数理解析研究所講究録 1289 巻 2002 年 35-40

Stanley-Reisner 環の次数と算術的次数

寺井直樹 (NAOKI TERAI)
佐賀大学 文化教育
Faculty of Culcure and Education
Saga University

序

本論説はStanley-Reisner 環の次数と算術的次数について その上限を与える不等式を示すことを目標とする。Stanley-Reisner 環の次数と算術的次数とは、それぞれ、対応する単体的複体の最大次元の face の個数 および、facet の個数であり、組合せ論の観点からも興味深い不変量である。さらに 応用として、斉次環の算術的次数の上限を与える不等式を示す。これを示すために、もとのイデアルの generic initial ideal をとって、その polarization を考えることにより、Stanley-Reisner 環の場合に帰着させるという Gröbner basis の 標準的議論 をもちいる。

§1 準備

k を体とし、 R を 斉次 k 代数とする。ここで、 R が 斉次 k 代数とは、$R_0 = k$ であり、R_1 で生成される noetherian graded ring $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ のこととする。この場合、R は剰余環 $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]/I$ で表示される。ただし、 $\deg x_i = 1$。本小文では、いつも、$A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ とし、$I_1 = (0)$ を仮定する。

M を 有限生成次数付き A 加群とするとき、M の Hilbert series を

$$F(M,t) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} (\dim_k M_i) t^i.$$

で定義する。ただし、$\dim_k M_i$ は M_i の k 線形空間としての次元とする。このとき、斉次 k 代数 R の Hilbert series $F(R,t)$ は次の形で、書けることが知られている。

$$F(R,t) = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s}{(1-t)^{\dim R}},$$

ただし、 $h_0(=1), h_1, \ldots, h_s$ は 整数で、$\deg(R) := h_0 + h_1 + \cdots + h_s \geq 1$ をみたす。数列 $h(R) = (h_0, h_1, \ldots, h_s)$ を R の h-vector と言い、$\deg(R)$ を R の次数または、重複度という。

R の算術的次数を次の様に定義する。

$$\operatorname{adeg}_r(R) = \sum_{P \in Ass(A/I), \dim A/P = r} mult_I(P) \deg\ (\mathrm{A/P}),$$

$$\operatorname{adeg}(R) = \sum_{0 \leq r \leq n} \operatorname{adeg}_r(R),$$

ただし、$\mathrm{mult}_I(P) = l(H^0_{\mathrm{P}}(I_P))$. ここで、添字 r のつけ方は [Va] に従っている。([Ba-Mu] における つけ方から＋１ずれる。) 容易にわかるように $\operatorname{adeg}_d(R) = \deg(R)$ である。ただし、$\dim A/I = d$ とする。

M を 有限生成次数付き A 加群とするとき、M の A 上の次数付き極小自由分解を

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{h,j}} \xrightarrow{\varphi_h} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\varphi_1} \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} A(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

とする. ここで、h を M の 射影次元 (projective dimension) といい、$h = \mathrm{pd}_A(M)$ とあらわす。このとき Auslander-Buchsbaum formula $h = n - \mathrm{depth} M$ が成り立つ。各 $\beta_{i,j}$ を M の (i,j) ベッチ数 ((i,j)-th Betti number) といい、また、$\beta_i := \sum_{j \in \mathbf{Z}} \beta_{i,j}$ を M の第 i ベッチ数 (i-th Betti number) という。このとき、M の Castelnuovo-Mumford regularity reg M を

$$\operatorname{reg} M = \max\ \{j - i \mid \beta_{i,j}(M) \neq 0\}$$

で定義する。また、M の initial degree indeg M を

$$\operatorname{indeg} M = \min\ \{j \mid \beta_{0,j}(M) \neq 0\}$$

で定義する。同様に M の relation type rt M を

$$\operatorname{rt} M = \max\ \{j \mid \beta_{0,j}(M) \neq 0\}$$

で定義する。

Gröbner basis の理論から 以下で引用する結果をまとめておく。詳しくは、例えば、[Ei, Chapter 15] を見よ。k を無限体とし、$A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ とする。I を A の斉次イデアルとする。Gin (I) を reverse lexicographic order に関する I の generic initial ideal とする。このとき、$h(A/\mathrm{Gin}\ (I)) = h(A/I)$ が成り立つ。特に、$\deg(A/\mathrm{Gin}\ (I)) = \deg(A/I)$ である。

さらに、次の結果が成り立つ。

定理 1.1 ([Ba-St]).

$$\text{depth } A/\text{Gin }(I) = \text{depth } A/I.$$

$$\text{reg Gin }(I) = \text{reg } I.$$

定理 1.2 ([St-Tr-Vo]).

$$\text{adeg } A/\text{Gin }(I) \geq \text{adeg } A/I.$$

§2 Stanley-Reisner 環

有限集合 $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ に対して、頂点集合 V 上の単体的複体 (simplicial complex) Δ を次の条件 (1)、(2) を満たす $\mathbf{2}^V$ の部分集合とする。但し、 $\mathbf{2}^V$ は V の部分集合全体からなる集合とする。
(1)$1 \leq i \leq v$ に対して、$\{x_i\} \in \Delta$。
(2) $\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$。

$\sharp(\sigma)$ で 有限集合 σ の濃度を表すことにする。Δ の元 σ を Δ の面 (face) という。特に、$\sharp(\sigma) = i+1$ のとき、 $\dim \sigma = i$ とし、i-face という。また、極大な面を facet と言い 、その次元が r であるとき r-facet と言う。

すべての facet が 同じ次元を持つとき、Δ は pure であるという。Δ の次元 (dimension) を $\dim \Delta = \max\{\dim \sigma \mid \sigma \in \Delta\}$ で定義する。

$A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を体 上の n 変数多項式環とする。$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ 上の単体的複体 Δ に対して A のイデアル I_Δ を次のように定義する。

$$I_\Delta = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} | 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n,\ \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}\} \notin \Delta).$$

$k[\Delta] := A/I_\Delta$ を Δ の Stanley–Reisner 環という。

次のことが知られている。

$$\dim k[\Delta] = \dim \Delta + 1.$$

$$I_\Delta = \cap_{\sigma \text{ is a facet}} (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r} \mid x_{i_j} \notin \sigma).$$

このことから

$$\deg k[\Delta] = \sharp\{\Delta \text{ の 最大次元の face }\}$$

$$\mathrm{adeg}_r k[\Delta] = \sharp\{\Delta \text{ の } r-1\text{-facet }\}$$

がわかる。

Δ の Alexander dual complex Δ^* を次で、定義する。

$$\Delta^* = \{\sigma \subset V : V \setminus \sigma \notin \Delta\}.$$

このとき、次が成立する。

定理 2.1.

$$\begin{aligned} &\mathrm{reg}\ I_\Delta - \mathrm{indeg}\ I_\Delta = \dim k[\Delta^*] - \ \mathrm{depth}\ k[\Delta^*]. \\ &\mathrm{reg}\ I_\Delta = \mathrm{pd} k[\Delta^*]. \\ &\mathrm{adeg}_r(k[\Delta]) = \beta_{1,n-r}(k[\Delta^*]). \end{aligned}$$

§3 Stanley-Reisner 環の次数の上限

次の定理は [Va-Vi, Theorem 3.15] を一般化したものである。

定理 3.1. Γ を pure な 単体的複体 とする。Δ を Γ の部分単体的複体とする。このとき

$$\deg(k[\Delta]) \leq \deg(k[\Gamma]) t^{\dim\Gamma - \dim\Delta}$$

ただし、$t = \max\{\sharp(\sigma) \mid \sigma \in \Gamma,\ \sigma \text{ is a minimal non-face of } \Delta\}$.

Γ の 1 つの facet に注目することにより、次のことを示せば十分である。

補題 3.2. I を A の斉次イデアルとする。このとき、

$$\deg(A/I) \leq \ \mathrm{rt}(I)^{\mathrm{codim} A/I}.$$

証明. k は無限体としてよい。$t =\ \mathrm{rt}(I)$ とし、$I' = \oplus_{i\geq t} I_i$ とする。codimA/I= codimA/I' =htI' = grade(I') であるから、長さ h:=ht I' の A-regular sequence を I_t から とる。それを、$y_1, y_2, \ldots y_h$ とする (cf. [Br-He, Prop.1.5.12])。また、$J = (y_1, y_2, \ldots y_h)$ とおく。すると、A/J は完全交差だから、$\deg(A/J) = t^{\mathrm{codim} A/J}$ である。$\dim A/I = \dim A/J$ で $J \subset I$ だから、$\deg(A/I) \leq \deg(A/J)$ である。

§4 斉次代数の算術的次数の上限

この節では、算術的次数の上限を与える不等式を示す。これは、[Ba-Mu, Proposition 3.6] の精密化となっている。これを Alexander duality の応用として示す。

定理 **4.1.** $R = A/I$ を斉次 k 代数 とする。このとき、$0 \leq r \leq n$ に対して、

$$\mathrm{adeg}_r(R) \leq \binom{\mathrm{reg}\ I + n - r - 1}{n - r} - \binom{\mathrm{reg}\ I - \mathrm{indeg}\ I + n - r - 1}{n - r}.$$

証明. $\mid k \mid = \infty$ と仮定してよい。. 定理 1.1 から、$\mathrm{reg}\ \mathrm{Gin}(I) = \mathrm{reg}\ I$ および、$h(A/I) = h(A/\mathrm{Gin}(I))$。polarization して Stanley-Reisner ring $k[\Delta] = B/I_\Delta$ で $\mathrm{e}(A/I) = \mathrm{e}(k[\Delta])$ および、$\mathrm{reg}\ I = \mathrm{reg}\ I_\Delta$ なるものを得る。$d^* = \dim k[\Delta^*]$ 、$p^* = \mathrm{depth}\ k[\Delta^*]$ 、および、$m = \mathrm{embdim} k[\Delta^*]$ とすると定理 2.1 から $\mathrm{reg}\ I = m - p^*$.

$y_1, y_2, \ldots, y_{p^*}$ を $k[\Delta^*]_1$ の regular sequence とし、$z_1, z_2, \ldots, z_{d^*-p^*} \in (k[\Delta^*]/(y_1, y_2, \ldots, y_{p^*}))_1$ を $k[\Delta^*]/(y_1, y_2, \ldots, y_{p^*})$ の system of parameters とする。すると、$k[z_1, z_2, \ldots, z_{d^*-p^*}] \subset k[\Delta^*]/(y_1, y_2, \ldots, y_{p^*})$。
$k[z_1, z_2, \ldots, z_{d^*-p^*}]$ は $d^* - p^*$ 変数の多項式環に同型だから
$\dim_k(k[\Delta^*]/(y_1, y_2, \ldots, y_{p^*}))_{n-r} \geq \binom{d^*-p^*+n-r-1}{n-r}$. 定理 2.1 により、

$$\begin{aligned}
\mathrm{adeg}_r(A/I) &\leq \mathrm{adeg}_r(k[\Delta]) \\
&= \beta_{1,n-r}(k[\Delta^*]) \\
&= \beta_{1,n-r}^{B/(y_1,y_2,\ldots,y_{p^*})}(k[\Delta^*]/(y_1, y_2, \ldots, y_{p^*})) \\
&\leq \dim_k(B/(y_1, y_2, \ldots, y_{p^*}))_{n-r} - \dim_k(k[\Delta^*]/(y_1, y_2, \ldots, y_{p^*}))_{n-r} \\
&\leq \binom{m - p^* + n - r - 1}{n - r} - \binom{d^* - p^* + n - r - 1}{n - r} \\
&= \binom{\mathrm{reg} I_\Delta + n - r - 1}{n - r} - \binom{\mathrm{reg} I_\Delta - \mathrm{indeg} I_\Delta + n - r - 1}{n - r}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

References

[Ba-Mu] D. Bayer and D.Mumford, *What can be computed in algebraic geometry*, in "Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (D. Eisenbud and L. Robbiano, eds.)," Cambridge University Press, 1993, pp.1 – 48.

[Ba-St] D. Bayer and M. Stillman, *A theorem on refining division orders by the reverse lexicographic orders*, Duke J. Math. **55** (1987) 321–328.

[Br-He] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay Rings," Cambridge University Press, Cambridge / New York / Sydney, 1993.

[Ei] D. Eisenbud, "Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry," Springer-Verlag, New York, 1995.

[Fr-Te] A. Frübis-Krüger and N. Terai, *Bounds for the regularity of monomial ideals*, Mathematiche (Catania) **53** (1998),83–97.

[He-Sr] J. Herzog and H. Srinivasan, *Bounds for multiplicities*, Trans. of AMS, **350** (1998), 2879–2902.

[Hi] T. Hibi, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes," Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.

[Ho-Tr] L.T. Hoa and N.V. Trung, *On the Castelnuovo-Mumford regularity and the arithmetic degree of monomial ideals*, Math. Z. **229** (1998) 519–537.

[Mi-Vo] C. Miyazaki and W. Vogel, *Arithmetic and geometric degrees of graded modules*, in " Commutative Algebra Algebraic Geometry, and Computational Methods (D. Eisenbud ed.), Springer-Verlag, New York, 1999 pp.97–112.

[St] R. P. Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra, Second Edition," Birkhäuser, Boston / Basel / Stuttgart, 1996.

[St-Tr-Vo] B. Sturmfels, N.V. Trung and W. Vogel, *Bounds on degrees of projective schemes*, Math. Ann. **302**(1995), 417–432.

[Te] N. Terai, *Generalization of Eagon-Reiner theorem and h-vectors of graded rings*, Preprint.

[Va] W. Vasconcelos, *Cohomological degrees of graded modules*, in "Six Lectures on Commutative Algebra (J.Elias et al. eds.)," Birkhäuser, Boston / Basel / Stuttgart, 1996.

[Va-Vi] C.E. Valencia-Oleta and R.H. Villarreal, Bounds for invariants of graphs and edge-rings, Preprint.