数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 25-27

2次元球面のGottlieb群

大阪大学・理　井上　明 (Akira Inoue)

§0　ファイバーがFであるファイブレイションとファイバー写像fに対して, 包含写像$i: F\rightarrow E$がホモトピー左逆写像を持つとき, $G_n^f(E,F)$は$G_n^f(F,F)\oplus\pi_n(B)$に等しい事が[5]で示されている. ここでは, 切断$s: B\rightarrow E$を持つファイブレーション$F\rightarrow E\rightarrow B$に対し, $G_n^{sop}(E,E)$は$G_{n+1}^R(p)\oplus G_n(B)$に同型である事を示し, これにより, 2次元球面のGottlieb群を計算する.

§1　すべての空間は連結有限CW複体とし, すべての空間対はCW対とする. x_0をXとその部分空間の基点とし, X^AでAからXへの写像空間を表す. また, ωでX^XまたはX^AからXへの基点x_0での評価写像を表す. そうして$G_n(X)$を$G_n(X)=\{[h]\in\pi_n(X)\mid[H|_{x_0\times I^n}]=[h],\ H|_{X\times\partial I^n}=id_X$なる$H: X\times I^n\rightarrow X$が存在する.$\}$と定義する. これは$\omega_\#:\pi_n(X^X,id_X)\rightarrow\pi_n(X,x_0)$の像に等しい. また, 写像$f:(A,a_0)\rightarrow(X,x_0)$に対して$G_n^f(X,A)$を$G_n^f(X,A)=\{[h]\in\pi_n(X)\mid[H|_{x_0\times I^n}]=[h], H|_{A\times\partial I^n}=f$なる$H: X\times I^n\rightarrow X$が存在する.$\}$と定義する. これは$\omega_\#:\pi_n(X^A,f)\rightarrow\pi_n(X,x_0)$の像に等しい. 特に, 包含写像$i: A\rightarrow X$に対して, $G_n^i(X,A)$を$G_n(X,A)$と書く. また一般に$G_n(X)\subset G_n^f(X,A)$が成り立つ. 次に, $G_n^{Rel}(X,A)$を$\pi_n(X,A)$の部分群として, $G_n^{Rel}(X,A)=\{[h]\in\pi_n(X,A)\mid[H|_{x_0\times I^n}]=[h],\ H|_{X\times J^{n-1}}=id_X$なる$H:(X\times I^n, A\times\partial I^n)\rightarrow(X,A)$が存在する.$\}$と定義し, 対の自己写像$f:(X,A)\rightarrow(X,A)$に対して$G_n^{Rel}(f)$を$G_n^{Rel}(f)=\{[h]\in\pi_n(X,A)\mid[H|_{x_0\times I^n}]=[h],\ H|_{X\times J^{n-1}}=f$なる$H:(X\times I^n,A\times\partial I^n)\rightarrow(X,A)$が存在する.$\}$と定義する. これらもまた, $G_n^{Rel}(X,A)=\omega_\#(\pi_n(X^A,A^A,i))$, $G_n^{Rel}(f)=\omega_\#(\pi_n(X^A,A^A,f))$となる.

写像fのホモトピー群$\pi_n(f)=\{[(\alpha_1,\alpha_2)]\mid(\alpha_1,\alpha_2):\pi_n\rightarrow f\}$が定義される.[3] ここで, CS^{n-1}は約錐であり, $i_n: S^{n-1}\rightarrow CS^{n-1}$は標準的な包含写像である. また, $F_1: A\times S^{n-1}\rightarrow A$, $F_2: A\times CS^{n-1}\rightarrow X$が$F_1|_{a_0\times S^{n-1}}=\alpha_1$, $F_1|_{A\times s_0}=id$, $F_2|_{a_0\times CS^{n-1}}=\alpha_2$, $F_2|_{A\times s_0}=f$を満たし, さらに, 次の可換図式,

$$\begin{array}{ccc} A\times S^{n-1} & \xrightarrow{F_1} & A \\ \downarrow{\scriptstyle id\times i_n} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X\times CS^{n-1} & \xrightarrow{F_2} & X \end{array}$$

を満たす, (F_1,F_2)を(α_1,α_2)の提携写像と言う. ここでa_0はAの, s_0はS^{n-1}と

CS^{n-1} の基点を表す．そうして $\pi_n(f)$ の部分群 $G_n^R(f)$ を $G_n^R(f) = \{[(\alpha_1, \alpha_2)] \in \pi_n(f) \mid (\alpha_1, \alpha_2)$ の提携写像 (F_1, F_2) が存在する.$\}$ と定義する.

§2　包含写像 $i : A \to X$ がホモトピー右逆写像を持つとき次のことが言える.

定理 1. (X, A) を CW 対とする. 包含写像 $i : A \to X$ がホモトピー右逆写像 r を持つ, すなわち, $i \circ r$ が恒等写像 id_X にホモトピックであるとき, $G_n^{r\circ i}(A, A)$ は $G_{n+1}^{Rel}(X, A) \oplus G_n(X, A)$ に同型である.

次に写像 $f : A \to X$ がホモトピー右逆写像 h を持つときを考える. f の写像柱を Z_f とすると, A から Z_f の包含写像はホモトピー右逆写像を持つ. したがって, $G_n^f(X, A)$ と $G_n(Z_f, A)$, $G_n^R(f)$ と $G_n^{Rel}(Z_f, A)$ とがそれぞれ同型になる [6] と言うことに注意しこれに定理 1 を適用すると次が得られる.

定理 2. 写像 $f : A \to X$ がホモトピー右逆写像 h を持つ, すなわち, $h \circ f$ が恒等写像 id_X にホモトピックであるとき, $G_n^{h\circ f}(A, A)$ は $G_{n+1}^R(f) \oplus G_n^f(X, A)$ に同型である.

そうして, 切断を持つファイブレーションに対し, これを適用して, $G_n^p(B, E) = G_n(B)$ となる事より, 次を得る.

定理 3. $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ を切断 $s : B \to E$ を持つファイブレーションとすると, $G_n^{s\circ p}(E, E)$ は $G_{n+1}^R(p) \oplus G_n(B)$ に同型である.

§3　最後に, 2 次元球面の Gottlieb 群の計算をしておく. その前に以下の計算で用いる補題 [4] を 1 つの述べておく.

補題 4. 写像 $f : X \to Y$ に対して, $F\,|_{Y\vee X} = id_Y \vee f$ となる写像 $F : Y \times X \to Y$ が存在するならば, $f_\#(\pi_n(X)) = G_n(X)$ となる.

Hopf ファイブレーション $S^1 \to S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ とこれに同伴するファイバーが S^3 である S^1 バンドル

$$S^3 \to S^3 \times_{S^1} S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

を考える. $G_1(S^3) = 0$ よりこのバンドルは切断を持つ [2]. 故に, 定理 3 より

$$G_n^{s\circ p}(S^3 \times_{S^1} S^3, S^3 \times_{S^1} S^3) \cong G_{n+1}^R(p) \oplus G_n(S^2) \tag{1}$$

今 S^1 は $S^3 \times_{S^1} S^3$ に $e^{i\theta}(z, w) = (ze^{-i\theta}, e^{i\theta}w)$(ここで $e^{i\theta} \in S^1, (z, w) \in S^3 \times S^3$ とし, z, w は大きさが 1 の 4 元数とみて, 右辺の $ze^{-i\theta}, e^{i\theta}w$ は 4 元数の積とみなす) と自由に作用するから $S^1 \to S^3 \times S^3 \xrightarrow{q} S^3 \times_{S^1} S^3$ は主バンドルとなり, ファイバーホモトピー完全系列から $i \geq 3$ に対して,

$$\pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3) \cong \pi_i(S^3 \times S^3)$$

また, $F:(S^3\times_{S^1}S^3)\times(S^3\times S^3)\to(S^3\times_{S^1}S^3)$ を $F(([z,w]),(t,u))=[tz,wu]$ とすると, $F\mid_{(S^3\times_{S^1}S^3)\vee(S^3\times S^3)}= id\vee q$. 故に補題 4 より, $q_*:\pi_n(S^3\times S^3)\to G_n(S^3\times_{S^1}S^3)$ は全射. また主 S^1 バンドル q のファイバーホモトピー完全系列を考えると, $i\geq 3$ に対して $q_*:\pi_i(S^3\times S^3)\to\pi_i(S^3\times_{S^1}S^3)$ は同型となるから, $i\geq 3$ に対して

$$G_i(S^3\times_{S^1}S^3)=\pi_i(S^3\times_{S^1}S^3)$$

一般に $G_n(S^3\times_{S^1}S^3)\subset G_n^{sop}(S^3\times_{S^1}S^3,S^3\times_{S^1}S^3)\subset\pi_n(S^3\times_{S^1}S^3)$ となるから, $i\geq 3$ に対して $G_i^{sop}(S^3\times_{S^1}S^3,S^3\times_{S^1}S^3)=\pi_i(S^3\times_{S^1}S^3)=\pi_i(S^3\times S^3)$ が言える. すると,(1) と $G_{n+1}^R(p)\subset\pi_n(S^3), G_n(S^3)\subset\pi_n(S^3)$ から,

$$G_i(S^2)\cong\pi_i(S^3)$$

を得る.

参考文献

[1] D.H.Gottlieb,*A certain subgroup of the fundamental group*,Amer.J.Math.87 (1965),840-856

[2] —,*Evaluation subgroups of homotopy groups*,Amer.J.Math.91(1969),729-756

[3] P.Hilton,*Homotopy theory and duality*,Thomas Nelson and Sons LTD,1965

[4] G.E.Lang,Jr.,*Evaluation subgroups of factor spaces*,Pacific J.Math.42(1972), 701-709

[5] M.H.Woo,*$G(f)$-sequence and fibrations*,Comm.Korean Math.Soc.12(1997),709-715

[6] J.Pan,X.Shen and M.H.Woo,*The G-sequence of a map and its exactness*,J.Korean Math.Soc.35(1998),281-294