), pp. 1490-1493.
- [3] パノフスキー・フィリップス, 「電磁気学」(下), 吉岡書店, 1968.

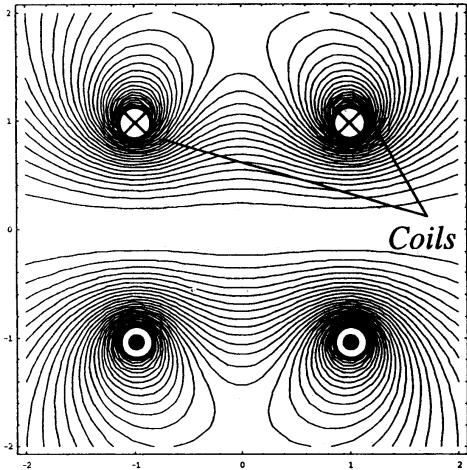


図4 ミラー磁場プロファイル

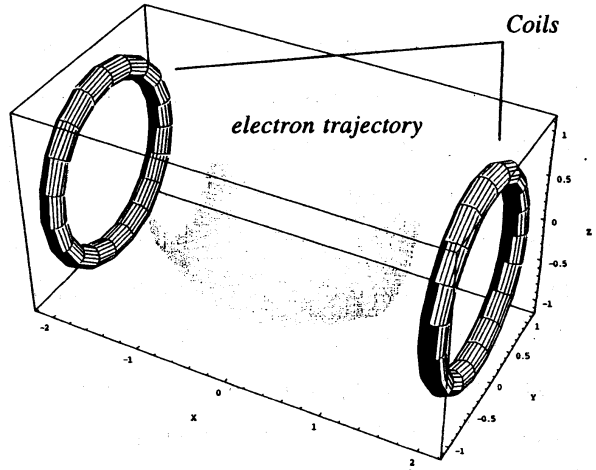


図5 ミラー磁場中の電子の3次元運動

表1 電子のエネルギーの数値誤差による変化

Method	RK 8 <sup>th</sup>	SIRK 5 <sup>th</sup>	Presented
Initial (GeV)	0.109181e-1	0.109181e-1	0.109181e-1
50000step	0.109124e-1	0.109181e-1	0.109181e-1
Initial (GeV)	0.361280e1	0.361280e1	0.361280e1
50000step	0.352526e0	0.363476e1	0.361280e1

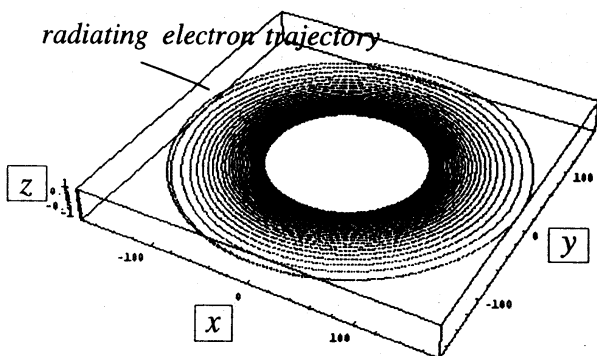


図6 超相対論的電子の放射減衰運動

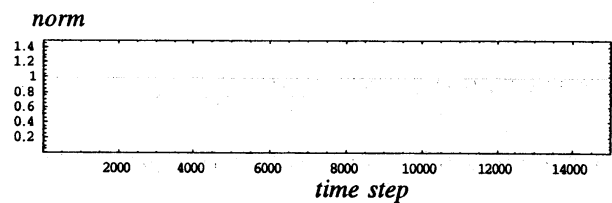


図7 ミンコフスキーノルムの変化