数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 127-130

同変写像の像と不動点集合の関係について

大阪大学・理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Department of Mathematics
Osaka University

0. 序

S^n を $n+1$ 次元ユークリッド空間の単位球面とする. 古典的な Borsuk-Ulam の定理は次のように述べることができる.

定理. 連続写像 $f: S^n \to \mathbf{R}^n$ が $f(-x) = -f(x)$ をみたすとき, $f^{-1}(0) \neq \emptyset$.

S^n 上に次の $\mathbf{Z}_2$ 作用を考える,

$$T \cdot (x_0, \cdots, x_n) = (x_0, -x_1, \cdots, -x_n) \quad (T\text{は}\mathbf{Z}_2\text{の生成元}).$$

S^n 上にこの $\mathbf{Z}_2$ 作用を考えたものを $\bar{S}^n$ と書くことにする. 単に S^n と書いたときには, ことわらない限り S^n 上には対心点作用を考えているものとする. 次の命題は Borsuk-Ulam の定理から容易に導かれる.

命題. $f: S^n \to \bar{S}^n$ が同変写像であるとき, $f(S^n) \cap (\bar{S}^n)^{\mathbf{Z}_2} \neq \emptyset$.

この命題は次のように値域の多様体を変えても成り立つ(以下, 多様体と群の作用は全て smooth であると仮定している).

定理1. M を連結でコンパクトな n 次元 $\mathbf{Z}_2$ 多様体とし, $M^{\mathbf{Z}_2} \neq \emptyset$ とする. $f: S^n \to M$ が同変写像であるとき, $f(S^n) \cap M^{\mathbf{Z}_2} \neq \emptyset$.

有限群 G が S^n に自由に作用しているときも同様に次の定理が成り立つ.

定理2. M を連結でコンパクトな n 次元 G 多様体とし, M 上の G 作用は半自由で $M^G \neq \emptyset$ とする. $f: S^n \to M$ が同変写像であるとき, $f(S^n) \cap M^G \neq \emptyset$.

上の定理では定義域の球面の次元と値域の多様体の次元が同じ場合を考えた 定義域の球面の次元が値域の多様体の次元より高い場合には同様のことが成り立つことがわかる 定義域の球面の次元が値域の多様体の次元より低い場合には同様のことは成り立たない しかし, 例えば次のように不動点の次元と写像に条件をつけると同様のことが成り立つ.

定理**3.** M を連結でコンパクトな n 次元 $\mathbf{Z}_2$ 多様体とし, $M^{\mathbf{Z}_2} \neq \emptyset$ とする. C を $M^{\mathbf{Z}_2}$ の連結成分の一つとし, m を $m \geqq n - \dim C$ を満たす自然数とする. $f : S^m \to M$が同変写像であり, C 上の 1 点への定値写像に同変ホモトピックならば, $f(S^m) \cap C \neq \emptyset$.

p を奇素数とし, $S^{2n+1} = \{(z_0, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ 上に $\mathbf{Z}_p$ 作用を

$$k \cdot (z_0, \cdots, z_n) = (\xi^k z_0, , \cdots, \xi^k z_n) \quad (ここで\xi = e^{2\pi\sqrt{-1}/p}).$$

により定義する. このとき, 定理**3.** と同様に次の定理が成り立つ.

定理**4.** M を連結でコンパクトな n 次元 $\mathbf{Z}_p$ 多様体とし, $M^{\mathbf{Z}_p} \neq \emptyset$ とする. C を $M^{\mathbf{Z}_p}$ の連結成分の一つとし, m を $m \geqq n - \dim C$ を満たす奇数とする. $f : S^m \to M$が同変写像であり, C 上の 1 点への定値写像に同変ホモトピックならば, $f(S^m) \cap C \neq \emptyset$.

1. 定理1, 定理2の証明

定理1の証明. $\mathbf{Z}_2$ 写像 $f : S^n \to M$ で $f(S^n) \cap M^{\mathbf{Z}_2} = \emptyset$ をみたすものが存在したと仮定する $f(S^n)$ と $M^{\mathbf{Z}_2}$ はコンパクトなので, $M^{\mathbf{Z}_2}$ の $\mathbf{Z}_2$-不変な開近傍 U で $f(S^n) \cap U = \emptyset$ をみたすようなものが存在する.

U を十分小さくとっておけば $M - U$ は境界をもつ n 次元 $\mathbf{Z}_2$-多様体であり, $\mathbf{Z}_2$ は自由に作用している.

故に, $\mathbf{Z}_2$-写像 $g : M - U \to S^n$ が存在する. ここで S^n 上の $\mathbf{Z}_2$ 作用は対心点作用とする.

$g \circ f : S^n \to S^n$ は $\mathbf{Z}_2$-写像であり, $g \circ f$ の写像度は奇数である.

ところが, $H^n(M - U; \mathbf{Z})$ は 0 であり, したがって, $g \circ f$ の写像度も 0 になる これは矛盾である

故に, 全ての $\mathbf{Z}_2$-写像 $f : S^n \to M$ は $f(S^n) \cap M^{\mathbf{Z}_2} \neq \emptyset$ をみたす. □

定理2については, ある素数 p に対して, G の部分群で $\mathbf{Z}_p$ と同型なもの存在する. G の M 上の作用が半自由なので, $M^{\mathbf{Z}_p} = M^G$ である. あとは $\mathbf{Z}_p$-写像 $f : S^n \to S^n$ が $\deg f \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ を満たすことを使うと, 定理1 と同様にして証明することができる.

注意. 定理1, 定理2 は多様体に境界があっても成り立つ.

2. 値域の多様体の方が次元が大きい場合について

定義域の多様体の次元が値域の球面の次元より高い場合には不動点の余次元に条件をつけても定理1, 2 と同様のことは成り立たない. 例えば次のような例が挙げられる.

例. $f : S^n \to S^n \times S^1$ を $f(x_0, \cdots, x_n) = ((x_0, \cdots, x_n), (1, 0))$ により定義する. S^n 上には対心点作用, S^1 上には自明な作用を考えることにより, $S^n \times S^1$ 上に $\mathbf{Z}_2$-作用が考えられ, これにより, f は $\mathbf{Z}_2$-写像になる.

次に, $\{((1,0\cdots,0),(-1,0)),((-1,0\cdots,0),(-1,0))\}\subset S^n\times S^1$ の十分小さい近傍 U_1 を $\mathring{D}^{n+1}\times\mathbf{Z}_2$ と $\mathbf{Z}_2$-同相で $f(S^n)\cap U_1=\emptyset$ となるようにとることができる．ここで, $\mathring{D}^{n+1}$ 上には自明な作用を考え, $\mathbf{Z}_2$ 上には積による $\mathbf{Z}_2$-作用を与えることにより, $\mathring{D}^{n+1}\times\mathbf{Z}_2$ 上の $\mathbf{Z}_2$-作用を考えている.

S^{n+1} 上に

$$T\cdot(x_0,\cdots,x_{n+1})=(x_0,\cdots,x_n,-x_{n+1})\quad(T\text{は}\mathbf{Z}_2\text{の生成元})$$

により, $\mathbf{Z}_2$-作用を考え, この作用を考えた S^{n+1} を $\tilde{S}^{n+1}$ と書くことにする.

$\{(0\cdots,0,1),(0\cdots,0,-1)\}\subset\tilde{S}^{n+1}$ の十分小さい近傍 U_2 を $\mathring{D}^{n+1}\times\mathbf{Z}_2$ と $\mathbf{Z}_2$-同相になるようにとると, $S^n\times S^1-U_1$ の境界 $\partial(S^n\times S^1-U_1)$ と $\tilde{S}^{n+1}-U_2$ の境界 $\partial(\tilde{S}^{n+1}-U_2)$ は $\mathbf{Z}_2$-同相であり, $h\colon\partial(S^n\times S^1-U_1)\to\partial(\tilde{S}^{n+1}-U_2)$ を $\mathbf{Z}_2$-同相写像とする. $M=(S^n\times S^1-U_1)\cup_h(\tilde{S}^{n+1}-U_2)$ により, 新しく $\mathbf{Z}_2$-多様体 M を定義する. このとき, $\dim M^{\mathbf{Z}_2}=n$ であり, $i\colon S^n\times S^1-U_1\to M$ を包含写像とすると, $i\circ f\colon S^n\to M$ は $\mathbf{Z}_2$-写像で, $i\circ f(S^n)\cap M^{\mathbf{Z}_2}=\emptyset$ である.

そこで不動点の次元だけでなく写像のホモトピーに条件をつけて考える 定理3, 定理4の証明には同変障害理論を使う. まず, 次の命題が成り立つことに注意しよう.

命題2.1. E をファイバーの次元がk のベクトル・バンドルとする E が向きづけ可能であるとき

$$\pi_p(T(E))=\begin{cases}0 & \text{for } p<k,\\ \mathbf{Z} & \text{for } p=k.\end{cases}$$

また, E が向きづけ可能でないとき,

$$\pi_p(T(E))=\begin{cases}0 & \text{for } p<k,\\ \mathbf{Z}_2 & \text{for } p=k.\end{cases}$$

証明は Thom 同型と Hurewicz 同型定理を使えばできる ここでは, 省略する. 次に定理3 の状況の下で, ν を C の法束とし, $T(\nu)$ を ν の Thom 空間とする. このとき, $T(\nu)$ には自然に $\mathbf{Z}_2$ 作用が導かれる. ν のファイバーの次元をk とするとき, [1, p. 112] で定義された同変コホモロジー $\mathfrak{H}^k_{\mathbf{Z}_2}(S^k;\pi_k(T(\nu)))$ を法束が向き付け可能であるときと, 向き付け可能でないときにわけて計算すると以下のようになる.

命題2.2. C の法束 ν が向き付け可能であるとき, 向き付け可能でないときのいずれの場合にも

$$\mathfrak{H}^k_{\mathbf{Z}_2}(S^k;\pi_k(T(\nu)))\cong\mathbf{Z}_2.$$

ν が向き付け可能でないときには $\pi_k(T(\nu))$ 上の $\mathbf{Z}_2$-作用は自明であるが, ν が向き付け可能なとき, k が偶数のときには $\mathbf{Z}_2$ が自明に作用し, k が奇数のときには $\mathbf{Z}_2$ が自明でなく作用していることに注意しておこう.

定理3の証明. $m = n - \dim C$ の場合を示せば十分である. C の法束 ν は M における C のある $\mathbf{Z}_2$-不変近傍と $\mathbf{Z}_2$-同相になるので, ν を C の $\mathbf{Z}_2$-不変近傍と同一視する. このとき, $T(M)$ と $M/(M-\nu)$ は同相であり, これを同一視することにし, $p\colon M \to T(\nu)$ を射影とする.
$f\colon S^m \to M$ が定値写像 $g\colon S^m \to M$ にホモトピックであり, g の値は C 内にあるものとする. また, t_0 を $T(\nu) - \{t_0\} = \nu$ をみたす $T(\nu)$ の点とし, $h\colon S^m \to T(\nu)$ を t_0 への定値写像とする.
このとき, [1, p. 120] で定義している障害類 $\gamma(p \circ g, h) \in \mathfrak{H}^m_{\mathbf{Z}_2}(S^m; \pi_m(T(\nu)))$ は 0 にならず, したがって, h は $p \circ g$ と $\mathbf{Z}_2$-ホモトピックではない. $\mathbf{Z}_2$-写像 f が $f(S^m) \cap C = \emptyset$ をみたすならば, $p \circ f$ と h が $\mathbf{Z}_2$-ホモトピックになることは容易にわかり, したがって h と $p \circ g$ が $\mathbf{Z}_2$-ホモトピックとなり矛盾する. したがって, $f(S^m) \cap C \neq \emptyset$ である. □

注意. この証明と同様に障害理論を用いて, 序に書いた命題「$f : S^n \to \bar{S}^n$ が同変写像であるとき, $f(S^n) \cap (\bar{S}^n)^{\mathbf{Z}_2} \neq \emptyset$.」を直接証明することができる. $\bar{S}^n$ には２つ不動点があるので, 不動点への定値写像は２つあるがこれらは障害理論を用いるとホモトピー同値でないことが示される $f(S^n) \cap (\bar{S}^n)^{\mathbf{Z}_2} = \emptyset$ となる同変写像 $f\colon S^n \to \bar{S}^n$ が存在すれば f は２つの定値写像のいずれにもホモトピー同値となることがわかり矛盾が生じるので $f(S^n) \cap (\bar{S}^n)^{\mathbf{Z}_2} = \emptyset$ となる同変写像 $f\colon S^n \to \bar{S}^n$ は存在しない. また, この命題から Borsuk-Ulam の定理は容易に導かれ, Borsuk-Ulam の定理の証明を与えることができる.

定理4の証明については m を $m \geqq n - \dim C$ を満たす奇数とするとき, $n - \dim C$ は偶数であることから, $m \geqq n - \dim C + 1$ をみたしていることがわかる. また, C の法束 ν は向け付け可能であることに注意し,

$$\mathfrak{H}^k_{\mathbf{Z}_p}(S^{k+1}; \pi_k(T(N))) \cong \mathbf{Z}_p \quad (k = n - \dim C)$$

の元として定義される障害類を用いると定理３と同様にして証明できる.

参考文献.

[1] T. tom Dieck, Transformation groups, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987