数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 37-50

Loewnerの予想に関連するある予想

安藤 直也 (Naoya ANDO)
東京都立大学大学院理学研究科数学教室
(Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University)

0 はじめに

曲面上の孤立臍点の指数は1以下なのではないかという指数予想がしられている. さらに指数予想を一部分として含む Loewner の予想がしられている. 本講演の目的は指数予想をやはり一部分として含むがしかしながら Loewner の予想とは異なる予想について説明することである.

1 分布

S を滑らかな二次元多様体とし, U を S の開集合とする. このとき U の各点にその点での接平面の一次元部分空間一つを対応させるもののことを U 上の 分布 (distribution) という. U 上の分布 $\mathcal{D}$ が 連続である (continuous) とは, U の各点 p のある近傍 O_p 上連続かつ p で零ではないベクトル場 $\mathbf{V}_p$ が存在して O_p 上 $\mathbf{V}_p \in \mathcal{D}$ がなりたつときにいう. p_0 は $S \setminus U$ の点で, p_0 の S におけるある近傍 O_{p_0} が $O_{p_0} \setminus \{p_0\} \subset U$ をみたすものとする. このとき U 上の連続分布 $\mathcal{D}$ を p_0 まで連続に延長することはできない (すなわち p_0 は $\mathcal{D}$ の孤立特異点である) 可能性がある. (x, y) は p_0 の近傍上の局所座標系で, p_0 が $(0,0)$ に対応するものとする. また r_0 は正の実数で, $\{0 < x^2 + y^2 < r_0^2\}$ が U に含まれるものとする. また $\phi_{\mathcal{D};p_0}$ は $(0, r_0) \times \mathbf{R}$ 上の連続関数で, 任意の $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \mathbf{R}$ に対し点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で

$$\cos\phi_{\mathcal{D};p_0}(r,\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi_{\mathcal{D};p_0}(r,\theta)\frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{D}$$

がなりたつものとする. また $\phi_{\mathcal{D};p_0}$ のような連続関数全体からなる集合を $\Phi_{\mathcal{D};p_0}$ で表す. このとき分布 $\mathcal{D}$ についての p_0 の 指数 (index) $\mathrm{ind}_{p_0}(\mathcal{D})$ は次のように定義される:

$$\mathrm{ind}_{p_0}(\mathcal{D}) := \frac{\phi_{\mathcal{D};p_0}(r, \theta + 2\pi) - \phi_{\mathcal{D};p_0}(r,\theta)}{2\pi}. \tag{1}$$

指数はある整数の半分と表されることがわかる. (1) における指数の定義は $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \mathbf{R}$ の選び方にも連続関数 $\phi_{\mathcal{D};p_0} \in \Phi_{\mathcal{D};p_0}$ の選び方にも局所座標系 (x, y) の選び方にもよらない. S を連結, コンパクトかつむきづけ可能とし, $S \setminus U$ は有限集合であるものとする.

このとき Hopf-Poincaré の定理によると, $\mathfrak{D}$ についての $S \setminus U$ の全ての元の指数の和は S の Euler 数に等しい ([Ho, pp. 113]).

孤立特異点を有する連続分布の具体例を一つあげる. 正の整数 $n \in \mathbf{N}$ に対し, $\mathbf{R}^2$ 上の連続なベクトル場 $\mathbf{V}^{(\pm n)}$ を次のように定める:

$$\mathbf{V}^{(\pm n)} := \mathrm{Re}\{(x+\sqrt{-1}y)^n\}\frac{\partial}{\partial x} \pm \mathrm{Im}\{(x+\sqrt{-1}y)^n\}\frac{\partial}{\partial y}.$$

例えば, $\mathbf{V}^{(\pm 1)} = x\partial/\partial x \pm y\partial/\partial y$ である. $\mathbf{V}^{(\pm n)}$ は $\mathbf{R}^2$ 上 $(0,0)$ でのみ零となる. $\mathbf{V}^{(\pm n)}$ が $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上定義する連続分布を $\mathfrak{D}^{(\pm n)}$ で表す. このとき $(0,r_0) \times \mathbf{R}$ 上の連続関数 $\phi_{\mathfrak{D}^{(\pm n)};(0,0)} \in \Phi_{\mathfrak{D}^{(\pm n)};(0,0)}$ として, 任意の $(r,\theta) \in (0,r_0) \times \mathbf{R}$ に対し $\phi_{\mathfrak{D}^{(\pm n)};(0,0)}(r,\theta) = \pm n\theta$ がなりたつようなものをみいだすことができる. よって(1) から, $\mathrm{ind}_{(0,0)}(\mathfrak{D}^{(\pm n)}) = \pm n$ をえる.

上述の例においては, 指数は整数であった. しかしながら連続分布の選び方によっては, 整数ではない (つまり $\pm 1/2$, $\pm 3/2$, ... のように表される) 指数をもつ孤立特異点が存在することもある ([Ho, pp. 109] にあげてある図をみていただきたい).

2 曲面上の孤立臍点の指数

2-1 定義

S を $\mathbf{R}^3$ にうめこまれた曲面とする. p を S の一点とし, $T_p(S)$ を p での S への接平面とする. $P^\perp$ を p での S への法平面とし, $\kappa_p(P^\perp)$ を $P^\perp \cap S$ に含まれる曲線の p での曲率とする. 法平面 $P^\perp$ を連続的に動かすときそれに応じて $\kappa_p(P^\perp)$ も連続的に変化する, すなわち κ_p は $P^\perp$ の連続関数である. κ_p の極値を S の p での <u>主曲率 (principal curvature)</u> といい, 主曲率を与える法平面と $T_p(S)$ の共通部分を S の p での <u>主方向 (principal direction)</u> という. κ_p が定数であるとき, p を <u>臍点 (umbilical point)</u> という. κ_p が定数ではないとき, p での主方向はちょうど二つ存在してそれらは互いに直交している. W を S の Weingarten 写像 (型作用素) とし, S の各点 p に対し W が $T_p(S)$ に与える一次変換を W_p で表す. このとき p での主曲率とはちょうど W_p の固有値のことであり, p での主方向とはちょうど W_p の一次元固有空間のことである. 特に, S の点 p が臍点であるということはちょうど W_p が恒等写像の定数倍と表されるということである. $K(p) := \det(\mathrm{W}_p)$ を S の p での <u>Gauss 曲率 (Gaussian curvature)</u> といい, $H(p) := \mathrm{tr}(\mathrm{W}_p)/2$ を S の p での <u>平均曲率 (mean curvature)</u> という. Gauss 曲率と平均曲率の間に関数関係が存在するとき, つまりある滑らかな関数 w が存在して S 上 $w(K,H) \equiv 0$ がなりたつとき, S を <u>Weingarten 曲面</u> という.

Sの臍点全体からなる集合を$\mathrm{Umb}(S)$で表す. もし$S=\mathrm{Umb}(S)$がなりたつ (すなわちSが全臍的である)ならば, Sの各連結成分は平面または球面の一部である. もし$S\neq\mathrm{Umb}(S)$がなりたつならば, $S\setminus\mathrm{Umb}(S)$上の連続分布で$S\setminus\mathrm{Umb}(S)$の各点で主方向の一つを与えるようなものが存在する. このような分布のことをS上の主分布 (principal distribution) とよぶ. p_0をSの孤立臍点とする, つまりp_0は臍点でありかつSにおけるp_0のある近傍にはp_0以外に臍点が存在しないものとする. このとき二つの主分布についてのp_0の指数は互いに等しいが, この共通の数をS上でのp_0の指数 (index) といい$\mathrm{ind}_{p_0}(S)$で表す.

2-2 平均曲率一定曲面

Sを三次元空間形の連結な平均曲率一定曲面とする. このときS上のHopf微分は(等温座標系からえられる複素座標に関して)正則である. Sの臍点はちょうどHopf微分の零点であるから, Sが全臍的ではないときSの各臍点は孤立していることがわかる. Sは全臍的ではないものとし, Sの臍点p_0でのHopf微分の位数を$\mathrm{ord}_{p_0}(S)$で表す. このときp_0の指数は$-\mathrm{ord}_{p_0}(S)/2$で与えられる ([Ho, pp. 139]).

2-3 特別な Weingarten 曲面

$\mathbf{R}^3$のWeingarten曲面Sが特別である (special)とは, Gauss曲率と平均曲率の間の関数関係を与えるwとして次の条件をみたすものをみいだすことができるときにいう: $\mathrm{Umb}(S)$の各点で,

$$H\frac{\partial w}{\partial X}(K,H)+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial Y}(K,H)\neq 0$$

がなりたつ. 例えば, 平均曲率一定曲面は特別なWeingarten曲面である. (x,y,z)は$\mathbf{R}^3$上の直交座標系で, $(0,0,0)$がSの臍点p_0に相当しかつxy平面がp_0でSに接するものとする. このときxy平面における$(0,0)$の近傍上定義された滑らかな関数fが存在して, そのグラフはSにおけるp_0の近傍となる. Sが特別なWeingarten曲面であるとき, fは$(0,0)$のある近傍上二階の楕円型偏微分方程式をみたす. このことを用いて, Hartman-WintnerはSが全臍的ではない連結かつ特別なWeingarten曲面であるときSの各臍点は孤立していてかつその指数は負であることを示した ([HW]). Hartman-Wintnerのこの結果とHopf-Poincaréの定理を用いて, コンパクトむきづけ可能かつ種数が0の特別なWeingarten曲面は球面に限ることがわかり, またコンパクトむきづけ可能かつ種数が1の特別なWeingarten曲面には臍点が存在しないことがわかる.

2-4 二変数同次多項式のグラフ

著者は二変数同次多項式のグラフが $\mathbf{R}^3$ の原点 o を孤立臍点として有するとき o の周りでの主分布のふるまいを調べた．g をそのような同次多項式とし，各実数 $\theta \in \mathbf{R}$ に対し $\tilde{g}(\theta) := g(\cos\theta, \sin\theta)$ とおく．そして $d\tilde{g}/d\theta = 0$ の解全体からなる集合を R_g で表す．このとき点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で位置ベクトル場 $x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ が g のグラフ G_g の主方向に含まれることと $x\sin\theta_0 = y\cos\theta_0$ なる実数 θ_0 が R_g の元であることは同値である ([A1])．そこで著者は位置ベクトル場と関連づけて主分布のふるまいを調べることにした．$R_g = \mathbf{R}$ であるならば，$\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g) = 1$ がなりたつ．以下 $R_g \neq \mathbf{R}$ を仮定する．

r_0 は正の実数で，g を $\{0 < x^2 + y^2 < r_0^2\}$ に制限したもののグラフ上臍点は存在しないものとする．また r は $(0, r_0)$ の元とする．R_g の元 θ_0 に対し，ϕ_{r,θ_0} は $\mathbf{R}$ 上の実数値をとる連続関数で $\phi_{r,\theta_0}(\theta_0) = \theta_0$ をみたしかつ任意の実数 θ に対し点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ での G_g への接ベクトル $(\cos\phi_{r,\theta_0}(\theta))\partial/\partial x + (\sin\phi_{r,\theta_0}(\theta))\partial/\partial y$ が主方向に含まれるようなものとする．また R_g の元 θ_0 に対し，U_{θ_0} は θ_0 の $\mathbf{R}$ における近傍で $U_{\theta_0} \cap R_g = \{\theta_0\}$ をみたすものとする．このとき R_g の元 θ_0 の符号 (sign) が正 (および負) であるとは，$U_{\theta_0} \setminus \{\theta_0\}$ の任意の元 θ に対し

$$(\theta - \phi_{r,\theta_0}(\theta))(\theta - \theta_0) > 0 \ (\text{および} < 0)$$

がなりたつときにいうことにする．R_g の元の符号の定義は $r \in (0, r_0)$ の選び方にはよらない．R_g の元 θ_0 が (o の指数に) 関係がある (related) (および関係がない (non-related)) とは，θ_0 の符号が正または負である (および正でも負でもない) ときにいうことにする．R_g の元 θ_0 が関係があることと $\tilde{g}$ が θ_0 で極値をとることは同値である ([A1])．R_g の元 θ_0 の臨界符号 (critical sign) が

(a) 正であるとは，$\tilde{g}(\theta_0) = 0$ であるか $\tilde{g}(\theta_0)$ が正かつ極大値であるかまたは $\tilde{g}(\theta_0)$ が負かつ極小値であるときにいい，

(b) 負であるとは，$\tilde{g}(\theta_0)$ が負かつ極大値であるかまたは $\tilde{g}(\theta_0)$ が正かつ極小値であるときにいう

ことにする．R_g の元 θ_0 が関係があることと θ_0 の臨界符号が正または負であることは同値である．R_g の関係がある元 θ_0 の符号と臨界符号について次の二つがなりたつ: θ_0 の臨界符号が正であるならば，θ_0 の符号も正である ([A1], [A2]); θ_0 の臨界符号が負であるとき，θ_0 の符号が正 (および負) であることと

$$\frac{d^2\tilde{g}}{d\theta^2}(\theta_0)\Big/\tilde{g}(\theta_0)\in[k(k-2),\infty)\ (\text{および}\ [0,k(k-2)))$$

がなりたつことは同値である ([A2]). θ_0 が R_g の元であるとき, 任意の整数 n に対し $\theta_0+n\pi$ も R_g の元である. さらに θ_0 が関係があることと $\theta_0+n\pi$ が関係があることは同値である. また θ_0 が関係があるとき, θ_0 の符号および臨界符号はそれぞれ $\theta_0+n\pi$ の符号および臨界符号に等しい. 実数 $\theta\in\mathbf{R}$ を任意に選び, $N_{g,+}$ (および $N_{g,-}$) を $[\theta,\theta+\pi)$ の中の R_g の関係がある元でその符号が正 (および負) であるものの個数とする. $N_{g,+}$ と $N_{g,-}$ は $\theta\in\mathbf{R}$ の選び方にはよらない. G_g 上での o の指数 $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g)$ は $1-(N_{g,+}-N_{g,-})/2$ と表される ([A1]). θ_1, θ_2 は R_g の関係がある元で, $\theta_1<\theta_2$ でありかつ開区間 (θ_1,θ_2) には R_g の関係がある元が存在しないものとする. このとき θ_1 の臨界符号または θ_2 の臨界符号は正である. よって θ_1 の符号または θ_2 の符号は正であることがわかる. このことを用いて, $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g)\leqq 1$ がわかる. さらに $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g)\in\{1-k/2+i\}_{i=0}^{[k/2]}$ がなりたつ ([A1]).

2-5 実解析的な曲面

実解析的な曲面上の孤立臍点 p_0 の周りでの主分布のふるまいをしるために, p_0 での法平面と曲面の共通部分にそって p_0 に近づいていったときの主分布の極限の性質を調べた. F は $\mathbf{R}^2$ における $(0,0)$ の連結な近傍上定義された実解析的な関数で,

$$F(0,0)=\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$$

がなりたちかつ $\mathbf{R}^3$ の原点 o が F のグラフ G_F の臍点であるものとする. このとき実数 $a_F\in\mathbf{R}$ が存在して次がなりたつ:

$$F(x,y)=a_F\big(x^2+y^2\big)/2+o\big(x^2+y^2\big).$$

$\mathbf{R}^2$ における $(0,0)$ の近傍上の関数 σ_F を次のように定義する:

$$\sigma_F:=\begin{cases}0 & (a_F=0\text{である場合}),\\ \dfrac{1}{a_F}-\dfrac{|a_F|}{a_F}\sqrt{\dfrac{1}{a_F^2}-(x^2+y^2)} & (a_F\neq 0\text{である場合}).\end{cases}$$

このとき G_F が全臍的ではないならば, $F\not\equiv\sigma_F$ でありかつ 3 以上の整数 $k_F\geqq 3$ および次数 k_F の恒等的に零ではない二変数同次多項式 g_F が存在して $F-\sigma_F-g_F$ の $(0,0)$ における偏微分係数で k_F 以下の階数のものが全て零となる:

$$F-\sigma_F=g_F+o\Big(\big(x^2+y^2\big)^{k_F/2}\Big).$$

g を次数が3以上の二変数同次多項式とし, Hess_g を g の Hessian とする. η_g は $\mathbf{R}$ 上の連続関数で, 任意の実数 θ に対しベクトル ${}^t(\cos\eta_g(\theta), \sin\eta_g(\theta))$ が $\mathrm{Hess}_g(\cos\theta, \sin\theta)$ の固有ベクトルであるようなものとする. また実数 θ_0 で $\mathrm{Hess}_g(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ が単位行列の定数倍と表されるようなもの全体からなる集合を S_g で表す. このとき実解析的な関数 F に対し G_F が全臍的ではなくそして $S_{g_F} = \emptyset$ であるならば, F と g_F のそれぞれのグラフ上において o は孤立臍点である ([A4]).

G_F 上 o は孤立臍点であるものとする. r_0 は正の実数で, $\{0 < x^2+y^2 < r_0^2\}$ には G_F の臍点は存在しないものとする. また ϕ_F は $(0, r_0)\times\mathbf{R}$ 上の連続関数で, 任意の $(r,\theta) \in (0, r_0)\times\mathbf{R}$ に対し点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ での接ベクトル $(\cos\phi_F(r,\theta))\partial/\partial x + (\sin\phi_F(r,\theta))\partial/\partial y$ が G_F の主方向に含まれるものとする. このとき実数 θ_0 に対し, 次の (a), (b) がなりたつ ([A4]):

(a) 実数 $\phi_{F,o}(\theta_0)$ が存在して

- (i) $\lim_{r\to 0}\phi_F(r,\theta_0) = \phi_{F,o}(\theta_0)$ がなりたち,
- (ii) ${}^t(\cos\phi_{F,o}(\theta_0), \sin\phi_{F,o}(\theta_0))$ は $\mathrm{Hess}_{g_F}(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ の固有ベクトルである;

(b) 二つの実数 $\phi_{F,o}(\theta_0+0)$, $\phi_{F,o}(\theta_0-0)$ が存在して

- (i) $\lim_{\theta\to\theta_0\pm 0}\phi_{F,o}(\theta) = \phi_{F,o}(\theta_0\pm 0)$ がなりたち,
- (ii) $\Gamma_{F,o}(\theta_0) := \phi_{F,o}(\theta_0+0) - \phi_{F,o}(\theta_0-0)$ は $\{n\pi/2\}_{n\in\mathbf{Z}}$ の元である.

そして指数 $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F)$ は次のように表される:

$$\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F) = \frac{\eta_{g_F}(\theta+2\pi) - \eta_{g_F}(\theta)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{\theta_0\in S_{g_F}\cap[\theta,\theta+2\pi)}\Gamma_{F,o}(\theta_0)$$

([A4]). よって特に, F と g_F のそれぞれのグラフ上において o が孤立臍点でありかつ $S_{g_F} = \emptyset$ であるならば, 次がなりたつことがわかる:

$$\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F) = \mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_{g_F}) = \frac{\eta_{g_F}(\theta+2\pi) - \eta_{g_F}(\theta)}{2\pi}.$$

二変数同次多項式 g からえられる量 $\{\eta_g(\theta+2\pi) - \eta_g(\theta)\}/2\pi$ の計算方法は 2-4 で説明した o を孤立臍点として有する二変数同次多項式のグラフ上での o の指数の計算方法と大体同じである ([A4]).

g を次数が3以上の二変数同次多項式とする. このとき g のグラフ上 o が孤立臍点であったとしても, $S_g = \emptyset$ は必ずしもなりたたない. そして S_g の任意の元 θ_0 に対し, $\Gamma_{g,o}(\theta_0) = -\pi/2$ がなりたつ ([A3]). また F と g_F のそれぞれのグラフ上において o が孤立臍点であ

るとき, S_{g_F} の任意の元 θ_0 に対し $\Gamma_{F,o}(\theta_0) \in \{-\pi/2, 0, \pi/2\}$ がなりたちかつ $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_{g_F}) \leqq \mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F) \leqq 1$ がなりたつ ([A4]). G_F 上 o が孤立臍点でありかつ S_{g_F} の任意の元 θ_0 に対し $\Gamma_{F,o}(\theta_0) \leqq \pi$ がなりたつならば, $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F) \leqq 1$ がなりたつ ([A4]). G_F が全臍的ではなくそして特別な Weingarten 曲面であるならば, $S_{g_F} = \emptyset$ であり F と g_F のそれぞれのグラフ上において o は孤立臍点でありかつ次がなりたつ ([A4]):

$$\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_F) = \mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_{g_F}) = 1 - k_F/2.$$

3 指数予想, Carathéodory の予想および Loewner の予想

孤立臍点 p_0 を有する曲面 S に対し, $\mathrm{ind}_{p_0}(S) \leqq 1$ という不等式が期待されてきた. この予想を指数予想 (index conjecture) とよぶことにする. 指数予想に関連して, 二つの予想がしられている: Carathéodory の予想と Loewner の予想である. Carathéodory の予想とはコンパクトかつ強凸なる曲面には二つ以上臍点が存在するのではないかというものである. もし指数予想が正しいならば, コンパクトむきづけ可能かつ種数が 0 の曲面には二つ以上臍点が存在することが Hopf-Poincaré の定理を用いてわかる. コンパクトかつ強凸なる曲面はむきづけ可能かつ種数が 0 であるので, もし指数予想を肯定的に解決できるならば結局 Carathéodory の予想も肯定的に解決できることがわかる. f を二実変数 x, y の実数値をとる滑らかな関数とし, $\partial_{\bar{z}} := \big(\partial/\partial x + \sqrt{-1}\partial/\partial y\big)/2$ とおく. 各正の整数 $n \in \mathbf{N}$ に対し, ベクトル場 $\mathbf{V}_f^{(n)}$ を次のように定義する:

$$\mathbf{V}_f^{(n)} := \mathrm{Re}(\partial_{\bar{z}}^n f)\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{Im}(\partial_{\bar{z}}^n f)\frac{\partial}{\partial y}.$$

また $\mathbf{V}_f^{(n)}$ の非零点全体からなる集合上で $\mathbf{V}_f^{(n)}$ が定義する連続分布を $\mathfrak{D}_f^{(n)}$ で表す. このとき正の整数 n に対する Loewner の予想とは $\mathbf{V}_f^{(n)}$ の孤立零点の $\mathfrak{D}_f^{(n)}$ についての指数は n 以下なのではないかというものである ([K], [T]). Loewner の予想に関して, 次の (a), (b) がしられている:

(a) ベクトル場 $\mathbf{V}_f^{(1)}$ とは

$$\mathbf{V}_f^{(1)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

である. すなわち $\mathbf{V}_f^{(1)}$ とは f の勾配ベクトル場の半分である. 勾配ベクトル場のふるまいは f の等高線によって決定されることに注意すると, $\mathbf{V}_f^{(1)}$ の孤立零点の $\mathfrak{D}_f^{(1)}$ についての指数は 1 以下であることがわかる, すなわち正の整数 1 に対する Loewner の予想は肯定的に解決される.

(b) ベクトル場 $\mathbf{V}_f^{(2)}$ とは

$$\mathbf{V}_f^{(2)} = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

である. f の Hessian を Hess_f で表す. $\mathbf{V}_f^{(2)}$ の零点とはちょうど Hess_f が単位行列の定数倍と表されるような点であるが, さらに任意の実数 $\phi \in \mathbf{R}$ に対し

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\sin\phi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\phi \\ & = 2\left\langle \mathrm{Hess}_f \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\phi/2) \\ \cos(\phi/2) \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

がなりたつことに注意すると, 正の整数 2 に対する Loewner の予想を

> 滑らかな関数の Hessian の一次元固有空間から構成される連続分布の孤立特異点の指数は 1 以下なのではないか

といいかえることができる. さらにこのいいかえられたものは指数予想と同値である ([SX]). よって指数予想は Loewner の予想の一部であるといわれることもある.

曲面上の主分布のふるまいに関する著者によるこれまでの研究方法は Loewner の予想に現れる連続分布 $\mathfrak{D}_f^{(n)}$ のふるまいを調べる上で有効であるかどうかをしることを試みた. その結果, $n=1$ および 2 に対しては有効である一方 $n \geqq 3$ に対しては有効ではないことがわかった. ここで Loewner の予想とは別のしかしながらやはり指数予想を一部として含む予想で著者によるこれまでの研究方法がその予想を調べる上で有効であるようなものは存在するだろうかという問題が考えられた. 第 5 節において, これらの条件をみたす予想について説明する. その予想において研究対象となっているものは滑らかな関数 f からえられるある対称テンソル場によって与えられる有限多価分布である. 第 4 節において, 多価分布について説明する.

4 多価分布

S を滑らかな二次元多様体とし, U を S の開集合とする. また $\mathfrak{D}$ を U 上の連続分布とする. このとき連続分布 $\mathfrak{D}$ およびその定義域 U の対 $(\mathfrak{D}, U)$ を分布要素 (distribution element) とよぶ. 分布要素 $(\mathfrak{D}_0, U_0)$ が $(\mathfrak{D}, U)$ の直接接続 (direct continuation) であるとは, $U_0 \cap U \neq \emptyset$ がなりたちかつ $U_0 \cap U$ 上で $\mathfrak{D}_0 \equiv \mathfrak{D}$ がなりたつときにいうことにする. 分布要素の集

合 $\{(\mathfrak{D}_i, U_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ が 接続 (continuation) であるとは, 任意の $i \in \mathbf{N}$ に対し $(\mathfrak{D}_{i+1}, U_{i+1})$ が $(\mathfrak{D}_i, U_i)$ の直接接続であるときにいうことにする.

S の点 p に対し, 定義域が p を含むような分布要素全体からなる集合を X_p で表す. そして X_p における同値関係 $\sim$ を次のように定義する: 二つの分布要素 $(\mathfrak{D}_1, U_1)$, $(\mathfrak{D}_2, U_2) \in X_p$ に対し p の $U_1 \cap U_2$ における近傍 U_0 が存在して U_0 上 $\mathfrak{D}_1 \equiv \mathfrak{D}_2$ がなりたつとき, $(\mathfrak{D}_1, U_1) \sim (\mathfrak{D}_2, U_2)$ と記す. 同値関係 $\sim$ に関する同値類全体からなる集合を $\tilde{X}_p$ で表す.

D を S の開集合とする. このとき D の各点 p に $\tilde{X}_p$ の部分集合を対応させるもののことを D 上の 多価分布 (many-valued distribution) とよぶことにする. D 上の多価分布 $\tilde{\mathfrak{D}}$ および分布要素 $(\mathfrak{D}, U)$ に対し $U \subset D$ がなりたちかつ任意の $q \in U$ に対し $(\mathfrak{D}, U)$ が $\tilde{\mathfrak{D}}(q)$ の元を表しているとき, $(\mathfrak{D}, U) \subset \big(\tilde{\mathfrak{D}}, D\big)$ と記すことにする. D 上の多価分布 $\tilde{\mathfrak{D}}$ が

(a) 連続である (continuous) とは, 各 $p \in D$ および各 $\omega \in \tilde{\mathfrak{D}}(p)$ に対し分布要素 $(\mathfrak{D}, U) \in \omega$ が存在して $(\mathfrak{D}, U) \subset \big(\tilde{\mathfrak{D}}, D\big)$ がなりたつときにいうことにする;

(b) 完備である (complete) とは, 次がなりたつときにいうことにする: D 内の収束点列 $\{p_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ および接続 $\{(\mathfrak{D}_i, U_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ が任意の正の整数 $i \in \mathbf{N}$ に対し $p_i \in U_i$ および $(\mathfrak{D}_i, U_i) \subset \big(\tilde{\mathfrak{D}}, D\big)$ をみたすならば, 分布要素 $(\mathfrak{D}_0, U_0)$ が存在して $\lim_{i\to\infty} p_i \in U_0$ および $(\mathfrak{D}_0, U_0) \subset \big(\tilde{\mathfrak{D}}, D\big)$ をみたしかつある正の整数 $i_0 \in \mathbf{N}$ が存在して任意の $i \geqq i_0$ に対し $(\mathfrak{D}_0, U_0)$ は $(\mathfrak{D}_i, U_i)$ の直接接続である;

(c) 分離されている (separated) とは, 異なる二つの分布要素 $(\mathfrak{D}_1, U)$, $(\mathfrak{D}_2, U) \subset \big(\tilde{\mathfrak{D}}, D\big)$ が任意の $q \in U$ に対し $\tilde{\mathfrak{D}}(q)$ の異なる二つの元を表しているときにいうことにする;

(d) 各点で分離されている (pointwise separated) とは, 異なる二つの $(\mathfrak{D}_1, U), (\mathfrak{D}_2, U) \subset \big(\tilde{\mathfrak{D}}, D\big)$ に対し U 上至るところ $\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}_2$ がなりたつときにいうことにする;

(e) 各点で分離可能である (pointwise separable) とは, $\tilde{\mathfrak{D}}$ が分離されていてかつ次がなりたつときにいうことにする: 二つの分布要素 $(\mathfrak{D}_1, U), (\mathfrak{D}_2, U) \subset \big(\tilde{\mathfrak{D}}, D\big)$ がある点 $q_0 \in U$ に対し $\mathfrak{D}_1(q_0) = \mathfrak{D}_2(q_0)$ をみたすならば, q_0 の U におけるある近傍 O_{q_0} および O_{q_0} 上の二つの連続関数 ϕ_1, ϕ_2 が存在して次の三つの条件をみたす:

  (i) $\phi_1(q_0) = \phi_2(q_0)$;

  (ii) $i = 1, 2$ に対し, $(\cos\phi_i)\partial/\partial x + (\sin\phi_i)\partial/\partial y$ は $(\mathfrak{D}_i, O_{q_0})$ を表す;

  (iii) 零ではない実数 $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ が存在して, O_{q_0} 上 $c(\phi_1 - \phi_2) \geqq 0$ がなりたつ,

  ただし (x, y) は O_{q_0} 上の局所座標系である.

D を S の領域とし, $\tilde{\mathfrak{D}}$ を D 上定義された連続, 完備かつ分離されている多価分布とする. このときある正の整数 n_0 およびある点 $p_0 \in D$ に対し $\sharp\tilde{\mathfrak{D}}(p_0) = n_0$ がなりたつならば, 任意の $p \in D$ に対し $\sharp\tilde{\mathfrak{D}}(p) = n_0$ がなりたつ. n_0 のような整数が存在するとき, $\tilde{\mathfrak{D}}$ を特に n_0 価である (n_0-valued) または有限多価である (finitely many-valued) ということにする.

D を S の領域とし, n_0 を正の整数とする. また $\tilde{\mathfrak{D}}$ を D 上定義された連続, 完備かつ各点で分離可能な n_0 価分布とする. また p_0 は $S \setminus D$ の点で, p_0 の S におけるある近傍 O_{p_0} が $O_{p_0} \setminus \{p_0\} \subset D$ をみたすものとする. このとき p_0 は $\tilde{\mathfrak{D}}$ の孤立特異点でありえる, つまり $\tilde{\mathfrak{D}}$ を p_0 まで完備に延長することはできない可能性がある. (x, y) は p_0 の近傍上の局所座標系で, p_0 が $(0,0)$ に対応するものとする. また r_0 は正の実数で, $\{0 < x^2 + y^2 < r_0^2\}$ が D に含まれるものとする. $\phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0}$ は $(0, r_0) \times \mathbf{R}$ 上の連続関数で, 各 $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \mathbf{R}$ に対し分布要素 $(\mathfrak{D}, U)$ が存在して $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in U$ および $(\mathfrak{D}, U) \subset (\tilde{\mathfrak{D}}, D)$ がなりたちかつ $(r'\cos\theta', r'\sin\theta') \in U$ をみたす任意の $(r', \theta') \in (0, r_0) \times (\theta - \pi/2, \theta + \pi/2)$ に対し

$$\cos\phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0}(r', \theta')\frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0}(r', \theta')\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{D}(r'\cos\theta', r'\sin\theta')$$

がなりたつようなものとする. そして $\phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0}$ のような連続関数全体からなる集合を $\Phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0}$ で表す. $\tilde{\mathfrak{D}}$ についての p_0 の 指数 (index) $\mathrm{ind}_{p_0}(\tilde{\mathfrak{D}})$ を次のように定義する:

$$\mathrm{ind}_{p_0}(\tilde{\mathfrak{D}}) := \frac{\phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0}(r, \theta + 2n_0\pi) - \phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0}(r, \theta)}{2n_0\pi}. \tag{2}$$

有限多価分布の孤立特異点の指数は一般に有理数であり, 整数の半分と表されるとは限らない. (2) における指数の定義は $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \mathbf{R}$ の選び方にも連続関数 $\phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0} \in \Phi_{\tilde{\mathfrak{D}};p_0}$ の選び方にも局所座標系 (x, y) の選び方にもよらない. 孤立特異点の指数を(2) の中でのように定義するとき, 連続, 完備かつ各点で分離可能な有限多価分布に対し Hopf-Poincaré の定理に相当するものがなりたつ. 特に $n_0 = 1$ であるならば, $\tilde{\mathfrak{D}}$ を第 1 節の意味での連続分布とみなすことができ, $\mathrm{ind}_{p_0}(\tilde{\mathfrak{D}})$ はやはり第 1 節の意味での $\tilde{\mathfrak{D}}$ についての p_0 の指数に等しい.

孤立特異点を有する連続, 完備かつ各点で分離されている有限多価分布の具体例をあげる. 正の整数 $n_0 \in \mathbf{N}$ および零ではない整数 $m_0 \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ に対し, $q_0 := m_0/n_0$ とおく. 各 $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \mathbf{R}$ に対し点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ での互いに異なる n_0 個の接ベクトルの集合

$$\left\{\cos\left(q_0\theta + \frac{j\pi}{n_0}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \sin\left(q_0\theta + \frac{j\pi}{n_0}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right\}_{j=0,1,\ldots,n_0-1}$$

を対応させるものを認識することによって, $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の連続, 完備かつ各点で分離されている n_0 価分布 $\tilde{\mathfrak{D}}^{(q_0)}$ をみいだすことができる. このとき $(0, r_0) \times \mathbf{R}$ 上の連続関数

$\phi_{\tilde{\mathfrak{D}}^{(q_0)};(0,0)} \in \Phi_{\tilde{\mathfrak{D}}^{(q_0)};(0,0)}$ として, 任意の $(r,\theta) \in (0,r_0) \times \mathbf{R}$ に対し $\phi_{\tilde{\mathfrak{D}}^{(q_0)};(0,0)}(r,\theta) = q_0\theta$ をみたすようなものをみいだすことができる. よって(2) から, $\mathrm{ind}_{(0,0)}(\tilde{\mathfrak{D}}^{(q_0)}) = q_0$ をえる.

5 予想

n を正の整数とする. そして $\mathbf{R}^2$ の領域 D 上の滑らかな関数 f に対し, $d^n f$ を次のような $(0,n)$ 型の対称テンソル場とする:

$$d^n f := \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} dx^{n-i} dy^i.$$

また各実数 ϕ および D の各点 p に対し, 次のようにおく:

$$\mathbf{U}_\phi := \cos\phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi \frac{\partial}{\partial y}, \qquad (\widehat{d^n f})_p(\phi) := (d^n f)_p(\mathbf{U}_\phi, \ldots, \mathbf{U}_\phi).$$

D の点 p での接平面の一次元部分空間 L に対し $(\widehat{d^n f})_p$ の臨界点 ϕ_0 が存在して $\mathbf{U}_{\phi_0}(p) \in L$ がなりたつとき, L を $d^n f$ の p での <u>臨界方向 (critical direction)</u> ということにする. D の点 p_0 が $d^n f$ の <u>臍点 (umbilical point)</u> であるとは, $(\widehat{d^n f})_{p_0}$ が定数であるとき, すなわち p_0 での接平面の全ての一次元部分空間が臨界方向であるときにいうことにする. $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n f}$ は $d^n f$ の非臍点からなる開集合上の連続, 完備かつ各点で分離可能な有限多価分布で, 各点で $d^n f$ の臨界方向を与えるようなものとする. 例えば, $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^1 f}$ は f の勾配ベクトル場が定める (一価) 分布であり, $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^2 f}$ は f の Hessian の (一つまたは二つの) 一次元固有空間から構成される (一価または二価の) 分布である. f が調和関数であるならば,

$$(\widehat{d^n f})(\phi) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \cos n\phi + \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} \sin n\phi$$

がなりたつことに注意すると, $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n f}$ として $d^n f$ の非臍点全体からなる集合上で定義された連続, 完備かつ各点で分離されている n 価分布をみいだすことができる. また f を $f := x^4 + y^4$ とおくと, 任意の $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対し

$$\frac{1}{24}(\widehat{d^3 f})_{(x,y)}(\phi) = x\cos^3\phi + y\sin^3\phi$$

がなりたちそして任意の $\theta \in \mathbf{R}$ に対し

$$\frac{1}{72} \frac{d(\widehat{d^3 f})_{(\cos\theta, \sin\theta)}}{d\phi}(\phi) = -\cos\phi \sin\phi \cos(\theta + \phi)$$

がなりたつので, $(0,0)$ は $\mathbf{R}^2$ 上 $d^3 f$ の唯一の臍点であることがわかりそして $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^3 f}$ として $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上定義された連続, 完備かつ各点で分離可能な 3 価分布で $(0,0)$ の $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^3 f}$ につ

いての指数 $\mathrm{ind}_{(0,0)}(\tilde{\mathfrak{D}}_{d^3f})$ が $-1/3$ に等しいようなものをみいだすことができる. $n \geqq 3$ であるとき, 局所的には必ず $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^nf}$ にあたるものをみいだすことができる. しかしながら非臍点全体からなる集合上では $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^nf}$ をみいだすことができない場合もある. ここで各非臍点での d^nf の全ての臨界方向を用いて非臍点全体からなる集合上で $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^nf}$ にあたるものを構成できると仮定する (例えば, f が実解析的でありかつ区間 $[0,\pi)$ の中の $(\widehat{d^nf})_p$ の臨界点の重複度の和が非臍点 p の選び方によらないならば, この仮定はみたされる). このとき著者は次の予想をえた:

予想 $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^nf}$ は上述のように構成されているものとするとき, d^nf の孤立臍点の $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^nf}$ についての指数は1以下である.

$n \in \{1,2\}$ であるならば, この予想は Loewner の予想と同値である. 一方 $n \geqq 3$ であるならば, $\mathbf{V}_f^{(n)}$ の零点は d^nf の臍点であるとは限らないので, この予想は Loewner の予想と同値ではないことがわかる. [A5] において, 曲面上の主分布のふるまいに関する ([A1]~[A4] における) 著者によるこれまでの研究方法をもって, f が実解析的である場合に上述の予想を調べた. 特に, f が同次多項式であるならば上述の予想は正しいことがわかった. さらに f が同次多項式であるならば, $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^nf}$ のふるまいは f のグラフ上での主分布のふるまいの類似物であることもわかった. このことを次の段落で説明する.

k を n より大きい整数とする. また g は二変数 k 次同次多項式で, $(0,0)$ が d^ng の孤立臍点でありかつ $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の各点 p に対する区間 $[0,\pi)$ の中の $(\widehat{d^ng})_p$ の臨界点の重複度の和は非臍点 p の選び方にはよらないものと仮定する. このとき点 $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で位置ベクトル場が d^ng の臨界方向の一つに含まれることと $x\sin\theta_0 = y\cos\theta_0$ なる実数 θ_0 が R_g (第2節の 2-4 をみよ) の元であることは同値である ([A5]). I を $\mathbf{R}$ の開区間とする. また $E_{g,I}^{(n)}$ は I 上の連続関数の集合で, 任意の $\eta_g \in E_{g,I}^{(n)}$ および任意の $\theta \in I$ に対し $(\cos\theta, \sin\theta)$ での接ベクトル $(\cos\eta_g(\theta))\partial/\partial x + (\sin\eta_g(\theta))\partial/\partial y$ が d^ng の臨界方向に含まれるようなもののうちの最大のものとする. そして $R(d^ng)$ は $\mathbf{R}$ の部分集合で, 各 $\theta_0 \in R(d^ng)$ に対し θ_0 を含む開区間 I および $E_{g,I}^{(n)}$ の元 η_{g,θ_0} が存在して $\theta_0 = \eta_{g,\theta_0}(\theta_0)$ がなりたつようなもののうちの最大のものとする. このとき $R(d^ng) \subset R_g$ がなりたつ. $R_g = \mathbf{R}$ がなりたつならば, $R(d^ng) = \mathbf{R}$ および $\mathrm{ind}_{(0,0)}(\tilde{\mathfrak{D}}_{d^ng}) = 1$ がなりたつ. 以下 $R_g \neq \mathbf{R}$ を仮定する. θ_0 を $R(d^ng)$ の元とし, I_{θ_0} は $I_{\theta_0} \cap R(d^ng) = \{\theta_0\}$ をみたす開区間でありかつ $E_{g,I_{\theta_0}}^{(n)}$ の二元 $\eta_{g,1}$, $\eta_{g,2}$ が $I_{\theta_0} \setminus \{\theta_0\}$ のある点 θ で $\eta_{g,1} = \eta_{g,2}$ をみたすならば θ を含む $I_{\theta_0} \setminus \{\theta_0\}$ の連結成分上 $\eta_{g,1} \equiv \eta_{g,2}$ がなりたつようなものとする. このとき正の整数 $N_g^{(n)}(\theta_0)$ が存在して, θ_0 で θ_0 に等しい $E_{g,I_{\theta_0}}^{(n)}$ の元の数は $N_g^{(n)}(\theta_0)^2$ に等しい. $R(d^ng)$ の元 θ_0 が $\tilde{g}(\theta_0) \neq 0$ をみたすなら

ば, $N_g^{(n)}(\theta_0)=1$ がなりたつ ([A5]). n が 1 または 2 であるならば, 任意の $\theta_0\in R(d^n g)$ に対し $N_g^{(n)}(\theta_0)=1$ がなりたつ. $R(d^n g)$ の元 θ_0 の符号 (sign) が正 (および負) であるとは, $I_{\theta_0}\setminus\{\theta_0\}$ の任意の元 θ および θ_0 で θ_0 に等しい $E^{(n)}_{g,I_{\theta_0}}$ の任意の元 η_{g,θ_0} に対し次がなりたつときにいうことにする:

$$(\theta-\eta_{g,\theta_0}(\theta))(\theta-\theta_0)>0 \text{ (および } <0).$$

$R(d^n g)$ の元 θ_0 が関係がある (related) (および関係がない (non-related)) とは, θ_0 の符号が正または負である (および正でも負でもない) ときにいうことにする. $R(d^n g)$ の元 θ_0 に対し, θ_0 が関係があることと次のいずれか一つがなりたつことは同値である ([A5]):

(a) $\tilde{g}(\theta_0)=0$;

(b) $\tilde{g}$ は θ_0 で極値をとる.

よって $R(d^n g)$ の元 θ_0 に対し, θ_0 が関係があることと θ_0 の臨界符号 (第 2 節の 2-4 をみよ) が正または負であることは同値である. $R(d^n g)$ の関係がある元 θ_0 の符号と臨界符号について次の二つがなりたつ: θ_0 の臨界符号が正であるならば, θ_0 の符号も正である ([A5]); θ_0 の臨界符号が負でありかつ θ_0 が

$$(n-1)\frac{d^2\tilde{g}}{d\theta^2}(\theta_0)\neq (k(k-n))\tilde{g}(\theta_0)$$

をみたすとき, θ_0 の符号が正 (および負) であることと

$$(n-1)\frac{d^2\tilde{g}}{d\theta^2}(\theta_0)\Big/\tilde{g}(\theta_0)\in (k(k-n),\infty) \text{ (および } [0,k(k-n)))$$

がなりたつことは同値である ([A5]). $R(d^n g)$ の関係がある元でその符号が正 (および負) であるもの全体からなる集合を $R_+(d^n g)$ (および $R_-(d^n g)$) で表し, $\varepsilon\in\{+,-\}$ に対し

$$N^{(n)}_{g,\varepsilon}:=\sum_{\theta_0\in R_\varepsilon(d^n g)\cap[\theta,\theta+\pi)} N_g^{(n)}(\theta_0)$$

とおく. このときある正の整数 $N_{d^n g}$ に対し $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n g}$ は $N_{d^n g}$ 価分布であるとすると, $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n g}$ についての $(0,0)$ の指数 $\mathrm{ind}_{(0,0)}(\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n g})$ は $1-\left(N^{(n)}_{g,+}-N^{(n)}_{g,-}\right)/N_{d^n g}$ と表される ([A5]). さらに $\mathrm{ind}_{(0,0)}(\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n g})\leqq 1$ がなりたつ. g が k 次調和同次多項式であるとすると, 任意の $\theta_0\in R_g$ に対し $\theta_0\in R(d^n g)$ および $\tilde{g}(\theta_0)\neq 0$ がなりたちかつ θ_0 の臨界符号は正であるので, $\left(N^{(n)}_{g,+},N^{(n)}_{g,-}\right)=(k,0)$ そして $\mathrm{ind}_{(0,0)}(\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n g})=1-k/n$ をえる. この段落は第 2 節の 2-4 の類似物であることが直ちにわかる.

また f が実解析的であるとき, 第 2 節の 2-5 の類似物が $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n f}$ に対しなりたつ ([A5]).

[A1] N. Ando, An isolated umbilical point of the graph of a homogeneous polynomial, Geom. Dedicata **82** (2000) 115–137.

[A2] N. Ando, The behavior of the principal distributions around an isolated umbilical point, J. Math. Soc. Japan **53** (2001) 237–260.

[A3] N. Ando, The behavior of the principal distributions on the graph of a homogeneous polynomial, Tohoku Math. J. **54** (2002) 163–177.

[A4] N. Ando, The behavior of the principal distributions on a real-analytic surface, preprint.

[A5] N. Ando, A conjecture in relation to Loewner's conjecture, preprint.

[HW] P. Hartman and A. Wintner, Umbilical points and W-surfaces, Amer. J. Math. **76** (1954) 502–508.

[Ho] H. Hopf, Lectures on differential geometry in the large, Lecture Notes in Math. vol.1000, Springer-Verlag, Berlin-NewYork, 1989.

[K] T. Klotz, On Bol's proof of Carathéodory's conjecture, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959) 277–311.

[SX] B. Smyth and F. Xavier, Real solvability of the equation $\partial_{\bar{z}}^2\omega = \rho g$ and the topology of isolated umbilics, J. Geom. Anal. **8** (1998) 655–671.

[T] C. J. Titus, A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilic points, Acta Math. **131** (1973) 43–77.

〒 192-0397 東京都八王子市南大沢1－1

東京都立大学大学院理学研究科数学教室

E-mail address: naoya@comp.metro-u.ac.jp

HomePage address: http://www.math.metro-u.ac.jp/~ando/index.html