数理解析研究所講究録 1289 巻 2002 年 41-63

Gröbner bases and modules of mixed splines

北村知徳 (Tomonori Kitamura)
大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

序

次元 d の単体的複体 $\Delta \subset \mathbf{R}^d$ で Δ とそのすべての link が pseudomanifold であるものに対して，Δ 上 r 階連続微分可能な区分的多項式函数全体の集合を $C^r(\Delta)$ で表す．集合 $C^r(\Delta)$ の元は C^r spline または単に spline として知られている．このような函数は，計算機支援デザイン（CAD）やコンピューターグラフィックスにおいて曲面の形を明示するために使われたり，偏微分方程式の近似解を与えるための有限要素法において値を補間したり別の函数を近似したりするためによく利用されている．C^r spline に関する基本的な問題として，次数が高々 k の C^r spline 全体から成る $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $C^r_k(\Delta)$ の次元や基底を決定する問題や加群 $C^r(\Delta)$ の自由性に関する問題がある．これらの問題を含め，$C^r(\Delta)$ の代数的な性質については，[1], [2], [3], [4], [8], [9], [10], [11] などによって研究されてきた．本稿では，C^r spline を拡張することによって得られる mixed spline 全体から成る加群 $C^\alpha(\Delta)$ について考察する．C^r spline と同様に，mixed spline に関する基本的な問題として，次元が高々 k の mixed spline から成る $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $C^\alpha_k(\Delta)$ の次元や基底を決定する問題がある．本稿では，$C^\alpha(\Delta)$ の代数的な性質を説明した後,（加群における）グレブナー基底の理論を使って $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $C^\alpha_k(\Delta)$ の次元や基底を計算する方法，および reduced basis を使って $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $C^\alpha_k(\Delta)$ の次元や基底を計算する方法を紹介する．また，reduced basis の存在という観点からスプライン理論において $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ の自由性が重要な問題となるが（ただし，$\widehat{\Delta} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ は $\mathbb{R}^{d+1}$ の原点を頂点とする超平面 $x_{d+1} = 1$ 上に埋め込まれた Δ 上の錐である），この問題に関する [7] の結果についても紹介する．

1 準備

まず，基本的な概念を幾つか述べておく．$\mathbb{R}^n$ の単体的複体とは，$\mathbb{R}^n$ の単体の有限集合 Δ で，次の条件を満たすものである：

(1) 単体 σ が Δ に属するならば，σ の任意の面も Δ に属する；

(2) 単体 σ, τ が Δ に属するならば，$\sigma \cap \tau$ は σ の面であるとともに τ の面でもある．

単体的複体 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ に対して，Δ に属する各単体を Δ の面と言い，Δ の面の次元の最大値を Δ の次元と言う．

また，単体的複体 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ の面 σ の link を

$$\mathrm{link}_\Delta \sigma := \{\tau \in \Delta : \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \text{ と } \tau \text{ の両者を含む } \Delta \text{ の面が存在する}\}$$

で定義する．特に，$\mathrm{link}_\Delta \emptyset = \Delta$ である．

d 次元単体的複体 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ が pseudomanifold であるとは，次の条件を満たすときに言う：

(1) Δ の $d-1$ 以下の次元の面はすべてある d 面（次元 d の面）の面である；

(2) Δ の任意の $d-1$ 面は高々二つの d 面の面である；

(3) Δ の任意の二つの d 面 σ, σ' に対して，Δ の d 面の列

$$\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_s = \sigma'$$

で，$\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ $(1 \le i \le s-1)$ が Δ の $d-1$ 面となるものが存在する．

2 $C^\alpha(\Delta)$ の定義とその性質

本節では，$\Delta \subset \mathbb{R}^d$ を Δ とそのすべての link が pseudomanifold である d 次元単体的複体とする．また，Δ の i 面全体の集合，内部 i 面全体の集合をそれぞれ Δ_i, Δ_i^0 と表し，Δ_i, Δ_i^0 の元の個数をそれぞれ $f_i(\Delta)$, $f_i^0(\Delta)$ と表すことにする．$R := \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ とする．集合 $C^r(\Delta)$ を次のようにして定義する．

定義 2.1. $r \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ と $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ があったとき，次の性質を満たす函数 $F : |\Delta| \longrightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合を $C^r(\Delta)$ と定義する（$C^r(\Delta)$ の元を C^r spline または単に spline と

(1) すべての $\sigma \in \Delta_d$ に対して $F|_\sigma$ は R の元によって与えられる；

(2) 函数 F は r 階連続微分可能である.

$t := f_d(\Delta), e := f^0_{d-1}(\Delta)$ とする. Δ_d の元を $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$, Δ^0_{d-1} の元を $\tau_1, \ldots, \tau_e$ と順序付ける. この順序付けに対して Δ 上の区分的多項式函数 $F : |\Delta| \longrightarrow \mathbb{R}$ を t 個の多項式の組として $F = (f_1, \ldots, f_t)$, $f_i := F|_{\sigma_i}$ と表すことができる. τ_s を含むアフィン超平面を定義する一次多項式を $l_s \in R$ とする. 次の命題より, F が $C^r(\Delta)$ の元であるかどうか判定するためには, 隣接する $\sigma_i, \sigma_j \in \Delta_d$ に着目すればよい.

命題 2.2 ([3, Corollary 1.3]). $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ と Δ 上の区分的多項式函数 F があったとする. $\sigma_k \in \Delta_d$ に対して, $f_k := F|_{\sigma_k} \in R$ とする. このとき, $F \in C^r(\Delta)$ であるための必要十分条件は, $\sigma_i \cap \sigma_j = \tau_s \in \Delta^0_{d-1}$ なる σ_i, $\sigma_j \in \Delta_d$ に対して, $f_i - f_j \in (l_s^{r+1})$ が成り立つことである.

この命題より, $C^r(\Delta)$ の元は, 区分的多項式函数 $F = (f_1, \ldots, f_t), f_k := F|_{\sigma_k} \in R$ で, $\sigma_i \cap \sigma_j = \tau_s \in \Delta^0_{d-1}$ なる σ_i, $\sigma_j \in \Delta_d$ に対して, f_i と f_j の r 階以下の偏導函数が τ_s 上で一致する（すなわち, $F|_{\sigma_i \cup \sigma_j}$ が $\sigma_i \cup \sigma_j$ 上 C^r 級である）ものである. これを拡張したものが mixed spline である.

定義 2.3. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ と $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_e) \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}$ があったとき, 次の性質を満たす函数 $F : |\Delta| \longrightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合を $C^\alpha(\Delta)$ と定義する（$C^\alpha(\Delta)$ の元を mixed spline と呼ぶ）:

(1) すべての $\sigma \in \Delta_d$ に対して $F|_\sigma$ は R の元によって与えられる；

(2) $\sigma_i \cap \sigma_j = \tau_s \in \Delta^0_{d-1}$ なる σ_i, $\sigma_j \in \Delta_d$ に対して, $F|_{\sigma_i \cup \sigma_j}$ が $\sigma_i \cup \sigma_j$ 上 C^{α_s} 級である, すなわち
$$F|_{\sigma_i} - F|_{\sigma_j} \in (\, l_s^{\alpha_s+1} \,)$$
が成り立つ.

$\alpha_s = r\,(s = 1, \ldots, e)$ のとき, 集合 $C^\alpha(\Delta)$ は C^r spline 全体の集合 $C^r(\Delta)$ に一致することに注意せよ.

また, $C^r(\Delta)$ と同様に, $C^\alpha(\Delta)$ の元を t 個の R の元の組として $F = (f_1, \ldots, f_t), f_i : F|_{\sigma_i} \in R$ と表すことができる. よって, $C^\alpha(\Delta)$ を R^t の部分集合と見なすことができる. さらに, $(f_1, \ldots, f_t), (g_1, \ldots, g_t) \in C^\alpha(\Delta)$, $g \in R$ に対して,

$$\begin{aligned}
(f_1, \ldots, f_t) + (g_1, \ldots, g_t) &= (f_1 + g_1, \ldots, f_t + g_t), \\
(f_1, \ldots, f_t) \cdot (g_1, \ldots, g_t) &= (f_1 g_1, \ldots, f_t g_t), \\
g \cdot (f_1, \ldots, f_t) &= (g f_1, \ldots, g f_t)
\end{aligned}$$

なる演算により $C^\alpha(\Delta)$ は環の構造をもち, さらに R^t の部分加群になる.

命題 2.4. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ に対して，$C^\alpha(\Delta)$ は階数 $t\,(= f_d(\Delta))$ のねじれのない有限生成 R 加群である．

証明 R がネター整域で，$C^\alpha(\Delta) \subset R^t$ であるので，$C^\alpha(\Delta)$ がねじれのない有限生成 R 加群であることは明らかである．q_s をイデアル $(\, l_s^{\alpha_s+1}\,)$ の任意の非零元とし，

$$q := \prod_{\tau_s \in \Delta_{d-1}^0} q_s$$

とする．qR^t の任意の元 $(qf_1, \ldots, qf_t)$ をとる．$\sigma_i \cap \sigma_j = \tau_s \in \Delta_{d-1}^0$ なる σ_i, $\sigma_j \in \Delta_d$ に対して，

$$qf_i - qf_j = q(f_i - f_j) \in (\, l_s^{\alpha_s+1}\,)$$

が成り立つので，$(qf_1, \ldots, qf_t) \in C^\alpha(\Delta)$ である．従って，$qR^t \subset C^\alpha(\Delta)$ である．よって，F を R の商体とすると，F 上のベクトル空間の単射

$$qR^t \otimes_R F \longrightarrow C^\alpha(\Delta) \otimes_R F,$$
$$C^\alpha(\Delta) \otimes_R F \longrightarrow R^t \otimes_R F$$

が存在する．

$$qR^t \otimes_R F \cong F^t, \quad R^t \otimes_R F \cong F^t$$

であるので，単射

$$F^t \longrightarrow C^\alpha(\Delta) \otimes_R F,$$
$$C^\alpha(\Delta) \otimes_R F \longrightarrow F^t$$

が存在する．よって，$\mathrm{rank} C^\alpha(\Delta) = \dim_F (C^\alpha(\Delta) \otimes_R F) = t$ である． ∎

さらに，$C^\alpha(\Delta)$ を自由 R 加群の間の写像の核と考えることもできる．

定義 2.5. $e \times (t+e)$ 行列 $A(\Delta, \alpha)$ を次のように定義する：

$$A(\Delta,\alpha) := \left(\begin{array}{c|ccc} & l_1^{\alpha_1+1} & & \\ \partial(\Delta) & & \ddots & \\ & & & l_e^{\alpha_e+1} \end{array} \right)$$

ここで，$\partial(\Delta)$ は，$\tau_s = \sigma_i \cap \sigma_j\ (\, i < j\,)$ のとき (s, k) 成分 $\partial(\Delta)_{sk}$ が

$$\partial(\Delta)_{sk} := \begin{cases} 1, & k = i \text{ のとき} \\ -1, & k = j \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

によって定義される $e \times t$ 行列である．

$M(\Delta,\alpha) := \ker(A(\Delta,\alpha))$ とすると，$M(\Delta,\alpha)$ は R^{t+e} の部分加群で，Δ_{d-1}^0 の順序付けには依存しない．

命題 2.6. Δ_d の元の順序付けを任意に固定する．このとき，$C^\alpha(\Delta)$ は R 加群として $M(\Delta,\alpha)$ と同型である．

証明　写像 $\psi : M(\Delta,\alpha) \longrightarrow C^\alpha(\Delta)$ を $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_t,\ldots,f_{t+e}) \in M(\Delta,\alpha)$ に対して $\psi(\mathbf{f}) = (f_1,\ldots,f_t)$ と定義する．$\mathbf{f} \in M(\Delta,\alpha)$ より $A(\Delta,\alpha)\mathbf{f} = \mathbf{0}$ であるので，$\tau_s = \sigma_i \cap \sigma_j$ $(\,i<j\,)$ のとき，s 番目の成分を比較すると

$$f_i - f_j + f_{t+s}\, l_s^{\alpha_s+1} = 0$$

となる．よって，$f_i - f_j \in (\, l_s^{\alpha_s+1}\,)$ となるので，$\psi(\mathbf{f}) = (f_1,\ldots,f_t) \in C^\alpha(\Delta)$ である．ψ が R 準同型であることは明らかである．また，任意の $(g_1,\ldots,g_t) \in C^\alpha(\Delta)$ に対して

$$g_i - g_j = g_{t+s}\, l_s^{\alpha_s+1}$$

なる $g_{t+s} \in R$ が存在するので，$\mathbf{g} = (g_1,\ldots,g_t,-g_{t+1},\ldots,-g_{t+e})$ とすると，$\mathbf{g} \in M(\Delta,\alpha)$ かつ $\psi(\mathbf{g}) = (g_1,\ldots,g_t)$ である．従って，ψ は全射である．また，$\mathbf{h} = (h_1,\ldots,h_{t+e}) \in \ker(\psi)$ とすると，$(h_1,\ldots,h_t) = (0,\ldots,0)$ になり，$A(\Delta,\alpha)\mathbf{h} = \mathbf{0}$ より $h_{t+s} = 0$ $(\,s = 1,\ldots,e\,)$ である．よって，ψ は単射でもある．以上より $M(\Delta,\alpha) \cong C^\alpha(\Delta)$ である．∎

この証明より，$C^\alpha(\Delta)$ の元は $M(\Delta,\alpha)$ の元を最初から t 個の成分に射影することによって得られるものである．従って，$\mathbf{g}_i = (g_{i_1},\ldots,g_{i_{t+e}})$ $(i=1,\ldots,m)$ が $M(\Delta,\alpha)$ の R 加群としての生成元であるとき，$\mathbf{g}_i' = (g_{i_1},\ldots,g_{i_t})$ $(i=1,\ldots,m)$ は $C^\alpha(\Delta)$ の R 加群としての生成元である．

例 2.7. 図 1 の単体的複体 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を考える．Δ_2 の元を

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &:= \mathrm{Conv}((1,0),\,(0,0),\,(0,1)),\\
\sigma_2 &:= \mathrm{Conv}((0,1),\,(0,0),\,(-1,0)),\\
\sigma_3 &:= \mathrm{Conv}((-1,0),\,(0,0),\,(0,-1)),\\
\sigma_4 &:= \mathrm{Conv}((0,-1),\,(0,0),\,(1,0))
\end{aligned}$$

と順序付け，Δ_1^0 の元を

$$\begin{aligned}
\tau_1 &:= \sigma_1 \cap \sigma_2, \quad \tau_2 := \sigma_2 \cap \sigma_3,\\
\tau_3 &:= \sigma_3 \cap \sigma_4, \quad \tau_4 := \sigma_1 \cap \sigma_4
\end{aligned}$$

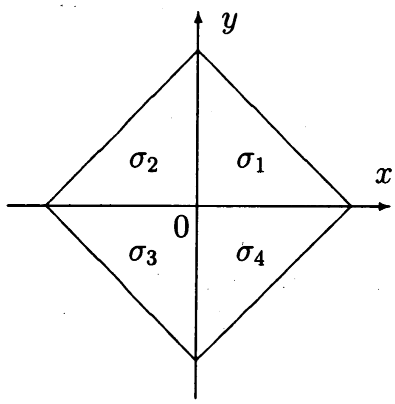

図 1:

と順序付ける．$\alpha = (1,2,3,4)$ とする．このとき，

$$A(\Delta,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & y^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & x^4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & y^5 \end{pmatrix}$$

となり，$M(\Delta,\alpha)$ の生成元として

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), \\ \mathbf{g}_2 &= (0, x^4, x^4, 0, x^2, 0, -1, 0), \\ \mathbf{g}_3 &= (y^5, y^5, 0, 0, 0, -y^2, 0, -1), \\ \mathbf{g}_4 &= (0, x^2y^3, 0, 0, y^3, -x^2, 0, 0) \end{aligned}$$

を得ることができる（これは *Macaulay* などで計算できる）．よって，$C^\alpha(\Delta)$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'_1 &= (1, 1, 1, 1), \\ \mathbf{g}'_2 &= (0, x^4, x^4, 0), \\ \mathbf{g}'_3 &= (y^5, y^5, 0, 0), \\ \mathbf{g}'_4 &= (0, x^2y^3, 0, 0) \end{aligned}$$

によって生成される．

整数 $k \geq 0$ に対して集合 $C_k^\alpha(\Delta)$ を

$$C_k^\alpha(\Delta) := \{(f_1, \ldots, f_t) \in C^\alpha(\Delta) : \deg f_i \leq k, i = 1, \ldots, t\}$$

と定義する．$C^\alpha_k(\Delta)$ は $C^\alpha(\Delta)$ の $\mathbb{R}$ 上の有限次元部分ベクトル空間である．このベクトル空間の次元や基底を組合せ論的に決定することはスプライン理論における重要な問題の一つである．実際には，ベクトル空間 $C^\alpha_k(\Delta)$ を研究する代わりに，このベクトル空間と同型で，しかも扱いやすい別のベクトル空間を研究することが多い．そこで，本節の残りは，ベクトル空間 $C^\alpha_k(\Delta)$ を研究する代わりにどのようなベクトル空間が考察されているかを説明する．

そのために，まず $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ に対して，次元 $d+1$ の単体的複体 $\widehat{\Delta} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ を次のように定義する．Δ を $\mathbb{R}^{d+1}$ の超平面 $x_{d+1}=1$ に埋め込み，原点を頂点とする Δ 上の錐を $\widehat{\Delta} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ とする．すなわち，$\widehat{\Delta}$ は複体 $\Delta \cup \{\widehat{\sigma} : \sigma \in \Delta\} \cup \{\mathbf{0}\}$ である．ここで，$\widehat{\sigma}$ は σ と $\mathbb{R}^{d+1}$ の原点 $\mathbf{0}$ との凸閉包を表す．このようにして $\widehat{\Delta} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ を定義すると，$\widehat{\Delta} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ は $\widehat{\Delta}$ とそのすべての link が pseudomanifold である $d+1$ 次元単体的複体になる．従って，$\widehat{\tau}_s$ に τ_s と同じ非負整数 α_s をあてがい，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ を構成することができる．このとき，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は 階数 $t\,(=f_{d+1}(\widehat{\Delta})=f_d(\Delta))$ のねじれのない有限生成 $\widehat{R}:=\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_{d+1}]$ 加群になる．一般に，この加群は $C^\alpha(\Delta)$ よりも扱いやすい．以下，その理由を説明する．まず次のような概念を定義しておく．

定義 2.8. Δ_d のすべての元に含まれる Δ の頂点 v が存在するとき，Δ は central であると言う．

この定義より，$\widehat{\Delta}$ は常に central である．

命題 2.9. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ が central であるとき，$C^\alpha(\Delta)$ は次数付 R 加群である．

証明　$v \in \Delta$ を Δ_d のすべての元に含まれる頂点とする．一般性を欠くことなく v が原点であると仮定してよい．$F=(f_1,\ldots,f_t) \in C^\alpha(\Delta)$ に対して，$F_k=(f_{1,k},\ldots,f_{t,k})$ を F の次数 k の斉次部分とする．$C^\alpha(\Delta)$ が次数付 R 加群であることを示すためには，$F_k \in C^\alpha(\Delta)$ であることを示せば十分である．$F \in C^\alpha(\Delta)$ より，$\sigma_i \cap \sigma_j = \tau_s \in \Delta^0_{d-1}$ なる $\sigma_i, \sigma_j \in \Delta_d$ に対して，$f_i - f_j \in (\,l_s^{\alpha_s+1}\,)$ となる．τ_s は v を含んでいるので，l_s は斉次多項式である．よって，$(\,l_s^{\alpha_s+1}\,)$ は斉次イデアルである．これより，$f_i - f_j$ のすべての斉次部分も $(\,l_s^{\alpha_s+1}\,)$ の元である．よって，$f_{i,k}-f_{j,k}=(f_i-f_j)_k \in (\,l_s^{\alpha_s+1}\,)$ となるので，$F_k \in C^\alpha(\Delta)$ である． ∎

この命題より，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は常に次数付 $\widehat{R}$ 加群になり，従って $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は $C^\alpha(\Delta)$ より扱いやすい．しかし，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ が研究されるのは，単に $C^\alpha(\Delta)$ より扱いやすいからだけではなく，次の命題 2.10 が述べているように，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ の次数 k の斉次部分

$$C^\alpha(\widehat{\Delta})_k := \left\{(f_1,\ldots,f_t) \in C^\alpha(\widehat{\Delta}) : \deg f_i = k,\ i=1,\ldots,t\right\}$$

が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として $C^\alpha_k(\Delta)$ と同型であるからである．

命題を証明するために，幾つか記号を定義しておく．$f \in R$ に対して f の斉次化 ${}^h f \in \widehat{R}$ を

$$ {}^h f(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) := x_{d+1}^{\partial f} f(x_1/x_{d+1}, \ldots, x_d/x_{d+1}) $$

によって定義する．ここで，∂f は f の総次数である．同様にして，$F = (f_1, \ldots, f_t) \in R^t$ の斉次化 ${}^h F \in \widehat{R}^t$ を

$$ {}^h F = {}^h(f_1, \ldots, f_t) := (\, x_{d+1}^{\partial F - \partial f_1}({}^h f_1), \ldots, x_{d+1}^{\partial F - \partial f_t}({}^h f_t)\,) $$

によって定義する．ここで，$\partial F := \max\{\partial f_1, \ldots, \partial f_t\}$ である．逆に，$h \in \widehat{R}$ に対して，$h(1) := h(x_1, \ldots, x_d, 1)$ とし，さらに $H = (h_1, \ldots, h_t) \in \widehat{R}^t$ に対して，$H(1) := (h_1(1), \ldots, h_t(1))$ とする．さらに，$l_{\tau_s} := {}^h l_s \in \widehat{R}$ を $\widehat{\tau}_s$ を含むアフィン超平面を定義する斉次一次多項式とする．

命題 2.10. $C_k^\alpha(\Delta)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ と同型である．

証明　二つのベクトル空間 $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$, $C_k^\alpha(\Delta)$ の間の写像

$$ \varphi:\ C^\alpha(\widehat{\Delta})_k \longrightarrow C_k^\alpha(\Delta) $$

を $\varphi(H) = H(1)$ によって定義する．この定義より，φ が $\mathbb{R}$ 線型写像になることは明らかである．

φ が well defined ：　$C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の任意の元 $H = (h_1, \ldots, h_t)$ があったとき，$\widehat{\sigma}_i \cap \widehat{\sigma}_j = \widehat{\tau}_s \in \widehat{\Delta}_d^0$ なる $\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_j \in \widehat{\Delta}_{d+1}$ に対して，$h_i - h_j \in (\,({}^h l_s)^{\alpha_s+1}\,)$ が成り立つ．このとき，

$$ h_i(1) - h_j(1) = (h_i - h_j)(1) \in (\, l_s^{\alpha_s+1}\,) $$

であるので，$H(1) \in C_k^\alpha(\Delta)$ である．従って，φ は well defined である．

φ が全射 ：　$C_k^\alpha(\Delta)$ の元 $F = (f_1, \ldots, f_t)$ に対して，$n := \max\{\deg f_1, \ldots, \deg f_t\}$ とする（$n \le k$ である）．このとき，${}^h F$ は $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ の斉次元で，各成分の総次数は n であるので，$x_{d+1}^{k-n}({}^h F) \in C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ となる．さらに，$(x_{d+1}^{k-n}({}^h F))(1) = F$ であるので，$\varphi(x_{d+1}^{k-n}({}^h F)) = F$ となる．従って，φ は全射である．

φ が単射 ：　$\varphi(H) = H(1) = (0, \ldots, 0)$ のとき，すべての i に対して $h_i(1) = 0$ である．従って，すべての i に対して h_i は $x_{d+1} - 1$ で割り切れる．一方，各 h_i は斉次多項式である．従って，すべての i に対して $h_i = 0$ でなければならない．よって，$H = (0, \ldots, 0)$ となり，φ が単射であることが従う． ∎

命題 2.9 より，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は次数付 $\widehat{R}$ 加群であるので，$C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ のほうが扱いやすく，しかも命題 2.10 より，$C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の次元や基底を計算したり組合せ論的に特徴付けたりすれば，それは $C_k^\alpha(\Delta)$ の次元や基底を計算したり組合せ論的に特徴付けたりすることになる．このことから，$C_k^\alpha(\Delta)$ を研究する代わりに $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ がよく研究されるのである．

3 加群におけるグレブナー基底と次元計算

本節では，グレブナー基底の理論を使って $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の次元や基底（従って，$C^\alpha_k(\Delta)$ の次元や基底）を計算する方法について述べる．そこで，R^t $(R := \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d])$ の部分加群に対するグレブナー基底の理論について少し触れておく．詳細については [5] を参照せよ．

R^t の単項式とは $m\mathbf{e}_i$（$m \in R$ は単項式で，$\mathbf{e}_i$ は R^t の標準基底ベクトルである）なる形の元である．R^t の単項式上の順序関係 $>$ が単項式順序であるとは，

(1) $>$ は全順序である；

(2) $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in R^t$ が $\mathbf{m} > \mathbf{n}$ を満たす単項式であるとき，R の任意の単項式 u に対して $u{\cdot}\mathbf{m} > u{\cdot}\mathbf{n}$ が成り立つ；

(3) $>$ は整列順序である

を満たすときに言う．最も一般的で有益な R^t 上の単項式順序は R 上の単項式順序を拡張することによって得られるものである．例えば，R 上の単項式順序 $>$ を一つ固定する．R^t の標準基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ の順序付けを固定する．このとき，

$$m\mathbf{e}_i >_{TOP} n\mathbf{e}_j \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} m > n \text{ または「} m = n \text{ かつ } \mathbf{e}_i > \mathbf{e}_j \text{」},$$
$$m\mathbf{e}_i >_{POT} n\mathbf{e}_j \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathbf{e}_i > \mathbf{e}_j \text{ または「} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \text{ かつ } m > n \text{」}$$

と定義すると，$>_{TOP}$, $>_{POT}$ はともに R^t 上の単項式順序である．

R^t 上の単項式順序 $>$ を一つ固定する．R^t の部分加群 M の元 $\mathbf{f} \neq 0$ に対して，$\mathbf{f}$ に現れる単項式のなかで $>$ に関して最大のものを $in_>(\mathbf{f})$ と表し，集合 $\{in_>(\mathbf{f}) : \mathbf{f} \in M\}$ によって生成される R^t の部分加群を $in_>(M)$ と表すことにする．M の有限集合 $G = \{\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_s\}$ が M の $>$ に対するグレブナー基底であるとは，

$$in_>(M) = (in_>(\mathbf{g}_1),\ldots,in_>(\mathbf{g}_s))$$

が成り立つときに言う．次の命題が，加群に対するグレブナー基底の理論と $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の次元計算との橋渡し役になる．

命題 3.1 ([12, Theorem 4.3])．M を R^t の部分加群とする（$t = 1$ のときはイデアルにすぎない）．R^t 上の単項式順序 $>$ を一つ固定する．$G = \{\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_s\}$ を M の有限集合とする．このとき，次の条件は同値である：

(1) G は M の $>$ に対するグレブナー基底である；

(2)　集合

$$\Gamma := \left\{ m\mathbf{g}_i : \begin{array}{l} m \in R \text{ は単項式で，任意の } j < i \text{ に対して} \\ in_>(\mathbf{g}_j) \text{ は } in_>(m\mathbf{g}_i) \text{ を割り切らない} \end{array} \right\}$$

は M の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての基底を成す．

以下，加群におけるグレブナー基底の理論を使って $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の次元や基底，すなわち $C^\alpha_k(\Delta)$ の次元や基底を計算する方法を説明する．$\widehat{R} := \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{d+1}]$, $t := f_d(\Delta) = f_{d+1}(\widehat{\Delta})$ とする．このとき，$\widehat{\Delta}$ は central であるので，命題 2.9 より $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は $\widehat{R}^t$ の次数付部分加群である．よって，$\widehat{R}^t$ 上の単項式順序を一つ固定し，固定した単項式順序に対する $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ のグレブナー基底 $G = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s\}$ を計算することができる（グレブナー基底を計算するためのブックバーガーのアルゴリズムについては [5] を参照せよ）．$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は次数付加群であるので，G の各元は斉次元であると仮定してもよい（$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ の生成集合として斉次元から成るものがとれ，そこからブックバーガーのアルゴリズムを使って計算したグレブナー基底は斉次元から成る）．このグレブナー基底 G から，命題 3.1 の (2) の集合 Γ を構成すると，集合 Γ の各元も斉次元である．このとき，整数 $k \geq 0$ に対して，

$$\Gamma_k := \{\mathbf{f} \in \Gamma : \deg \mathbf{f} = k\}$$

と定義すると，集合 Γ_k は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の基底を成す．（従って，

$$\Gamma_k(1) := \{\mathbf{f}(1) : \mathbf{f} \in \Gamma\}$$

は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての $C^\alpha_k(\Delta)$ の基底を成す．）

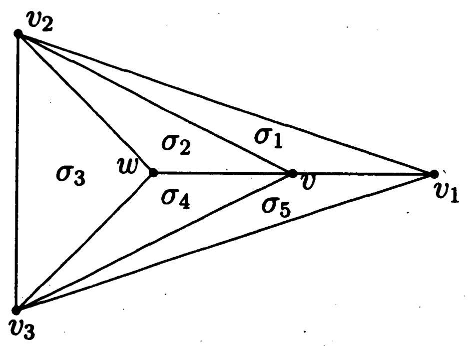

図 2:

例 3.2. 図 2 の単体的複体 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を考える．Δ_1^0 の元を

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= \sigma_1 \cap \sigma_2, \quad \tau_2 := \sigma_2 \cap \sigma_3, \\ \tau_3 &:= \sigma_3 \cap \sigma_4, \quad \tau_4 := \sigma_4 \cap \sigma_5, \\ \tau_5 &:= \sigma_2 \cap \sigma_4, \quad \tau_6 := \sigma_1 \cap \sigma_5 \end{aligned}$$

と順序付ける．また，v_1, v_2, v_3, w, v の座標をそれぞれ $(2,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(1,0)$ と定めておく．$\alpha = (1,1,1,1,0,1)$ とする．$\widehat{R} := \mathbb{R}[x,y,z]$ とすると，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は $\widehat{R}^5$ の部分加群である．$\widehat{R}^5$ の標準基底ベクトルを $\mathbf{e}_5 > \mathbf{e}_4 > \mathbf{e}_3 > \mathbf{e}_2 > \mathbf{e}_1$ と順序付け，$\widehat{R}^5$ の単項式順序として，$x > y > z$ から導かれる逆辞書式順序 $>_{rev}$ の TOP 拡張 $>$ を選ぶ．このとき，この単項式順序に対する $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ のグレブナー基底として，

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= (x^2y^2 + 4xy^3 + 4y^4 - 2xy^2z - 4y^3z + y^2z^2)\mathbf{e}_1, \\
\mathbf{g}_2 &= (-2xy^2 - 3y^3 + 4y^2z)\mathbf{e}_1 \\
&\quad + (x^2y + 2xy^2 + y^3 + \frac{1}{8}x^2z - \frac{3}{2}xyz + \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{4}xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 + \frac{1}{8}z^3)\mathbf{e}_2 \\
&\quad + (\frac{3}{8}x^2z - xyz + \frac{3}{4}y^2z - \frac{1}{4}xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 + \frac{1}{8}z^3)\mathbf{e}_3 \\
&\quad + (\frac{1}{8}x^2z - \frac{1}{2}xyz + \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{4}xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 + \frac{1}{8}z^3)\mathbf{e}_4, \\
\mathbf{g}_3 &= -4xy^2\mathbf{e}_1 - 4xy^2\mathbf{e}_2 + (x^2y - 2xy^2 + y^3)\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{g}_4 &= 4y^3\mathbf{e}_1 + 4y^3\mathbf{e}_2 + (x^3 - 3xy^2 + 2y^3)\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{g}_5 &= (-2xy^2 + 3y^3 + 4y^2z)\mathbf{e}_1 \\
&\quad + (-2xy^2 + 3y^3 - \frac{1}{8}x^2z - \frac{1}{2}xyz + \frac{7}{2}y^2z + \frac{1}{4}xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{8}z^3)\mathbf{e}_2 \\
&\quad + (-2xy^2 + 3y^3 - \frac{3}{8}x^2z - xyz + \frac{13}{4}y^2z + \frac{1}{4}xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{8}z^3)\mathbf{e}_3 \\
&\quad + (x^2y - 4xy^2 + 4y^3 - \frac{1}{8}x^2z - \frac{3}{2}xyz + \frac{7}{2}y^2z + \frac{1}{4}xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{8}z^3)\mathbf{e}_4, \\
\mathbf{g}_6 &= 28y^3\mathbf{e}_1 + (x^3 - 12xy^2 + 12y^3 - 3x^2z + 12y^2z + 3xz^2 - z^3)\mathbf{e}_2 \\
&\quad + (-9xy^2 + 14y^3 - 3x^2z + 12y^2z + 3xz^2 - z^3)\mathbf{e}_3 \\
&\quad + (x^3 - 12xy^2 + 16y^3 - 3x^2z + 12y^2z + 3xz^2 - z^3)\mathbf{e}_4, \\
\mathbf{g}_7 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5
\end{aligned}$$

が得られる（これは *Macaulay* を使って計算した）．このとき，

$$in_>(\mathbf{g}_1) = x^2y^2\mathbf{e}_1, \quad in_>(\mathbf{g}_2) = x^2y\mathbf{e}_2,$$

$$\begin{aligned} in_>(\mathbf{g}_3) &= x^2y\mathbf{e}_3, \quad in_>(\mathbf{g}_4) = x^3\mathbf{e}_3, \\ in_>(\mathbf{g}_5) &= x^2y\mathbf{e}_4, \quad in_>(\mathbf{g}_6) = x^3\mathbf{e}_4, \\ in_>(\mathbf{g}_7) &= \mathbf{e}_5 \end{aligned}$$

である．よって，$k = 0, 1, 2, 3$ のとき

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{\mathbf{g}_7\}, \\ \Gamma_1 &= \{x\mathbf{g}_7, y\mathbf{g}_7, z\mathbf{g}_7\}, \\ \Gamma_2 &= \{x^2\mathbf{g}_7, xy\mathbf{g}_7, y^2\mathbf{g}_7, xz\mathbf{g}_7, yz\mathbf{g}_7, z^2\mathbf{g}_7\}, \\ \Gamma_3 &= \{\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_6, x^3\mathbf{g}_7, x^2y\mathbf{g}_7, xy^2\mathbf{g}_7, \\ &\quad y^3\mathbf{g}_7, x^2z\mathbf{g}_7, xyz\mathbf{g}_7, y^2z\mathbf{g}_7, xz^2\mathbf{g}_7, yz^2\mathbf{g}_7, z^3\mathbf{g}_7\} \end{aligned}$$

となるので，$C^\alpha(\widehat{\Delta})_0$, $C^\alpha(\widehat{\Delta})_1$, $C^\alpha(\widehat{\Delta})_2$, $C^\alpha(\widehat{\Delta})_3$ の次元はそれぞれ 1, 3, 6, 15 である．同様にして考えると，$k \geq 0$ のとき

$$\dim_{\mathbb{R}} C^\alpha(\widehat{\Delta})_k = \binom{k+2}{2} + 3\cdot\binom{k-1}{2} + \binom{k-2}{2} + 2\cdot\binom{k-2}{1}$$

となる．

Geramita, Schenck [6] は $d = 2$ のとき，すなわち，$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ が Δ とそのすべての link が pseudomanifold である 2 次元単体的複体であるとき，十分大きな整数 $k \gg 0$ に対する $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の次元（すなわち $C^\alpha_k(\Delta)$ の次元）を与える組合せ論的な公式を得た．本節の残りは，Geramita, Schenck [6] の結果を紹介し，先ほどの例 3.2 に対して，グレブナー基底の手法による計算の結果と比べてみる．

$\hat{\tau}_j$ を含む平面を定義する斉次一次多項式を $l_{\tau_j} \in \widehat{R} := \mathbb{R}[x, y, z]$ とする．各内部頂点 $v_i \in \Delta_0^0$ に対して，集合

$$H_{v_i} := \{\, l_{\tau_j}^{\alpha_j+1} \,:\, \tau_j \in \Delta_1^0,\ v_i \in \tau_j \,\}$$

を考える．v_i を原点に平行移動してもよく，この集合の各元は $R := \mathbb{R}[x, y]$ の斉次一次多項式であると仮定してよいことに注意する．集合 H_{v_i} が生成する R のイデアルを $\mathcal{J}(v_i)$ と表すことにする．このとき，次の命題を使って H_{v_i} から余分な元を取り除くことによって $\mathcal{J}(v_i)$ の極小生成集合 $\{l_{\tau_{i_1}}^{\beta_{i_1}}, \ldots, l_{\tau_{i_{s_i}}}^{\beta_{i_{s_i}}}\}$ を得ることができる（ここで，$\beta_{i_j} := \alpha_{i_j} + 1$ である）．

命題 3.3 ([6, Corollary 2.5]). $h_1,\dots,h_s \in R$ を pairwise linearly independent な s 個の斉次一次多項式とし，$0 < c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_s$ を整数とする．このとき，$m \ge 2$ に対して

$$h_{m+1}^{c_{m+1}} \notin (h_1^{c_1},\dots,h_m^{c_m}) \iff c_{m+1} \le \frac{\sum_{p=1}^{m} c_p - m}{m-1}$$

である．

さらに，

$$\begin{aligned} \Omega_i &:= \left\lfloor \frac{\sum_{p=1}^{s_i} \beta_{i_p} - s_i}{s_i - 1} \right\rfloor + 1, \\ a_i &:= \sum_{p=1}^{s_i} \beta_{i_p} + (1 - s_i)\cdot \Omega_i, \\ b_i &:= s_i - 1 - a_i \end{aligned}$$

とおき，$\beta^i := (\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_{s_i}})$ とする．Geramita, Schenck [6] の結果は次のとおりである．

定理 3.4 ([6, Theorem 4.3]). $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を Δ とそのすべての link が pseudomanifold である 2 次元単体的複体とし，

$$\begin{aligned} &L(\Delta, \alpha, k) \\ &:= (f_2 - f_1^0 + f_0^0)\cdot \binom{k+2}{2} + \sum_{j=1}^{f_1^0} \binom{k+2-\alpha_j-1}{2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{f_0^0} \left\{ \sum_{\beta_{i_p}\in\beta^i} \binom{k+2-\beta_{i_p}}{2} - a_i \cdot \binom{k+2-\Omega_i-1}{2} - b_i \cdot \binom{k+2-\Omega_i}{2} \right\} \end{aligned}$$

とする．このとき，すべての整数 $k \ge 0$ に対して，$\dim_{\mathbb{R}} C^\alpha(\widehat{\Delta})_k \ge L(\Delta, \alpha, k)$ であり，十分大きな整数 $k \gg 0$ に対して

$$\dim_{\mathbb{R}} C^\alpha(\widehat{\Delta})_k = L(\Delta, \alpha, k)$$

が成り立つ．

例 3.2 と同じ単体的複体 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を考え，$\alpha = (1,1,1,1,0,1)$ とする．例 3.2 で計算したように，整数 $k \ge 0$ に対して

$$\dim_{\mathbb{R}} C^\alpha(\widehat{\Delta})_k = \binom{k+2}{2} + 3\cdot\binom{k-1}{2} + \binom{k-2}{2} + 2\cdot\binom{k-2}{1}$$

となる．一方，

$$\mathcal{J}(w) = \left(l_{\tau_5},\, l_{\tau_2}^2,\, l_{\tau_3}^2\right),$$
$$\mathcal{J}(v) = \left(l_{\tau_5},\, l_{\tau_1}^2,\, l_{\tau_4}^2,\, l_{\tau_6}^2\right)$$

であるので，命題 3.3 を適用すると，$\mathcal{J}(w)$, $\mathcal{J}(v)$ の極小生成集合として，たとえば $\{l_{\tau_5}, l_{\tau_2}^2\}, \{l_{\tau_5}, l_{\tau_1}^2\}$ をそれぞれ得ることができる．よって，いずれの場合も Ω_i, a_i, b_i の値はそれぞれ $2, 1, 0$ である．従って，

$$L(\Delta, \alpha, k) = \binom{k+2}{2} - \binom{k+1}{2} + 3\cdot\binom{k}{2} + 2\cdot\binom{k-1}{2}$$

となる．これより，$k=1$ のとき $\dim_{\mathbb{R}} C^\alpha(\widehat{\Delta})_1 = 3$, $L(\Delta, \alpha, 1) = 2$ であるので，$\dim_{\mathbb{R}} C^\alpha(\widehat{\Delta})_1 > L(\Delta, \alpha, 1)$ となる．$k=0$, $k \geq 2$ のときはグレブナー基底の手法を使った方法によって計算した $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の次元と $L(\Delta, \alpha, k)$ の値とが一致する．従って，この例に関しては $k \neq 1$ のときは $C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の次元を組合せ論的に求めることができる．

4 reduced basis と次元計算

本節では，reduced basis を使った次元計算の方法を概説する．$R := \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ とする．$\Delta \subset \mathbb{R}^d$ が central であるとき，命題 2.9 より $C^\alpha(\Delta)$ は次数付 R 加群である．よって，$C^\alpha(\Delta)$ が自由加群であるとき，(斉次元から成る) R 加群としての基底から $C_k^\alpha(\Delta)$ の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての基底を表すことは簡単で，従って，$C_k^\alpha(\Delta)$ の次元を容易に計算できる．

$C^\alpha(\Delta)$ が次数付加群でない場合に，上述の斉次元から成る基底に類似するような基底を考える．$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_t) \in R^t$ のとき，$\deg \mathbf{f}$ を $f_1, \ldots, f_t$ の総次数の最大値とする．

定義 4.1. 任意の自由 R 加群 $N \subset R^t$ に対して，$G = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n\}$ が N の reduced basis であるとは，G が N の R 加群としての基底で，N の任意の元 $\mathbf{f}$ が

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{g}_i, \quad a_i \in R,\ \deg(a_i \mathbf{g}_i) \leq \deg \mathbf{f} \quad (1 \leq i \leq n)$$

と表されるときに言う．

自由 R 加群 N が次数付加群であるとき，N の（斉次元から成る）R 加群としての基底は reduced basis になることに注意せよ．

次の命題は reduced basis を使って $N_k := \{\mathbf{f} \in N : \deg \mathbf{f} \leq k\}$ の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての基底を構成できることを述べている．

命題 4.2 ([4, Proposition 6.2])．階数 t の R 加群 $N \subset R^t$ があったとき，$G = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_t\}$ が N の reduced basis であるための必要十分条件は，各整数 $k \geq 0$ に対して，

$$G_k := \{u\mathbf{g}_i : 1 \leq i \leq t, u \in R \text{ は単項式で，} \deg(u\mathbf{g}_i) \leq k\}$$

が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての N_k の基底を成すことである．

この命題より，$C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群であるとき，$C^\alpha(\Delta)$ の reduced basis を求めることができれば，$C^\alpha_k(\Delta)$ の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての次元を決定することができる．

ここで，問題点が幾つかある．第一に，どのようなときに $C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群になるか，ということである．実は，$C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群になるための $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ や $\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}$ の組合せ論的特徴付けは一般には未解決で，この問題も $C^\alpha_k(\Delta)$ の次元や基底の組合せ論的特徴付けと同様，スプライン理論における重要な問題の一つである．一般の場合には完全には特徴付けられていないが，次の命題より，スプライン理論でよく研究される $d = 2$ の場合に関しては $C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群になることがわかる．

命題 4.3. $C^\alpha(\Delta)$ の射影次元は高々 $d-2$ である．

証明　命題 2.6 より $C^\alpha(\Delta) \cong M(\Delta, \alpha)$ である．$N(\Delta, \alpha) := \operatorname{coker}(A(\Delta, \alpha))$ とする（ $A(\Delta, \alpha)$ は第 2 節で定義した行列である）．このとき，

$$0 \to M(\Delta, \alpha) \to R^t \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^{e} R(-\alpha_i - 1)\right) \to R^e \to N(\Delta, \alpha) \to 0$$

なる完全系列を得る．ここで，$t = f_d(\Delta), e = f^0_{d-1}(\Delta)$ である．$M(\Delta, \alpha)$ は $N(\Delta, \alpha)$ の第 2 シチジー加群で，$N(\Delta, \alpha)$ の射影次元が高々 d であることから，$M(\Delta, \alpha)$ の射影次元は高々 $d-2$ である．よって，$C^\alpha(\Delta)$ の射影次元は高々 $d-2$ である．∎

この命題より，$d = 2$ のとき，$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ に対して $C^\alpha(\Delta)$ の射影次元は 0 である．よって，$C^\alpha(\Delta)$ は自由 R 加群になる．

また，d が 3 以上の場合についても，$C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群になるための十分条件となる Δ の特徴付けが得られている．これは，$C^r(\Delta)$ の場合に [8] で用いられる手法を使って証明されている．ここでは，その結果について紹介する．まず，次の概念を準備しておく．

定義 4.4. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ の双対グラフ G_Δ とは，Δ_d の元に対応する頂点と，隣接する d 面のペアに対応する辺を持つグラフのことである．

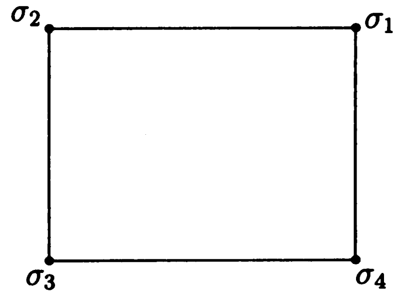

図 3:

たとえば，例 2.7 の単体的複体の双対グラフは図 3 のようになる．定義より，$\Delta \subset \mathbb{R}^d$ の双対グラフ G_Δ は連結である．

$\Delta \subset \mathbb{R}^d$ があったとき，Δ_{d-1}^0 の元を $\tau_1, \ldots, \tau_e$ $(e = f_{d-1}^0(\Delta))$ と順序付ける．さらに，Δ_d の元（つまり，G_Δ の頂点）を $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ $(t = f_d(\Delta))$ と順序付ける．この順序付けによって G_Δ の辺の向き付けが得られる．$e_i = e(\tau_i) = jk$ が G_Δ の頂点 σ_j から σ_k への有向辺であるとき，l_{e_i} を $\tau_i = \sigma_j \cap \sigma_k \in \Delta_{d-1}^0$ を含むアフィン超平面を定義する一次多項式とする．慣習により，逆の向き付けを持つ辺 $-e_i = -e(\tau_i) = kj$ に対して $l_{-e_i} = -l_{e_i}$ とする．$\mathcal{C}$ を G_Δ のサイクルの集合とする．

定義 4.5. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ に対して，R^e の部分加群 $B^\alpha(\Delta)$ を

$$B^\alpha(\Delta) := \left\{ (h_1, \ldots, h_e) \in R^e : \begin{array}{l} \text{任意のサイクル } c \in \mathcal{C} \text{ に対して} \\ \sum_{e_i \in c} h_i l_{e_i}^{\alpha_i + 1} = 0 \end{array} \right\}$$

によって定義する．

定理 4.6. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ に対して，$C^\alpha(\Delta)$ は R 加群として $B^\alpha(\Delta) \bigoplus R$ と同型である．

証明 任意の $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_t) \in C^\alpha(\Delta)$ と $\tau_i = \sigma_j \cap \sigma_k \in \Delta_{d-1}^0$ に対して，$f_j - f_k = h_i l_{e_i}^{\alpha_i+1}$ となる $h_i \in R$ が存在する．写像 $\varphi : C^\alpha(\Delta) \longrightarrow B^\alpha(\Delta) \bigoplus R$ を $\varphi(\mathbf{f}) = ((h_1, \ldots, h_e), f_1)$ によって定義する．G_Δ の各サイクル $c \in \mathcal{C}$ に対して，

$$\sum_{e_i \in c} h_i l_{e_i}^{\alpha_i+1} = \sum_{e_i \in c} (f_j - f_k) = 0$$

となる．よって，$(h_1,\dots,h_e) \in B^\alpha(\Delta)$ となるので，φ は well defined である．また，φ が R 準同型であることは容易に確かめることができる．

次に，φ が全射になることを示す．任意の $((g_1,\dots,g_e),f) \in B^\alpha(\Delta) \bigoplus R$ に対して，$f_1 := f$ とする．また，G_Δ は連結である．よって，各 $p\,(2 \le p \le t)$ に対して，頂点 σ_p から頂点 σ_1 への path E_p が存在する．このとき，

$$f_p := f_1 + \sum_{e_i \in E_p} g_i l_{e_i}^{\alpha_i+1}$$

と定義する．E'_p を σ_p から頂点 σ_1 への別の path とすると，$E_p \cup -E'_p$ は G_Δ のサイクルである．$(g_1,\dots,g_e) \in B^\alpha(\Delta)$ であるので，

$$\sum_{e_i \in E_p} g_i l_{e_i}^{\alpha_i+1} - \sum_{e_j \in E'_p} g_j l_{e_j}^{\alpha_j+1} = 0$$

となる．これより，f_p の定義は well defined であり，$\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_t)$ とすると，$\varphi(\mathbf{f}) = ((g_1,\dots,g_e),f)$ となる．従って，φ は全射である．

次に，φ が単射になることを示す．$\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_t) \in \ker\varphi$ とすると，$\varphi(\mathbf{f}) = ((0,\dots,0),0)$ となるので，$f_1 = 0$ である．σ_i が σ_1 と隣接しているとき，φ の定義より $f_i - f_1 = 0$ となるので，$f_i = 0$ である．G_Δ は連結であるので，これより，すべての $i\,(2 \le i \le t)$ に対して $f_i = 0$ となる．よって，$\mathbf{f} = \mathbf{0}$ となり，φ が単射になることが従う．

以上より，φ は R 加群としての同型写像になり，従って，$C^\alpha(\Delta) \cong B^\alpha(\Delta) \bigoplus R$ となる． ∎

この定理の系として，$C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群になるための十分条件となる Δ の特徴付けを得る．

系 4.7. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ の双対グラフ G_Δ が tree ならば，すべての $\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\ge 0}$ に対して，$C^\alpha(\Delta)$ は自由 R 加群になる．

証明　双対グラフ G_Δ が tree であるとき，G_Δ にはサイクルが存在しない．よって，$B^\alpha(\Delta) \cong R^e$ となり，定理 4.6 より $C^\alpha(\Delta)$ は自由 R 加群になる． ∎

このように，一般の場合，$C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群になるための $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ や $\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\ge 0}$ の組合せ論的特徴付けは完全には得られていないが，少なくとも，スプライン理論でよく研究される $d = 2$ の場合に関しては $C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群になることがわかっている．

第二の問題点は，$C^\alpha(\Delta)$ が自由 R 加群であっても $C^\alpha(\Delta)$ が reduced basis をもつとは限らない，ということである．そこで，どのようなときに reduced basis が存在するか，という点が問題になる．

定理 4.8. $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ と $\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}$ が与えられたとき，$C^\alpha(\Delta)$ が reduced basis を持つための必要十分条件は，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ が自由 $\widehat{R}$ 加群になることである．

証明 $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ が自由 $\widehat{R}$ 加群であると仮定する．$\Lambda = \{\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_t\}$ を $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ の $\widehat{R}$ 加群としての基底とする．但し，$t = f_{d+1}(\widehat{\Delta}) = f_d(\Delta)$ である．$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は次数付加群であるので，各 $\mathbf{h}_i$ は斉次元であることに注意せよ．$C^\alpha(\Delta)$ の任意の元 $\mathbf{f}$ に対して ${}^h\mathbf{f} \in C^\alpha(\widehat{\Delta})$ であるので，

$$ {}^h\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{t} a_i \mathbf{h}_i, \quad a_i \in \widehat{R},\ \deg(a_i \mathbf{h}_i) = \deg \mathbf{f} $$

と表すことができる．ここで，$x_{d+1} = 1$ とすると，$({}^h\mathbf{f})(1) = \mathbf{f}$ であるので，

$$ \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{t} a_i(1) \mathbf{h}_i(1) $$

となる．よって，$\Lambda(1) = \{\mathbf{h}_1(1), \ldots, \mathbf{h}_t(1)\}$ は R 加群として $C^\alpha(\Delta)$ を生成する．命題 2.4 より $t = \mathrm{rank} C^\alpha(\Delta)$ であるので，$\Lambda(1)$ は R 上線型独立である．従って，$\Lambda(1)$ は R 加群としての $C^\alpha(\Delta)$ の基底である．また，$\deg(a_i(1)\mathbf{h}_i(1)) \leq \deg(a_i \mathbf{h}_i) = \deg \mathbf{f}$ であるので，$\Lambda(1)$ は $C^\alpha(\Delta)$ の reduced basis である．

逆に，$C^\alpha(\Delta)$ が reduced basis を持つと仮定し，$G = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_t\}$ を $C^\alpha(\Delta)$ の reduced basis とする．$C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ の任意の元 $\mathbf{h}$ に対して，$\mathbf{h}(1) \in C^\alpha(\Delta)$, $\deg \mathbf{h}(1) =: n \leq k$ となる．G は $C^\alpha(\Delta)$ の reduced basis であるので，

$$ \mathbf{h}(1) = \sum_{i=1}^{t} a_i \mathbf{g}_i, \quad \deg(a_i \mathbf{g}_i) =: n_i \leq n $$

と表すことができる．すべての i に対して ${}^h\mathbf{g}_i \in C^\alpha(\widehat{\Delta})$, $\deg({}^h a_i {}^h\mathbf{g}_i) = n_i$ であるので，

$$ \mathbf{g} := \sum_{i=1}^{t} x_{d+1}^{k-n_i}\, {}^h a_i {}^h\mathbf{g}_i $$

とすると，$\mathbf{g} \in C^\alpha(\widehat{\Delta})_k$ である．$\mathbf{g}, \mathbf{h}$ はともに次数 k の斉次元で，$\mathbf{g}(1) = \sum_{i=1}^t a_i \mathbf{g}_i = \mathbf{h}(1)$ であるので，$\mathbf{g} = \mathbf{h}$ である．よって，$G^h := \{{}^h\mathbf{g}_1, \ldots, {}^h\mathbf{g}_t\}$ は $\widehat{R}$ 加群として $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ を生成する．さらに，$t = \mathrm{rank} C^\alpha(\widehat{\Delta})$ より，G^h は $\widehat{R}$ 上線型独立であるので，G^h は $\widehat{R}$ 加群としての $C^\alpha(\widehat{\Delta})$ の基底である． ∎

この定理より，reduced basis の存在という観点から，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ が自由 $\widehat{R}$ 加群になるための $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ や $\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}$ の組合せ論的特徴付けもスプライン理論における大変重要な問題であるということがわかる．

5 $C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ の自由性

本節では，$d=2$ の場合について $C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ の自由性を考える．$\widehat{R} := \mathbb{R}[x,y,z]$ とする．$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を円板の三角形分割としてよい（Δ が円板の三角形分割でないときは，任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^{e}_{\geq 0}$ に対して $C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ は自由 $\widehat{R}$ 加群にならないことがわかっている）．ここでは，$C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ の自由性に関する二つの結果を紹介する．一つは，すべての $\alpha \in \mathbb{Z}^{e}_{\geq 0}$ に対して $C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ が自由 $\widehat{R}$ 加群になるための必要十分条件となる $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ の特徴付けに関する結果であり，もう一つは，$\alpha \in \mathbb{Z}^{e}_{\geq 0}$ を少し制限した場合ではあるが，$C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ が自由 $\widehat{R}$ 加群になるか否かを組合せ論的に判定する方法に関する結果である．この二つの結果の証明については [7] を参照せよ．

辺 $\tau \in \Delta_1$ の両頂点がともに内部頂点であるとき，辺 τ は totally interior であると言う．$e := f_1^0(\Delta) = f_2^0(\widehat{\Delta})$ とする．

定理 5.1 ([7])．$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を円板の三角形分割とする．このとき，次の条件は同値である：

(1) すべての $\alpha \in \mathbb{Z}^{e}_{\geq 0}$ に対して $C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ は自由 $\widehat{R}$ 加群である；

(2) Δ が totally interior な辺を含まない．

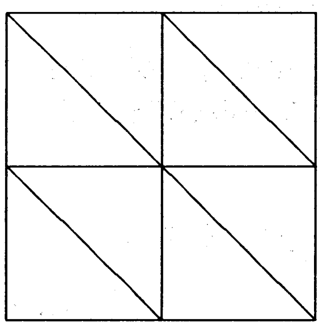

図 4:

例 5.2. $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を図 4 の単体的複体とする．Δ は totally interior な辺を含まないので，定理 5.1 より，すべての $\alpha \in \mathbb{Z}^{e}_{\geq 0}$ に対して $C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ は自由 $\widehat{R}$ 加群である．

次に，$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ が totally interior な辺をもつ円板の三角形分割である場合を考

$\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}$ が generic であるとは，同じ内部頂点を含む任意の二つの内部辺 $\tau_i, \tau_j \in \Delta^0_1$ に対して $\alpha_i \neq \alpha_j$ が成り立つときに言う．以下，$\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}$ は generic であると仮定する．$\hat{\tau}_i$ を含む平面を定義する斉次一次多項式を $l_{\tau_i} \in \hat{R}$ とする．各内部頂点 $v \in \Delta$ に対して，

$$H_v := \{l_{\tau_j}^{\alpha_j+1} : \tau_j \in \Delta^0_1,\, v \in \tau_j\}$$

とおき，

$$L_v := H_v \setminus \{l_{\tau_j}^{\alpha_j+1} \in H_v : l_{\tau_i} = l_{\tau_j},\, \alpha_i < \alpha_j,\, v \in \tau_i \text{ を満たす } \tau_i \in \Delta^0_1 \text{ が存在する }\}$$

とおく．さらに，totally interior な辺 $\tau_i \in \Delta^0_1$ と τ の頂点 $w \in \Delta^0_0$ に対して，

$$\begin{aligned} K_w^{(i)} &:= \{\tau_j \in \Delta^0_1 : l_{\tau_j}^{\alpha_j+1} \in L_w,\, \alpha_j < \alpha_i\}, \\ m_w^{(i)} &:= |K_w^{(i)}| \end{aligned}$$

とおく．

$\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}$ が generic であるとき，次の定理は $C^\alpha(\hat{\Delta})$ が自由 $\hat{R}$ 加群であるか否かを判定する組合せ論的な方法を与える．

定理 5.3 ([7])．$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を totally interior な辺を含む円板の三角形分割とする．generic な $\alpha \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}$ が与えられたとき，次の条件は同値である：

(a) $C^\alpha(\hat{\Delta})$ が自由 $\hat{R}$ 加群になる；

(b) 任意の totally interior な辺 $\tau_i \in \Delta^0_1$ に対して，τ_i の頂点 $w \in \Delta^0_0$ で次の条件 (1) または (2) を満たすものが存在する：

(1) $l_{\tau_i}^{\alpha_i+1} \notin L_w$ ；

(2) $l_{\tau_i}^{\alpha_i+1} \in L_w$，$m_w^{(i)} \geq 2$，かつ

$$\alpha_i + 1 > \frac{\displaystyle\sum_{\tau_j \in K_w^{(i)}} (\alpha_j + 1) - m_w^{(i)}}{m_w^{(i)} - 1}.$$

例 5.4. 図 2 の単体的複体 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を考える．τ_5 が totally interior な辺である．たとえば，$\alpha = (0, 0, 1, 1, 2, 3) \in \mathbb{Z}^6_{\geq 0}$ とする．このとき，α は generic である．この場合，

$$\begin{aligned} H_v &= \{l_{\tau_1}, l_{\tau_4}^2, l_{\tau_5}^3, l_{\tau_6}^4\}, \\ L_v &= \{l_{\tau_1}, l_{\tau_4}^2, l_{\tau_5}^3\}, \\ K_v^{(5)} &= \{\tau_1, \tau_4\} \end{aligned}$$

であり，さらに

$$2+1=3>\frac{(0+1)+(1+1)-2}{2-1}=1$$

が成り立つ．よって，定理 5.3 より，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ は自由 $\widehat{R}$ 加群になる．従って，定理 4.8 より $C^\alpha(\Delta)$ は reduced basis をもつ．実際，$C^\alpha(\widehat{\Delta})$ の基底として

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5,\\
\mathbf{g}_2 &= (x^3-2x^2y-4xy^2+8y^3-3x^2z+4xyz+4y^2z+3xz^2-2yz^2-z^3)\\
&\quad\cdot(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4),\\
\mathbf{g}_3 &= (x^3-x^2y-xy^2+y^3)\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{g}_4 &= (x^2y-4xy^2-12y^3-2xyz+4y^2z+yz^2)\mathbf{e}_2\\
&\quad+(-3x^2y+4xy^2-2xyz+4y^2z+yz^2)\mathbf{e}_3\\
&\quad+(x^2y-4xy^2+4y^3-2xyz+4y^2z+yz^2)\mathbf{e}_4,\\
\mathbf{g}_5 &= -y^4\mathbf{e}_1+(xy^3+y^4-y^3z)\mathbf{e}_2+(-\frac{1}{4}x^2yz+\frac{1}{2}xy^2z-\frac{1}{4}y^3z)\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

が得られる（ここで，$\mathbf{e}_i\ (i=1,\ldots,5)$ は R^5 の標準基底ベクトルである）ので，

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(1) &= \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5,\\
\mathbf{g}_2(1) &= (x^3-2x^2y-4xy^2+8y^3-3x^2+4xy+4y^2+3x-2y-1)\\
&\quad\cdot(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4),\\
\mathbf{g}_3(1) &= (x^3-x^2y-xy^2+y^3)\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{g}_4(1) &= (x^2y-4xy^2-12y^3-2xy+4y^2+y)\mathbf{e}_2\\
&\quad+(-3x^2y+4xy^2-2xy+4y^2+y)\mathbf{e}_3\\
&\quad+(x^2y-4xy^2+4y^3-2xy+4y^2+y)\mathbf{e}_4,\\
\mathbf{g}_5(1) &= -y^4\mathbf{e}_1+(xy^3+y^4-y^3)\mathbf{e}_2+(-\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{4}y^3)\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

は $C^\alpha(\Delta)$ の reduced basis である．

また，$\alpha=(0,2,3,2,1,4)\in\mathbb{Z}^6_{\geq 0}$ とするとき，頂点 v に対して

$$\begin{aligned}
H_v &= \{l_{\tau_1}, l^3_{\tau_4}, l^2_{\tau_5}, l^5_{\tau_6}\},\\
L_v &= \{l_{\tau_1}, l^3_{\tau_4}, l^2_{\tau_5}\},\\
K^{(5)}_v &= \{\tau_1\},
\end{aligned}$$

となり，頂点 w に対して

$$\begin{aligned}
H_w &= L_w=\{l^3_{\tau_2}, l^4_{\tau_3}, l^2_{\tau_5}\},\\
K^{(5)}_w &= \emptyset
\end{aligned}$$

となる．よって，この場合，定理 5.3 より，$C^{\alpha}(\widehat{\Delta})$ は自由 $\widehat{R}$ 加群にならない．従って，$C^{\alpha}(\Delta)$ は reduced basis をもたない．

参考文献

[1] L. Billera, *Homology of smooth splines : Generic triangulations and a conjecture of Strang*, Trans. AMS **310** (1988), 325 – 340.

[2] L. Billera, *The algebra of continuous piecewise polynomials*, Adv. in Math. **76** (1989), 170 – 183.

[3] L. Billera and L. Rose, *A dimension series for multivariate splines*, Discrete Comput. Geom. **6** (1991), 107 – 128.

[4] L. Billera and L. Rose, *Modules of piecewise polynomials and their freeness*, Math. Z. **209** (1992), 485 – 497.

[5] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1998 (大杉英史，北村知徳，日比孝之 訳，グレブナー基底 1・2，シュプリンガー・フェアラーク東京，2000).

[6] A. Geramita and H. Schenck, *Fat points, inverse systems, and piecewise polynomial functions*, J. Algebra **204** (1998), 116 – 128.

[7] T. Kitamura, *The freeness of modules of mixed splines*, Scientiae Mathematicae Japonicae, to appear.

[8] L. Rose, *Combinatorial and topological invariants of modules of piecewise polynomials*, Adv. in Math. **116** (1995), 34 – 45.

[9] H. Schenck, *A spectral sequence for splines*, Adv. in Appl. Math. **19** (1997), 183 – 199.

[10] H. Schenck and M. Stillman, *Local cohomology of bivariate splines*, J. Pure Appl. Algebra **117-118** (1997), 535 – 548.

[11] H. Schenck and M. Stillman, *A family of ideals of minimal regularity and the Hilbert series of $C^r(\widehat{\Delta})$*, Adv. in Appl. Math. **19** (1997), 169 – 182.

[12] B. Sturmfels and N. White, *Gröbner bases and invariant theory*, Adv. in Math. **76** (1989), 245 – 259.

Department of Mathematics
Graduate School of Science
Osaka University
Toyonaka, Osaka 560–0043, Japan
E-mail: sm5013kt@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp