数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 95-99

グラフのコホモロジー

大阪市立大学大学院理学研究科 前田 裕 (Maeda Hiroshi)
Graduate School of Science, Osaka City University

1 はじめに

GKM 多様体といわれる, n 次元トーラスの作用を持つ $2d$ 次元多様体 ($n \leq d$) から, d-正則グラフが得られる. このグラフには, Goresky-Kottwitz-MacPherson の定理 [1] により, (同変) コホモロジーを定義することができる. このグラフのコホモロジーについて考察する.

2 GKMグラフ

2.1 GKM 多様体

T を n 次元トーラス, $\mathfrak{t}$ をその Lie 代数とする. M をコンパクト $2d$ 次元多様体として, $\tau: T \times M \to M$ を T の M への忠実な作用とする.

Definition 2.1 ([3]). M が **GKM 多様体**とは, 次の性質を満たすことを言う:

1. M^T が有限集合.
2. M が T 不変概複素構造を持つ.
3. 任意の $p \in M^T$ に対して, T_pM 上の isotropy T 表現のウェイト

$$\alpha_{i_p} \in \mathfrak{t}^*, \quad i = 1, \ldots, d$$

は任意の二つを取ったとき一次独立になっている.

GKM 多様体の例としては, トーリック多様体や, ハミルトニアンな T 作用を持つシンプレクティック多様体がある.

上の条件は次のように言い換えられる. M を上の 1,2 の条件を満たす T 多様体とし, M の one-skeleton を集合 $\{p \in M \mid \dim T_p \geq n-1\}$ と定義する. このとき, 上の 3. の条件は次と同値である.

3' M の one-skeleton は, 固定点のない T 不変部分多様体と, ちょうど 2 つの固定点を持つ T 不変 2 次元球面からなる.

この one-skeleton の組み合わせ構造は, T 作用の固定点を頂点, T 不変 2 次元球面を辺とするようなグラフ Γ で与えられる.

この Γ は d-正則グラフであって, T の 1 次元 isotropy 表現によって辺にラベル付けを与える. すなわち, Γ の頂点 p を始点とするような向き付けられた辺 e に対して, T_pM の複素 1 次元表現への分解を

$$T_pM = \bigoplus T_p^{\alpha_{i,p}}$$

と表して, e に対応する S^2 を X_e とおけば, ある i に対して

$$T_pX_e = T_p^{\alpha_{i,p}}$$

となる. このとき e に対して $\alpha_{i,p} \in \mathfrak{t}^*$ を対応させる.

このような対応を

$$\alpha : E_\Gamma \to \mathfrak{t}^*$$

(ただし E_Γ は Γ の向き付けられた辺全体の集合) と表して **axial function** と呼ぶ.

こうして得られた, グラフ Γ と axial function α の組 (Γ, α) を **GKM グラフ**と呼ぶことにする.

また, $e \in E_\Gamma$ に対して, e に対応する 2 次元球面を X_e と書くと, M の接バンドルの X_e への制限は, 複素直線バンドルの直和に分解できる:

$$TM|_{X_e} \cong \bigoplus L_i.$$

このとき $p = i(e)$ を始点とする辺を e_i, $p' = t(e)$ を始点とする辺を e'_i として,

$$(L_i)_p = T_pX_{e_i}, (L'_i)_{p'} = T_{p'}X_{e'_i}$$

としてよい. したがって, 対応 $e_i \leftrightarrow e'_i, i = 1, \ldots, d$ により全単射

$$\theta_e : E_p \to E_{p'}$$

が得られる. これを e における**接続**といい, すべての $e \in E_\Gamma$ で与えられた接続をまとめて θ で表す.

以上のように GKM 多様体 M に対して定義される GKM グラフ (Γ, α, θ) に対して次の性質が成り立つ.

Theorem 2.2. 1. 任意の $p \in V_\Gamma$ に対し, $\{\alpha_e \mid e \in E_\Gamma\}$ は任意の二つを取ったとき一次独立になっている.

2. 任意の $e \in E_\Gamma$ に対し, $(\theta_e)^{-1} = \theta_{\bar{e}}$.
3. θ_e は e を $\bar{e}$ に移す.
4. $\alpha_{\bar{e}} = -\alpha_e$
5. $e \in E_\Gamma$ に対し, $p = i(e), p' = t(e)$ とし, $\theta_e : E_p \to E_{p'}$ により $e_i \leftrightarrow e'_i, i = 1, \ldots, d$ が対応しているとする. このとき,

$$\alpha_{e'_i} = \alpha_{e_i} + c_{i,e}\alpha_e, c_{i,e} \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ.

2.2 GKM 多様体の同変コホモロジー

M を T が作用している GKM 多様体とする. このとき定義より, 任意の T の余次元 1 の部分トーラス H に対して $\dim M^H \leq 2$ である. さらに, M^T は有限だから

$$H_T^*(M^T) = \bigoplus_{p \in M^T} H_T^*(\{p\}) = \bigoplus_{\# M^T} S(\mathfrak{t}^*) = \mathrm{Map}(V_\Gamma, S(\mathfrak{t}^*))$$

が成り立つ.

包含写像 $i : M^T \to M$ より誘導される同変コホモロジーの写像を

$$i^* : H_T^*(M) \to H_T^*(M^T)$$

とすると, この i^* の像について次の定理が成り立つ.

Theorem 2.3 ([1]).

$$\mathrm{Im}\, i^* = \{f : V_\Gamma \to S(\mathfrak{t}^*) \mid f(p) \equiv f(q) \bmod \alpha_e, \forall e \in E_\Gamma, p = i(e), q = t(e)\}.$$

この定理より

$$H_T^*(\Gamma) := \{f : V_\Gamma \to S(\mathfrak{t}^*) \mid f(p) \equiv f(q) \bmod \alpha_e, \forall e \in E_\Gamma\}$$

としてグラフの同変コホモロジーを定義すれば, $H_T^*(M) \cong H_T^*(\Gamma)$ であって, グラフの性質を調べることによって, M の同変コホモロジーがわかる.

2.3 抽象的 GKM グラフ

これまでの議論を踏まえて, 次のような定義を与える. $\mathfrak{t}^*$ を任意の n 次元ベクトル空間

Definition 2.4. **抽象的 GKM グラフ**とは, d-正則グラフ Γ, axial function $\alpha : E_\Gamma \to \mathfrak{t}^*$, 接続 θ の組で, 次の 3 つの条件を満たすもの.

A1 任意の $p \in V_\Gamma$ に対して, $\{\alpha_e \in \mathfrak{t}^* \mid e \in E_p\}$ は任意の二つを取ったとき一次独立になっている.

A2 任意の $e \in E_\Gamma$ に対して, $\alpha_{\bar{e}} = -\alpha_e$.

A3 任意の $e \in E_\Gamma$ に対して, $p = i(e), p' = t(e)$ として, $\theta_e : E_p \to E_{p'}$ によって e_i と $e'_i, i = 1, \ldots, d$ が対応しているとするとき,

$$\alpha_{e'_i} = \alpha_{e_i} + c_{i,e}\alpha_e,\ c_{i,e} \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ.

さらに, 抽象的 GKM グラフ (Γ, α, θ) の同変コホモロジーを

$$H_T^*(\Gamma) := \{f : V_\Gamma \to S(\mathfrak{t}^*) \mid f(p) \equiv f(q) \bmod \alpha_e, \forall e \in E_\Gamma\}$$

と定義する.

以下では抽象的 GKM グラフについて考えることにし, 抽象的 GKM グラフを GKM グラフと呼ぶことにする.

2.4 グラフの面

Definition 2.5. $n \geq 3$ とする. GKM グラフ (Γ, α, θ) が n-independent とは, Γ の各頂点 p での axial function の値を $\{\alpha_e\}_{e \in E_p}$ とすると, $\{\alpha_e\}_{e \in E_p}$ から任意の n 個を選んだとき, それらが一次独立になっていること.

d-正則グラフ Γ と, その上の axial function $\alpha : E_\Gamma \to \mathfrak{t}^*$ で 3-independent なものの組に対してある部分グラフを定義する.

Proposition 2.6. GKM グラフ (Γ, α, θ) が 3-independent であるとき, その接続は一意的.

Proof. 頂点 p, q を結ぶ辺を e とする. $e_i \in E_p,\ e_k \neq e,\ k = 1, \ldots, n-1$ に対して $e'_i \in E_q$ を選ぶとき GKM グラフの仮定より

$$\alpha_{e'_i} = \alpha_{e_i} + c_i\alpha_e, c_i \in \mathbb{Z}$$

が成り立っているように選ばなければならない．ここで，e'_i と異なる $e'_j \in E_q$ が存在して

$$\alpha_{e'_j} = \alpha_{e_i} + c_j\alpha_e, c_j \in \mathbb{Z}$$

が成り立っていると仮定すれば，$c_i \neq c_j$ であって，$\alpha_{e_i} = \alpha_{e'_i} - c_i\alpha_e = \alpha_{e'_j} - c_j\alpha_e$，すなわち，

$$\alpha_{e'_i} - \alpha_{e'_j} - ('c_i + c_j)\alpha_e = 0.$$

これは 3-independent であることに矛盾する．したがって接続は一意的． □

このことから，以下では GKM グラフの接続 θ を省略して (Γ, α) と書く．

Definition 2.7. 3-independent な GKM グラフ (Γ, α) の k-**面** F とは，Γ の k-正則連結部分グラフで，次の条件を満たすもの．

F の各頂点 p に対して，p に F の辺で隣り合うような任意の頂点を q とすると，p における F の辺の集合 E_{F_p} と，q における F の辺の集合 E_{F_q} は，(Γ, α) の接続によって 1 対 1 に対応している．

Proposition 2.6 により Definition 2.7 の F たちは頂点 $p \in V_\Gamma$ と k 個の辺 $e_i \in E_p$ を決めれば一意的に決まる．

Definition 2.8. GKM グラフ (Γ, α) の k-面 F に対して $\tau_F \in H_T^{2(d-k)}(\Gamma)$ を

$$\tau_F(q) = \begin{cases} \prod_{e \in E_q - E_{F_q}} \alpha_e & q \in V_F, \\ 0 & q \notin V_F, \end{cases}$$

と定義し，F の **Thom class** と呼ぶ．

ここで，とくに d-independent な d-正則 GKM グラフを考えると，次のことが成り立つ．

Proposition 2.9. $d \geq 3$ とし，(Γ, α) を d-independent な d-正則 GKM グラフとする．このとき，$H_T^*(\Gamma)$ は，$S(\mathfrak{t}^*)$ 加群として，Γ のすべての面の Thom class の集合 $\{\tau_F\}$ によって生成される．

参考文献

[1] M. Goresky, R. Kottwitz and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no.1, 25-83.

[2] V. Guillemin and S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer Verlag, Berlin 1999.

[3] V. Guillemin and C. Zara, *One-skeleta,Betti numbers and equivariant cohomology*, Duke Math. J. 107 (2001), no.2, 283-349.