数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 28-30

Small Cover と凸多面体の彩色

大阪市立大学　　西村　保三 (Yasuzo Nishimura)
Osaka City University

本稿では、Davis-Januszkiewicz [1] によって定義された Small Cover の幾何的性質と、組み合わせ論の対象である凸多面体の彩色との関連、特に凸多面体上の Small Cover の存在性と向き付け可能性について考察する。

群 $\mathbf{Z}_2=\{-1, 1\}$ は $\mathbf{R}$ 上に標準的に作用し、その軌道空間は半直線 $\mathbf{R}_+$、射影 $\pi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$はノルムで与えられる。この n 直積、すなわち実線形空間 $\mathbf{R}^n$ 上の標準的$(\mathbf{Z}_2)^n$ 作用と射影 $\pi:\mathbf{R}^n\to(\mathbf{R}_+)^n$ を "線形モデル" と呼ぶ。

定義 1．P は n 次元単純凸多面体とする。n 次元多様体 M が P 上 Small Cover であるとは、線形モデルと局所的に同型な$(\mathbf{Z}_2)^n$ 作用があり (すなわち各点 $x\in$M について、不変近傍 V$\subset$M, W$\subset\mathbf{R}^n$ と同変同相写像f:V$\to$W が存在する)、軌道空間が P と同相のときをいう。また P 上の二つの Small Cover M_1 と M_2 は、同変同相写像f: $M_1\to M_2$が存在する時に同型という。

例 1．$S^1\subset\mathbf{C}$ を複素平面内の単位円、S^1 上 $\mathbf{Z}_2$ 作用を$(-1)\cdot z=\bar{z}$とおくと、射影 $\pi:S^1\to I=[-1, 1]$ は、$\pi(z)=\mathrm{Re}\ z$ で与えられる。その n 直積 $\pi:T^n=(S^1)^n\to I^n$ により、n 次元トーラス T^n は、n 次元キューブ I^n 上 Small Cover である。

例 2．$(\mathbf{Z}_2)^n=(\mathbf{Z}_2)^{n+1}/\{(g,\cdots,g)|\ g\in\mathbf{Z}_2\}$の同一視により、$n$+1 次元線形モデルの商空間として、実射影空間 $\mathbf{RP}^n=(\mathbf{R}^{n+1})/\mathbf{Z}_2$ 上に$(\mathbf{Z}_2)^n$ 作用が定義される。これは n 次元単体 Δ^n 上の Small Cover である。

注意．複素線形空間 $\mathbf{C}^n$ 上標準的 $T^n=(S^1)^n$ 作用を複素線形モデルとよび、局所的に複素線形モデルと同型なトーラス作用がある P 上の $2n$ 次元多様体は"擬トーリック多様体"と呼ばれる。擬トーリック多様体と Small Cover は、多くの部分で平行な議論が可能である。

P, Q を単純凸多面体、π: M$\to$P を P 上の Small Cover 、f: Q$\to$P を Q の k 次元の面を P の k 次元の面に移すような連続写像とする。"引き戻し" f^*M は、自然に Q 上の Small Cover の構造を持つ。

単純凸多面体Pの余次元1の面（facetという）の集合を$\mathcal{F}$で表す。Pの双対グラフK_Pは$\mathcal{F}$を頂点集合とする単体的グラフである。P上のSmall Cover Mは、Pの面彩色（双対グラフK_Pの点彩色）$\lambda:\mathcal{F}\to(\mathbf{Z}_2)^n$を以下のように定義し、Mの表現写像という。

一般に面$F\subset P$に対し、$x\in\pi^{-1}(\mathrm{int}\ F)$の固定部分群は$x$の取り方に依らず、これを$G_F$で表す。特にFをfacetとする時、$G_F$はランク1の部分群であり、その生成元を対応させる写像を、$\lambda:\mathcal{F}\to(\mathbf{Z}_2)^n$とする。この時、$l$個のfacetの交わり$F=F_1\cap\cdots\cap F_l$で表される余次元$l$の面Fに関する固定部分群$G_F$は、$\lambda(F_1),\cdots,\lambda(F_l)$で生成される部分群であるから、表現写像$\lambda:\mathcal{F}\to(\mathbf{Z}_2)^n$は以下の条件（*）を満たすPの面彩色（または双対グラフK_Pの点彩色）である。

(*) $F=F_1\cap\cdots\cap F_l$が余次元lの面の時、$\lambda(F_1),\cdots,\lambda(F_l)$は一次独立

条件(*)を満たすようなPの面彩色（またはK_Pの点彩色）を“一次独立な彩色”と呼ぶことにする。逆に、単純凸多面体Pと一次独立な彩色$\lambda:\mathcal{F}\to(\mathbf{Z}_2)^n$の組が与えられた時、表現写像が$\lambda$と一致するP上のSmall Cover $M(P,\lambda)$を以下のように構成することができる。

$$M(P,\lambda):=P\times(\mathbf{Z}_2)^n/\sim\quad (p,g)\sim(p',g')\Leftrightarrow p=p'\ \text{かつ}\ g^{-1}g'\in G_F\ (\mathrm{int}\ F\ni p)$$

定理1. (Davis－Januszkiewicz) n次元単純凸多面体P上のSmall Coverは、P上の一次独立な彩色$\lambda:\mathcal{F}\to(\mathbf{Z}_2)^n$によって分類される。

例1．(n=2の時) 2次元単純凸多面体P（およびK_P）は、m角形である。その上の表現写像$\lambda:\mathcal{F}\to(\mathbf{Z}_2)^2$は、互いに一次独立な3つのベクトル(1,0), (0,1), (1,1)への対応で、λは通常の意味の3色による彩色と同じである。mが奇数の時は、m角形の彩色は3色必要で、対応するSmall Coverは$M(\lambda)=(m-2)\,\mathbf{R}P^2$である（$k\mathbf{R}P^2$は、k個の$\mathbf{R}P^2$の連結和）。$m$が偶数なら、$m$角形は2彩色可能であり、その場合は対応するSmall Coverは向き付け可能曲面$M(\lambda)=(m-2)/2\cdot T^2$、3彩色されている場合は$M(\lambda)=(m-2)\,\mathbf{R}P^2$である。

例2．（線形モデルの引き戻し）n次元単純凸多面体Pがn彩色されている時、表現写像$\lambda:\mathcal{F}\to(\mathbf{Z}_2)^2$の像は、ある基底と考えることが出来る。この時、対応するSmall Coverは“線形モデルの引き戻し”である。すなわち面を保つ連続写像$f:P\to(\mathbf{R}_+)^n$が存在してMは$f^*(\mathbf{R}^n)$と同型である。特にn=3の時、3次元単純凸多面体Pが3彩色可能、すなわちP上に線形モデルの引き戻しが存在する必要十分条件は、組み合わせ論の古典的結果より、Pの全ての面が偶数角形であることである。

与えられた単純凸多面体Pに対して、その上のSmall Coverの存在性について、その向き付け可能性も考慮して論じる。まず4次元以上の場合には、P上に必ずしもSmall Coverが存在しないことを注意しておく。

事実. $n \geqq 4$ の時、その上には Small Cover が存在しないような n 次元単純凸多面体 P が存在する。

例. $k \geqq n+1$ を任意の数とする。曲線 $\gamma(t)=(t, t^2, t^3, \cdots, t^n) \subset \mathbf{R}^n$ 上の k 点を頂点とする凸多面体を考えると、$n \geqq 4$ の時は常に完全グラフになることが知られている。従ってこれの双対多面体 P の彩色には k 色必要であり、$k > 2^n$ とすると、彩色 $\lambda: \mathcal{F} \to (\mathbf{Z}_2)^n$ は存在しない。

Small Cover の向き付け可能性は、次の定理で判定できる。

定理２. Small Cover M(P, λ) が向き付け可能である必要十分条件は、適当な基底 $e_1, \ldots, e_n \in (\mathbf{Z}_2)^n$ を固定し、$\varepsilon(e_i)=1$ で決まる準同型写像を $\varepsilon: (\mathbf{Z}_2)^n \to \mathbf{Z}_2 = \{0,1\}$ とおいた時、$\varepsilon\lambda \equiv 1$ となることである。

定理２の条件を満たす彩色を"向き付け可能な彩色"と呼ぶことにする。例えば、$n=3$ の時、向き付け可能な彩色は、（適当な基底変換で）$e_1, e_2, e_3, e_1+e_2+e_3$ の４色による彩色である。この４色の任意の３色は一次独立なので、彩色は一次独立性を考慮しない通常の意味での４彩色と同じであり、「任意の平面グラフは４彩色可能」という有名な四色定理（[2]参照）により、次の系が得られる。

系. 任意の３次元単純凸多面体 P 上に、向き付け可能な Small Cover が存在する。

さらに発展して、大阪市立大学大学院生の中山央士氏は、この系で４彩色された３次元単純凸多面体 P から（四面体以外の時）、彩色の一次独立性を保持したまま、いくつかの面をうまく塗り替えて、向き付け不可能な彩色が構成できることを示した。

定理３. 四面体以外の任意の３次元単純凸多面体 P 上に、向き付け不可能な Small Cover が存在する。

参考文献

[1] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifold, and Torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417-451.

[2] K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 711-712.