数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 51-71

対称 R 空間の標準埋め込み上の錐の面積最小性

筑波大学数学系　菅野貴弘 (Takahiro Kanno)
Institute of Mathematics University of Tsukuba

1 序

M を単位球面の部分多様体とする. M 上の点を通る原点からの半直線の和集合を「M 上の錐」といい C_M と表す. 錐は, 単位球の内部 C_M^1 が M を境界とする全ての曲面の中で面積最小になるとき, 面積最小であるという. 曲面 S の点 p を始点とする接線の和集合を S の点 p での接錐という. これは接空間を一般化した概念である. もし接錐がベクトル空間でなければ, p は S の特異点である. もし S が面積最小ならば, S の全ての接錐は面積最小になる. このことから, 特異点を持つ面積最小な曲面を研究をするために錐の面積最小性を研究することは重要である.

錐の面積最小性を証明する方法として, 面積非増加レトラクション $\Pi : \mathbb{R} \longrightarrow C_M$ を構成する方法がある. もしこのようなレトラクションが存在したとすると, C_M^1 を C の truncated cone, S を C_M^1 と同じ境界を持つ別な曲面としたとき, $\Pi(S)$ は C_M^1 を覆うから,

$$\mathrm{Area}(S) \geq \mathrm{Area}(\Pi(S)) \geq \mathrm{Area}(C_M^1)$$

となり, C_M の面積最小性が示せる.

G. R. Lawlor は [7] でこのようなレトラクションが存在するための十分条件 (曲率判定条件) を与えた. この判定条件を適用することにより, 既約な対称対に対応する対称 R 空間の標準埋め込み上の錐の面積最小性を示した.

2 Lawlor の判定条件

この節では Lawlor の判定条件について述べる. さらに詳しいことは [7] を参照.

定義 2.1 ([7]) M を S^{n-1} の滑らかな $k-1$ 次元部分多様体とする. $p \in M$ に対して, S^{n-1} の単位速度の測地線 σ で, $\sigma(0) = p$ で M に直交するものを *"normal geodesic"* と呼ぶ.

定義 2.2 ([7]) $p \in M$, $\alpha > 0$ に対して $U_p(\alpha)$ を長さ α の全ての *normal geodesic* の像の全体

$$W_p(\alpha) := C_{U_p(\alpha)}.$$

を $p \in M$ での幅 α の *normal wedge* と呼ぶ．便宜上原点を除いておく．そうすることによって互いに交わらない *normal wedge* というものを考えることが出来る．

定義 2.3 ([7]) $p \in M$ に対して

$$N_p := \max\{\alpha \mid W_p(\alpha) \cap C_M = C_p\} \quad (C_p = \{t \cdot p | t \geq 0\})$$

を p での *normal radius* と呼ぶ．

各 $p \in M$ に対して，極座標表示したときに $r(0) = p$ かつ θ がある有限の値に $\theta_0(p)$ 近づくにしたがって $r(\theta)$ が無限大に発散するような平面曲線 γ_p が与えられたとする．その γ_p をもちいて

$$S_p := \{r(\theta)(\cos(\theta)\vec{op} + \sin(\theta))\nu \mid \nu \in T_p^{\perp} M\}$$

とおく．normal wedge $W_p(\theta_0(p))$ から C_p へのレトラクション Π_p を次で定義する．

$$\Pi_p(tz) = t\Pi_p(z) = t \cdot p \quad for \quad t > 0,\ z \in S_p.$$

このとき，もし任意の $p, q \in M$, $p \neq q$ に対して $W(\theta_0(p)) \cap W(\theta_0(q)) = \emptyset$ が成り立つならば，レトラクション $\Pi : \mathbb{R}^n \to C_M$ を

$$\Pi(z) = \begin{cases} \Pi_p(z) & z \in {}^{\exists}W_p(\theta_0(p)) \\ 0 & z \notin \bigcup W_p(\theta_0(p)) \end{cases}$$

として定義することができる．Lawlor(section 1.1 in [7]) によると，このレトラクションが面積非増加になるためには，平面曲線 $\gamma_p = (r(\theta), \theta)$ が少なくとも次の微分不等式を満たしていれば良い．

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} \leq r\sqrt{r^{2k}(\cos\theta)^{2k-2}p_\alpha(t)^2 - 1} \\ r(0) = 1 \\ r(\theta) \to \infty \quad as \quad \theta \to {}^{\exists}\theta_0 < \infty \end{cases} \tag{1}$$

ここで

$$\begin{cases} \alpha = \sup_\nu \|A_\nu\| \\ A_\nu : p\text{での } S^{n-1} \text{における } M \text{ の単位法方向}\nu\text{の型作用素} \\ p_\alpha(t) = (1 - \alpha t)e^{\alpha t},\ t = \tan(\theta) \end{cases}$$

定義 2.4 ([7]) $p \in M \subset S^{n-1}$ と $\dim(M) = k - 1 \geq 2$ に対して，上記のような $\theta_0(p)$ のうち最小のものを p における *vanishing angle* と呼ぶ．$V_C(k, \alpha)$ とも表す．

p における vanishing angle は C_M の次元と型作用素のノルムの最大値によって構成される．レトラクションが定義されるされる為にはどの二つの normal wedge も互いに交わらないことが必要である．それゆえ, vanishing angle は十分に小さくなければならない．

Lawlor は (1) で

$$g(t) = g(\tan\theta) = \frac{1}{r(\cos\theta)^k}$$

として不等号を等号にして得られる次の方程式を数値解析することで vanishing angle を求めた．

$$\begin{cases} \left(g(t) - \frac{t}{k}g'(t)\right)^2 + \left(\frac{g'(t)}{k}\right)^2 = p_\alpha(t)^2 \\ g(0) = 1 \\ g \to 0 \quad as \quad t \to {}^\exists t_0 < \infty \end{cases} \tag{2}$$

vanishing angle は (2) の最小解 $g_0(t)$ を使うと $V_C(k,\alpha) = \tan^{-1}(g_0(t_0))$ と表せる．

定理 2.5 (Theorem 1.3.5 in [7]) M を S^{n-1} の $k-1$ 次元の滑らかな極小部分多様体とし, C_M を M 上の錐とする．

$$\alpha = \max_\nu (\sup \|A_\nu\|),$$

ν は q での C_M の単位法ベクトル全体を渡り, q は M 全体を渡るものとする．*[7]* の *Table 1.4.1* で $\dim(C_M) = k$, として *vanishing angle* θ を見つける．次に N を C_M の *normal radius* の最小値とする．もし *vanishing angle* θ が存在して $2\theta \leq N$ が成り立つならば, C_M は面積最小になる．

[7] の Table 1.4.1 は錐の次元が 3 から 12 までの vanishing angle の表である．もし錐の次元が 12 より大きくなった場合は次の命題を用いる．

命題 2.6 (Proposition 1.4.2 in [7]) $V_C(k,\alpha)$ を *vanishing angle* とする．ここで, $k = \dim(C_M)$, $\alpha = \sup\|A_\nu\|$. このとき, $m > k$ に対して,

$$\tan\left(V_C\left(m, \frac{m}{k}\alpha\right)\right) < \frac{k}{m}\tan(V_C(k,\alpha)).$$

が成り立つ．

しかし, ここではこの表を使わずにある区間での (2) の解の存在を保証する次の補題を使って vanishing angle の評価をする．

補題 2.7 (Lemma 3.4.1 in [7]) 関数 $g_1(t)$ が区間 $(0, t_0]$ $(t_0 < \frac{1}{\alpha})$ で次の不等式と $g_1(0) = 1$ を満たすとする．

$$\left(g(t) - \frac{t}{k}g'(t)\right)^2 + \left(\frac{g'(t)}{k}\right)^2 < p_\alpha(t)^2$$

このとき, 関数 $g_2(t)$ で, ある区間で次の不等式と $g_2(t)=1$ を満たすものが存在する.

$$\left(g(t)-\frac{t}{k}g'(t)\right)^2+\left(\frac{g'(t)}{k}\right)^2=p_\alpha(t)^2$$

この補題とその証明から, 以下の系が得られる.

系 2.8 関数 $g_1(t)$ が補題 2.7 の条件を満たし, $g_1(t_1)=0$ となる $t_1<t_0$ が存在したとする. このとき,

$$\tan\left(V_C(k,\alpha)\right)<t_0.$$

が成り立つ.

補題 2.9

$$\tan(V_C(6,\sqrt{2}))<\frac{1}{2}.$$

Proof. $g_1(t)=1-10t^2+11t^3$ とおくと, $g_1(t)$ は区間 $(0,0.45]$ で補題 2.7 の条件を満たし、さらに $g_1(t_1)=0$ を満たす $t_1<0.45$ が存在することが初等的な方法で示される. このことから明らかに

$$\tan(V_C(6,\sqrt{2}))<0.45<\frac{1}{2}$$

が成り立つ. ■

3 対称 R 空間

G をコンパクト連結 Lie 群とし、K を G の閉部分群、θ を G の対合的自己同型写像とする。さらに、(G,K) は θ に関して対称対になっていると仮定する。すなわち、

$$G_\theta=\{g\in G\mid\theta(g)=g\}$$

とおき、G_θ^0 で G_θ の単位連結成分を表したとき、$G_\theta^0\subset K\subset G_\theta$ が成り立つと仮定する。G,K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g},\mathfrak{k}$ で表す。G の対合的自己同型写像 θ の微分は、$\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像になる。それも θ で表すことにする。このとき、$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ は

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\theta(X)=X\}$$

を満たす。

$\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を θ と G の随伴群の作用に関して不変になるようにとる。

$$\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\theta(X)=-X\}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

は直交直和分解になる。この直和分解を対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の標準分解と呼ぶ。

$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり、固定する。$\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{g}$ の中心とし、$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とおくと

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} + \mathfrak{g}'$$

は直交直和分解になり、$\mathfrak{g}'$ はコンパクト半単純 Lie 環になる。

$$\mathfrak{k}' = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}', \quad \mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}', \quad \mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}',$$
$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{c}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$$

とおく。このとき、$(\mathfrak{g}', \mathfrak{k}')$ は $\theta' = \theta|_{\mathfrak{g}'}$ に関して対称対になり、

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' + \mathfrak{p}'$$

は標準分解になる。さらに、$\mathfrak{a}'$ は $\mathfrak{p}'$ 内の極大可換部分空間になる。また、

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{k}', \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{p}', \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{a}'$$

が成り立つ。$\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{a}$ を含むようにとり、

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$$

とおくと、直交直和分解

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

を得る。$\alpha \in \mathfrak{t}$ に対して、

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{t})\}$$

とおき、

$$\tilde{R}(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \mathfrak{t} - \{0\} \mid \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \neq \{0\}\} \subset \mathfrak{t}'$$

によって $\mathfrak{g}$ のルート系 $\tilde{R}(\mathfrak{g})$ を定める。$\tilde{R}(\mathfrak{g})$ を単に $\tilde{R}$ とも書く。$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して、

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおき、

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\} \subset \mathfrak{a}'$$

によって $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ のルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を定める。$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を単に R とも書く。

$$\tilde{R}_0(\mathfrak{g}) = \tilde{R}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b}$$

とおき、$\mathfrak{t}$ から $\mathfrak{a}$ への直交射影を $H \mapsto \bar{H}$ で表すと、

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{R}(\mathfrak{g}) - \tilde{R}_0(\mathfrak{g})\}$$

が成り立つ。$\mathfrak{a}$ の基底を $\mathfrak{t}$ の基底に拡張し、これらの基底に関する辞書式順序 $>$ を $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{t}$ に入れると、$H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\bar{H} > 0 \Rightarrow H > 0$$

が成り立つ。順序 $>$ に関する $\tilde{R}(\mathfrak{g})$ の基本系を $\tilde{F}(\mathfrak{g})$ で表す。$\tilde{F}(\mathfrak{g})$ を単に $\tilde{F}$ とも書く。

$$\tilde{F}_0(\mathfrak{g}) = \tilde{F}(\mathfrak{g}) \cap \tilde{R}_0(\mathfrak{g})$$

とおくと、順序 $>$ に関する $R(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ の基本系 $F(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ は

$$F(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{F}(\mathfrak{g}) - \tilde{F}_0(\mathfrak{g})\}$$

で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{R}_+(\mathfrak{g}) &= \{\alpha \in \tilde{R}(\mathfrak{g}) \mid \alpha > 0\} \\ R_+(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) &= \{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) \mid \alpha > 0\} \end{aligned}$$

とおくと、

$$R_+(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{R}_+(\mathfrak{g}) - \tilde{R}_0(\mathfrak{g})\}$$

が成り立つ。

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X,H] = 0 \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおき、$\alpha \in R_+(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ に対して、

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_\alpha &= \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \\ \mathfrak{p}_\alpha &= \mathfrak{p} \cap (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \end{aligned}$$

とおくと、次の補題が成り立つ。

補題 3.1 1.

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{k}_\alpha, \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{p}_\alpha,$$

は直交直和分解になる。

2. 各 $\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_0$ に対して $S_\alpha \in \mathfrak{k}$ と $T_\alpha \in \mathfrak{p}$ が存在し、

$$\{S_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+,\ \bar{\alpha} = \lambda\}, \quad \{S_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+,\ \bar{\alpha} = \lambda\}$$

はそれぞれ $\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda$ の正規直交基底になり、$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$[H, S_\alpha] = \langle \alpha, H \rangle T_\alpha, \quad [H, T_\alpha] = -\langle \alpha, H \rangle S_\alpha$$

が成り立つ。

$$D = \bigcup_{\alpha \in R} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle = 0\}$$

によって $\mathfrak{a}$ の部分集合 D を定める。$\mathfrak{a} - D$ の各連結成分を Weyl 領域と呼ぶ。

$$\begin{aligned} C &= \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0\ (\alpha \in F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}))\} \\ C' &= C \cap \mathfrak{a}' \end{aligned}$$

とおくと、これらの閉包は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle \geq 0\ (\alpha \in F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}))\} \\ \bar{C'} &= \bar{C} \cap \mathfrak{a}' \end{aligned}$$

各 $\beta \in F$ に対して次の条件を満たす $H_\beta \in \mathfrak{a}'$ をとる。

$$\langle \alpha, H_\beta \rangle = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

このとき、

$$\bar{C} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{p}} \times \left\{ \sum_{\alpha \in F} t_\alpha H_\alpha \,\middle|\, t_\alpha \geq 0 \right\}$$

が成り立ち、

$H \in \bar{C}$ に対して

$$K_H = \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H = H\}$$

とおく.

K_H は K の閉部分群になり,

$$f : K/K_H \longrightarrow \mathrm{Ad}(K)H; \quad kK_H \longmapsto \mathrm{Ad}(k)H \tag{†}$$

は微分同型写像になる．G の左不変 Riemann 計量は K に両側不変計量を誘導し，K/K_H に正規等質 Riemann 計量を誘導する．この計量，またはその定数倍に関して $f : K/K_H \longrightarrow \mathrm{Ad}(K)H$ が等長的になるための必要十分条件は，$\lambda \in R_+(H)$ に対して $\langle \lambda, H \rangle$ が一定値をとることである．これはさらに，H が最高ルートの係数が 1 になる元の双対元に比例することと同値であり，このとき $\mathrm{Ad}(K)H$ は対称空間になり，これを対称 R 空間と呼ぶ．このような H に対して，$A_0 = \frac{H}{|H|}$ とおく．特に，A_0 は K の作用に関して孤立点となり[1]，$\mathrm{Ad}(K)A_0$ は $\mathfrak{p}$ 内の単位球面の極小部分多様体になる ([?] を参照)．これは，$\mathrm{Ad}(K)A_0$ 上の錐が $\mathfrak{p}$ 内の極小部分多様体になることと同値である．

定義 3.2 有限群、

$$W(G,K) = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a}) \subset O(\mathfrak{a})$$

を (G,K) の **Weyl 群**と呼ぶ。ここで、$N_K(\mathfrak{a})$, $Z_K(\mathfrak{a})$ はそれぞれ K における $\mathfrak{a}$ の正規化と中心化とする。

定理 3.3 1. 各 $H \in \mathfrak{a}$ に対して、軌道 $W(G,K) \cdot H$ は $\bar{C}$ と唯一点で交わる。

2. $W(G,K)$ は Weyl 領域全体に単純推移的に作用する。

命題 3.4 部分空間 $S \subset \mathfrak{a}$ と $k \in K$ が、

$$\mathrm{Ad}(k)S \subset \mathfrak{a}$$

を満たすとき、或る $s \in W(G,K)$ が存在し、

$$s \cdot H = \mathrm{Ad}(k)H, \qquad H \in S$$

が成立する。

4 対称 R 空間の normal radius と型作用素のノルム

この章では対称 R 空間の normal radius と型作用素のノルムを計算する．等質性から基点 A_0 で考えれば良い．

命題 4.1 *$M = \mathrm{Ad}(K)A_0$ の normal radius は*

$$\min_{\substack{s \in W(G,K) \\ sA_0 \neq A_0}} \cos^{-1}\langle A_0, sA_0 \rangle,$$

で与えられる．

[1] つまり，$\mathrm{Ad}(K)A_0$ と同型な軌道を与える長さ 1 の $\bar{C}$ の点は A_0 に限る．

＜ 証明 ＞

$\mathfrak{p}_{A_0}$ の任意の単位ベクトル ν に対して $\mathrm{Ad}(k)\nu \in \mathfrak{a}$ となる $k \in K_{A_0}$ が存在する．よって $\nu \in \mathfrak{a}$ と仮定して良い．A_0 を始点とする normal geodesic σ は

$$\sigma(t) = (\cos t)A_0 + (\sin t)\nu.$$

と表される．normal geodesic $\sigma(t)$ が M と点

$$\sigma(t_0) = (\cos t_0)A_0 + (\sin t_0)\nu.$$

で交わったとする．このとき命題 3.4 より，$\sigma(t_0) = \mathrm{Ad(k)A_0}$ となる $k \in K$ が存在する．

$\mathrm{Ad}(k)A_0 \in \mathfrak{a}$ より，$\mathrm{Ad}(k)A_0 = sA_0$ となる $s \in W(G,K)$ が存在する．よって

$$\cos t_0 = \frac{\langle A_0, sA_0\rangle}{||A_0||||sA_0||} = \langle A_0, sA_0\rangle.$$

が成り立つ．これから直ちに命題の主張が成り立つ． ■

型作用素のノルムを計算するために，A_0 での錐の単位法ベクトル ν を A_0 の近傍の単位法ベクトル場に以下のように拡張する．

$$\nu(c\mathrm{Ad}(\exp X)A_0) := \mathrm{Ad}(\exp X)\nu,$$

ここで $X \in \mathfrak{k}_+(A_0)$，$c \in \mathbb{R}^+$．

補題 4.2 f を $(\dagger)(p.7)$ で定義された標準埋め込みとすると $A_\nu A_0 = 0$ であって，$X \in \mathfrak{k}_+(A_0)$ に対して，

$$A_\nu(f_*X) = -[X,\nu].$$

が成り立つ．

＜ 証明 ＞

$A_\nu(A_0) = 0$ は明らか．∇ を $\mathfrak{p}$ の Levi-Civita 接続とする．このとき

$$\begin{aligned}\nabla_{f_*X}\nu &= \frac{d}{dt}\nu(f(\exp tXK_{A_0}))\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}\nu(f(\mathrm{Ad}(\exp tX)A_0)\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp tX)\nu\Big|_{t=0} \\ &= -[X,\nu].\end{aligned}$$

であって, 一方,

$$\begin{aligned}[\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{p}_{A_0}] &= \left[\sum_{\lambda\in R_+(A_0)} \mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{a} + \sum_{\mu\in R_0(A_0)} \mathfrak{p}_\mu\right] \\ &\subset \sum_{\lambda\in R_+(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda + \sum_{\substack{\lambda\in R_+(A_0)\\ \mu\in R_0(A_0)}} [\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu] \\ &\subset \sum_{\lambda\in R_+(A_0)} \mathfrak{p}_\lambda + \sum_{\substack{\lambda\in R_+(A_0)\\ \mu\in R_0(A_0)}} (\mathfrak{p}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{p}_{\lambda-\mu}).\end{aligned}$$

である. $\lambda \in R_+(A_0), \mu \in R_0(A_0)$ に対して,

$$\langle \lambda \pm \mu, A_0 \rangle = \langle \lambda, A_0 \rangle > 0.$$

であるから $\lambda \pm \mu \in R_+(A_0)$.

それゆえ

$$[\mathfrak{k}_+(A_0), \mathfrak{p}_{A_0}] \subset \mathfrak{p}_+(A_0) = T_{A_0}M.$$

よって $\mathfrak{p}_+(A_0)$ への直交射影を "T" で表すと

$$\begin{aligned}A_\nu(f_*X) &= -(\nabla_{f_*X}\nu)^{\mathrm{T}} \\ &= -\nabla_{f_*X}\nu \\ &= -[X, \nu].\end{aligned}$$

となる. ■

次の補題の結果より, 型作用素のノルムの最大値は $\mathfrak{a}$ で A_0 に直交する単位ベクトルのみで考えても良いことがわかる.

補題 4.3 ν を $M = \mathrm{Ad}(K)A_0$ の単位法ベクトル場とし, $k \in K_{A_0}$ とする. このとき

$$\|A_\nu(f_*X)\| = \|A_{\mathrm{Ad}(k)\nu}(\mathrm{Ad}(k)f_*X)\|.$$

が成り立つ.

< 証明 >

Lemma 4.2 より,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(k)A_\nu f_*X &= -\mathrm{Ad}(k)[X, \nu] \\ &= -[\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)\nu] \\ &= A_{\mathrm{Ad}(k)\nu}(f_*(\mathrm{Ad}(k)X)).\end{aligned}$$

命題 4.4 m_λ を $\lambda \in R_+(A_0)$ の重複度とする．任意の $\lambda \in R_+(A_0)$ に対して，$\langle \lambda, A_0 \rangle$ は一定なのでそれを Λ と表す．このとき，A_0 の $\mathfrak{a}$ での単位法ベクトル ν に対して，

$$\|A_\nu\|^2 = \frac{1}{\Lambda^2} \sum_{\lambda \in R_+(A_0)} m_\lambda \langle \lambda, \nu \rangle^2.$$

が成り立つ．

＜ 証明 ＞

補題 3.1 と補題 4.2 により，$\|A_\nu\|^2$ を直接計算できる．

$$\begin{aligned}
\|A_\nu\|^2 &= \sum_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \bar{\alpha} \in R_+(A_0)}} \|A_\nu(T_\alpha)\|^2 \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \bar{\alpha} \in R_+(A_0)}} \frac{1}{\langle \alpha, A_0 \rangle^2} \|A_\nu(f_* S_\alpha)\|^2 \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \bar{\alpha} \in R_+(A_0)}} \frac{1}{\langle \alpha, A_0 \rangle^2} \|[S_\alpha, \nu]\|^2 \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \bar{\alpha} \in R_+(A_0)}} \frac{1}{\langle \alpha, A_0 \rangle^2} \langle [\nu, S_\alpha], [\nu, S_\alpha] \rangle \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \bar{\alpha} \in R_+(A_0)}} \frac{1}{\langle \alpha, A_0 \rangle^2} \langle S_\alpha, [\nu, [\nu, S_\alpha]] \rangle \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \bar{\alpha} \in R_+(A_0)}} \frac{1}{\langle \alpha, A_0 \rangle^2} \langle \alpha, \nu \rangle^2 \|S_\alpha\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda \in R_+(A_0)} m_\lambda \frac{\langle \lambda, \nu \rangle^2}{\langle \lambda, A_0 \rangle^2} \\
&= \frac{1}{\Lambda^2} \sum_{\lambda \in R_+(A_0)} m_\lambda \langle \lambda, \nu \rangle^2.
\end{aligned}$$

■

次に各タイプの対称対について具体的に normal radius と型作用素のノルムを計算する．

[1]A 型の対称対の場合．

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ を極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ の正規直交基底で, すべてのルートが

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad (1 \le i, j \le l).$$

となるようなものとする. 適当な順序によって

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) &= \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l\}, \\ \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \ (1 \le i \le l), \\ \tilde{\alpha} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l. \end{aligned}$$

となる.

最高ルート $\tilde{\alpha}$ について, どの α_i の係数も 1 だから, 基点 A_0 として全ての α_i の双対元を正規化したものを選べる. そこで, A_j を α_j に対応する基点とすると,

$$A_j = \sqrt{\frac{l+1}{j(l+1-j)}} \left(\varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_j - \frac{j}{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_i \right)$$

と表される. Weyl 群は全ての座標軸の置換によって構成されるので

単位元とは異なる $s \in W(G, K)$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle A_j, sA_j \rangle &= \frac{l+1}{j(l+1-j)} \langle \varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_j - \frac{j}{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_i, \varepsilon_{s(1)} + \cdots \varepsilon_{s(j)} - \frac{j}{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_{s(i)} \rangle \\ &= \frac{l+1}{j(l+1-j)} \Bigg(\langle \varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_j, \varepsilon_{s(1)} + \cdots \varepsilon_{s(j)} \rangle \\ &\quad - \langle \varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_j, \frac{j}{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_{s(i)} \rangle - \langle \varepsilon_{s(1)} + \cdots \varepsilon_{s(j)}, \frac{j}{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_i \rangle \\ &\quad + \left(\frac{j}{l+1} \right)^2 \left\| \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_i \right\|^2 \Bigg) \\ &= \frac{l+1}{j(l+1-j)} \left(\sharp\{ i \mid 1 \le i \le j, 1 \le s(i) \le j \} - \frac{j^2}{l+1} \right) \end{aligned}$$

となる. よって $\langle A_j, sA_j \rangle$ の最大値は

$$1 - \frac{l+1}{j(l+1-j)}.$$

となる. よって命題 4.1 より, normal radius は

$$\cos^{-1} \left(1 - \frac{l+1}{j(l+1-j)} \right).$$

型作用素のノルムを計算する.

$$R_+(A_j) = \{\varepsilon_p - \varepsilon_q \mid 1 \leq p \leq j,\ j+1 \leq q \leq l+1\},$$

であるから, 任意の $\lambda \in R_+(A_j)$ に対して, $\langle \lambda, A_j\rangle^2 = \frac{l+1}{j(l+1-j)}$ となる. 補題 4.3 より, 単位法ベクトル ν は $\mathfrak{a}$ の元で考えればよい. よって $\nu = \nu_1 + \nu_2$, ここで $\nu_1 = \sum_{p=1}^{j} \nu_1^p \varepsilon_p, \nu_2 = \sum_{p=j+1}^{l+1} \nu_2^p \varepsilon_p$, $\sum_{p=1}^{j} \nu_1^p = \sum_{p=j+1}^{l+1} \nu_2^p = 0, \sum_{p=1}^{j} (\nu_1^p)^2 + \sum_{p=j+1}^{l+1} (\nu_2^p)^2 = 1$ とおくことができる.

長さの等しいルートの重複度は互いに等しいので, $R_+(A_j)$ のすべてのルートの重複度を m としておくことができる. よって命題 4.4 より,

$$\begin{aligned} \|A_\nu\|^2 &= \frac{j(l+1-j)}{l+1} \left(\sum_{p=1}^{j} \sum_{q=j+1}^{l+1} m(\nu_1^p)^2 + \sum_{p=1}^{j} \sum_{q=j+1}^{l+1} m(\nu_2^q)^2 \right) \\ &= \frac{j(l+1-j)}{l+1} m \left\{ (l+1-j) \sum_{p=1}^{j} (\nu_1^p)^2 + j \sum_{q=j+1}^{l+1} (\nu_2^q)^2 \right\}. \end{aligned}$$

となる. よって

$$\max_\nu \|A_\nu\|^2 = \begin{cases} \frac{j(l+1-j)}{l+1} m \max(l+1-j, j) & 1 < j < l \\ \frac{lm}{l+1} & j = 1 \text{ or } j = l. \end{cases}$$

となる.

[1]B 型の対称対の場合.

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ を極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ の正規直交基底で, すべてのルートが

$$\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ (1 \leq i < j \leq l), \quad \pm\varepsilon_i\ (1 \leq i \leq l).$$

となるようなものとする. 適当な順序をとることによって,

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) &= \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l\}, \\ \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}\ (1 \leq i < l), \quad \alpha_l = \varepsilon_l, \\ \tilde{\alpha} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_l = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

となる. 最高ルート $\tilde{\alpha}$ に対して, α_1 だけがその係数が 1 であるので, 軌道の基点は

$$A_0 = \varepsilon_1.$$

のみである.

Weyl 群 $W(G,K)$ は座標軸の置換と符号の変換によって構成されるので, 任意の $s \in W(G,K)$ $(s \neq e)$ に対して, $\langle A_0, sA_0\rangle = 0$ または -1 となる.

よって命題 4.1 より, normal radius は $90°$ となる.

次に型作用素のノルムの計算をする.

$$R_+(A_0) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_1 \pm \varepsilon_i \mid 2 \le i \le l\},$$

より, 任意の $\lambda \in R_+(A_0)$ に対して, $\langle \lambda, A_0 \rangle = 1$ である. $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j (2 \le j \le l)$ のすべての重複度は等しいので, それを m とおく. 補題 4.3 により, 単位法ベクトル ν は $\mathfrak{a}$ の元で考えればよい. よって $\nu = \sum_{i=2}^l \nu_i \varepsilon_i$, $\|\nu\|^2 = \sum_{i=2}^l \nu_i^2 = 1$ とおくことができる. 命題 4.4 によって,

$$\begin{aligned}
\|A_\nu\|^2 &= \sum_{\lambda \in R_+(A_0)} m_\lambda \langle \lambda, \varepsilon_2 \rangle \\
&= m \sum_{i=2}^{l} (\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_i, \nu \rangle^2 + \langle \varepsilon_1 - \varepsilon_i, \nu \rangle^2) \\
&= m \sum_{i=2}^{l} (\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_i, \sum_{j=2}^{l} \nu_j \varepsilon_j \rangle^2 + \langle \varepsilon_1 - \varepsilon_i, \sum_{j=2}^{l} \nu_j \varepsilon_j \rangle^2) \\
&= 2m \sum_{i=2}^{l} \nu_i^2 \\
&= 2m.
\end{aligned}$$

であるから, $\max_{\nu} \|A_\nu\|^2 = 2m$.

[3] C 型の対称対の場合.

Let $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ を極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ の正規直交基底で, すべてのルートが

$$\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \le i < j \le l), \quad \pm 2\varepsilon_i \ (1 \le i \le l).$$

となるようなものとする. 適当な順序を入れると,

$$\begin{aligned}
F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) &= \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l\}, \\
\alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \ (1 \le i < l), \quad \alpha_l = 2\varepsilon_l, \\
\tilde{\alpha} &= 2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

となる. 最高ルート $\tilde{\alpha}$ に対して, α_1 がその係数が 1 である唯一の単純ルートであるから, 軌道の基点は

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{l}}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{\varepsilon_l}).$$

と表される. Weyl 群 $W(G, K)$ は B 型の場合と同じである. よって

$$N = \cos\left(1 - \frac{2}{l}\right).$$

次に型作用素のノルムを計算する.

$$R_+(A_0)=\{2\varepsilon_i \mid 1\le i\le l\}\cup\{\varepsilon_i+\varepsilon_j \mid 1\le i<j\le l\},$$

であるから, 任意の $\lambda\in R_+(A_0)$ に対して, $\langle\lambda, A_0\rangle=\frac{2}{\sqrt{l}}$ である. $2\varepsilon_i(1\le i\le l)$ の重複度を m_1, $\varepsilon_i+\varepsilon_j(1\le i\le l)$ の重複度を m_2 とおくことができる. 補題 4.3 により, 単位法ベクトル ν は $\mathfrak{a}$ の元で考えればよい. よって, $\nu=\sum_{i=1}^{l}\nu_i\varepsilon_i$, $\|\nu\|^2=\sum_{i=1}^{l}\nu_i^2=1$, $\sum_{i=1}^{l}\nu_i=0$ とおくことができる. 命題 4.4 により,

$$\|A_\nu\|^2=lm_1+\frac{l}{4}(l-2)m_2$$

となるので, $\max_{\nu}\|A_\nu\|^2=lm_1+\frac{l}{4}(l-2)m_2$ である.

[4]D 型の対称対の場合.

$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l$ を極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ の正規直交基底で,

$$\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\ (1\le i<j\le l),$$

となるものとする. 適当な順序をいれると

$$\begin{aligned}F(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) &= \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{l-1},\alpha_l\},\\ \alpha_i &= \varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\ (1\le i<l),\quad \alpha_l=\varepsilon_{l-1}+\varepsilon_l,\\ \tilde{\alpha} &= \alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l=\varepsilon_1+\varepsilon_2.\end{aligned}$$

となる. 最高ルート $\tilde{\alpha}$ に対して, 係数が 1 になる単純ルートは $\alpha_1,\alpha_{l-1},\alpha_l$ である. α_{l-1},α_l に対応する起動は, それぞれ等長的であるので, 軌道の基点としては $A_0=\varepsilon_1$ と $A_0=\frac{1}{\sqrt{l}}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_l)$, $\left(resp,\ \frac{1}{\sqrt{l}}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l)\right)$. の二つの場合を考えればよい.

1. $A_0=\varepsilon_1$ の場合.

   Weyl 群 $W(G,K)$ の作用はは座標軸の置換と, 任意の二つの座標の符号を変えるから, normal radius は 90° になる.

   次に型作用素のノルムを計算する.

   $$R_+(A_0)=\{\varepsilon_1\pm\varepsilon_j \mid 2\le j\le l\},$$

   であるから, 任意の $\lambda\in R_+(A_0)$ い対して, $\langle\lambda, A_0\rangle=1$ となる.

   $\varepsilon_i+\varepsilon_j(1\le i<j\le l)$ のすべての重複度は等しいので, それを m とおく.

C 型の場合と同様にして,

$$||A_\nu||^2 = 2m$$

となるので $\max_\nu ||A_\nu||^2 = 2m$ である.

2. $A_0 = \frac{1}{\sqrt{l}}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_l)$ の場合.

normal radius は $N = \cos^{-1}\left(1 - \frac{4}{l}\right)$ と計算される.

次に型作用素のノルムを計算する.

$$R_+(A_0) = \{\varepsilon_i + \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

となるので, 任意の $\lambda \in R_+(A_0)$ に対して, $\langle \lambda, A_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{l}}$ となる. 補題 4.3 により, 単位法ベクトル ν は $\mathfrak{a}$ の元で考えればよい. よって, $\nu = \sum_{p=1}^{l} \nu_p \varepsilon_p$, $||\nu||^2 = 1$. とおくことができる. 命題 4.4 により,

$$||A_\nu||^2 = \frac{l}{4}(l-2)m.$$

となるので $\max_\nu ||A_\nu||^2 = \frac{l}{4}(l-2)m$ である.

[5]E_6 型の対称対の場合.

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8$ を $\mathbb{R}^8$ の正規直交基底で, 部分空間 $\sum_{i=1}^{5} \mathbb{R}\varepsilon_i + \mathbb{R}(\varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_8)$ が極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ と線型同型になり, すべてルートが次のように表されるものとする.

$$\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leq i < j \leq 5),$$

$$\pm\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right\}, \quad \prod_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)} = 1.$$

適当な順序を入れれば,

$$\begin{aligned}
F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) &= \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l\}, \\
\alpha_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5) \\
\alpha_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3, \alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4 \\
\tilde{\alpha} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6.
\end{aligned}$$

となる. 最高ルート $\tilde{\alpha}$ に対して, 係数が 1 になる単純ルートは α_1 と α_6. よって, 軌道の基点としては, それぞれの双対元を正規化したものがとれるが, それらは互いに等長的であるので基点として

$$A_0 = \frac{H_{\alpha_1}}{|H_{\alpha_1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6).$$

を考えればよい.

Weyl 群の A_0 への作用を具体的に計算することにより, normal radius は $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$ となる.

次に型作用素の計算をする.

$$R_+(A_0) = \left\{ \frac{1}{2}(\varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_8) + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i \mid \prod_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)} = 1 \right\}.$$

任意の $\lambda \in R_+(A_0)$ に対して, $\langle \lambda, A_0 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる. 補題 4.3 により, 単位法ベクトル ν は $\mathfrak{a}$ の元で考えればよい. よって, $\nu = \sum_{i=1}^{5} \nu_i \varepsilon_i$, $\sum_{i=1}^{5} \nu_i^2 = 1$ とおくことができる.

命題 4.4 により,

$$\|A_\nu\|^2 = \frac{16}{3}m.$$

となる.

[6]E_7 型の対称対の場合.

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8$ を $\mathbb{R}^8$ の正規直交基底で, 部分空間 $(\varepsilon_7 + \varepsilon_8)^\perp$ が極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ と線型同型になり, すべてルートが次のように表されるものとする.

$$\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leq i < j \leq 5),$$

$$\pm\frac{1}{2}\left\{ \varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i \right\}, \quad \prod_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)} = 1.$$

適当な順序を入れれば,

$$F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 &=& \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5) \\ \alpha_2 &=& \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \alpha_3 &=& \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \alpha_4 &=& \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \\ \alpha_5 &=& \varepsilon_4 - \varepsilon_3 \\ \alpha_6 &=& \varepsilon_5 - \varepsilon_4 \\ \alpha_7 &=& \varepsilon_6 - \varepsilon_5 \end{array} \right.$$

$$\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7.$$

となる. 最高ルート $\tilde{\alpha}$ に対して, 係数が 1 になる単純ルートは α_7 のみ. よって軌道の基点としては,

$$A_0 = \frac{H_{\alpha_7}}{|H_{\alpha_7}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}\left\{ \varepsilon_6 + \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7) \right\}.$$

Weyl 群の A_0 への作用を具体的に計算することにより, normal radius は $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ となる.
次に型作用素の計算をする.

$$R_+(A_0) = \left\{ \frac{1}{2}(\varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_8) + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i \mid \prod_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)} = 1 \right\}.$$

任意の $\lambda \in R_+(A_0)$ に対して, $\langle \lambda, A_0 \rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}$ となる. 補題 4.3 により, 単位法ベクトル ν は $\mathfrak{a}$ の元で考えればよい. よって, $\nu = \sum_{i=1}^{5} \nu_i \varepsilon_i$, $\sum_{i=1}^{5} \nu_i^2 = 1$ とおくことができる.

命題 4.4 により,

$$||A_\nu||^2 = 9m$$

となる.

■

5 結果

定理 5.1 既約な対称対に対応する対称 R 空間の標準埋め込み上の錐は面積最小である.

対称 R 空間の表

制限ルート系の型	重複度	M
A_l	$(1,\ldots,1)$	$\dfrac{SO(l+1)}{S(O(i)\times O(l+1-i))}$ *1
	$(2,\ldots,2)$	$\dfrac{SU(l+1)}{S(U(i)\times U(l+1-i))}$ *2
	$(4,\ldots,4)$	$\dfrac{Sp(l+1)}{Sp(i)\times Sp(l+1-i)}$
	$(8,8)$	$F_4/Spin(9)$
B_l	$(1,\ldots,1,n)$	$\dfrac{SO(l)\times SO(l+n)}{S'(O(l-1)\times O(l+n-1))}$ *3
	$(2,\ldots,2)$	$\dfrac{SO(2l+1)}{SO(2)\times SO(2l-1)}$ *4
C_l	$(1,\ldots,1)$	$U(l)/O(l)$ *5
	$(2,\ldots,2)$	$Sp(l)/U(l)$
	$(4,\ldots,4,3)$	$Sp(l)$
	$(2,\ldots,2,1)$	$U(l)$ *6
	$(4,\ldots,4,1)$	$U(2l)/Sp(l)$
	$(8,8,1)$	$T^1\cdot E_6/F_4$
D_l	$(1,\ldots,1)$	$\dfrac{SO(l)\times SO(l)}{S'(O(l-1)\times O(l-1))}$
	$(2,\ldots,2)$	$SO(l)$ *7
	$(1,\ldots,1)$	$\dfrac{SO(2l)}{SO(2)\times SO(2l-2)}$
	$(2,\ldots,2)$	$SU(2l)/U(l)$
E_6	$(1,\ldots,1)$	$Sp(4)/Sp(2)\times Sp(2)\cdot\mathbb{Z}$
	$(2,\ldots,2)$	$E_6/Spin(10)\cdot T^1$
E_7	$(1,\ldots,1)$	$SU(8)/Sp(4)\cdot\mathbb{Z}_2$
	$(2,\ldots,2)$	$E_7/E_6\cdot T^1$

ここで

$$
\begin{aligned}
&S'(O(l-1)\times O(l-1))\\
&=\left\{\begin{pmatrix}\varepsilon & & & \\ & A & & \\ & & \varepsilon & \\ & & & B\end{pmatrix}\in SO(l)\times SO(l)\ \middle|\ \begin{array}{c}\varepsilon=\pm1, A\in O(l-1),\\ B\in O(l-1)\end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

*(*1,2 は [6], *3,4 は [2], *5 は [1], *6,7 は [7] で証明されている.)*

＜ **証明** ＞

前節で制限ルート系の各型と重複度毎に normal radius と型作用素のノルムを計算したので，上記の対称 R 空間の表にしたがって個々に Lawlor の判定条件を適用していけばよい．

例えば，制限ルート系が C 型で重複度が $(1,\ldots,1)$ の場合．$M=U(l)/O(l)$ であるから，$k=\dim C_M=\frac{1}{2}(l^2+k+2)$ である．

$$\|A_\nu\|=\frac{1}{2}\sqrt{l(l+2)}$$

より, $l \geq 4$ のとき 命題 2.4, 2.5 を使うと

$$\begin{aligned} V_C\left(\frac{l^2+l+2}{2}, \frac{\sqrt{l(l+2)}}{2}\right) &< \tan^{-1}\left(\frac{12}{l^2+l+2}\tan\left(V_C\left(6, \frac{12}{l^2+l+2}\cdot\frac{\sqrt{l(l+2)}}{2}\right)\right)\right) \\ &\leq \tan^{-1}\left(\frac{12}{l^2+l+2}\tan\left(V_C\left(6, \frac{6}{11}\sqrt{6}\right)\right)\right) \\ &\leq \tan^{-1}\left(\frac{12}{l^2+l+2}\tan\left(V_C(6, \sqrt{2})\right)\right) \\ &< \tan^{-1}\left(\frac{12}{l^2+l+2}\cdot\frac{1}{2}\right) \\ &< \frac{6}{l^2+l+2} \\ &< \frac{\pi}{2l} \end{aligned}$$

一方, normal radius N は

$$N = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2}{l}\right),$$

であるから, $l \geq 3$ のとき

$$N = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2}{l}\right) > \frac{\pi}{l}$$

となるので, $2V_C\left(\frac{l^2+l+2}{2}, \frac{\sqrt{l(l+2)}}{2}\right) < N$ が成り立つ. ゆえに定理 2.5 より, $U(l)/O(l)$ 上の錐は面積最小である.

また, 制限ルート系が E_6 型で重複度が (1,1,1,1,1,1) の場合. $M = Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2) \cdot \mathbb{Z}$ であるから $\dim C_M = 17$ である.

$$\|A_\nu\|^2 = \frac{16}{3}$$

より,

$$\begin{aligned} V_C\left(17, \frac{4}{\sqrt{3}}\right) &< \tan^{-1}\left(\frac{6}{17}\tan\left(V_C\left(6, \frac{6}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{6}{17}\tan\left(V_C\left(6, \frac{8\sqrt{3}}{17}\right)\right)\right) \\ &< \tan^{-1}\left(\frac{6}{17}\tan\left(V_C\left(6, \sqrt{2}\right)\right)\right) \\ &< \tan^{-1}\left(\frac{3}{17}\right) \\ &\fallingdotseq 10^\circ \end{aligned}$$

一方, normal radius N は 60° であったから, 明らかに $2V_C\left(17, \frac{16}{3}\right) < N$ よって $Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2) \cdot \mathbb{Z}$ 上の錐は面積最小になる.

ほかの場合もだいたい同じような計算でその面積最小性を示すことが出来る.

■

参考文献

[1] B. N. Cheng, Area-minimizing Cone-type Surfaces and Coflat Calibrations, Indiana Univ. Math. J. **37**, no.3, 1988.

[2] D. Hirohashi,T. Kanno,and H. Tasaki, Area-minimizing of the cone over symmetric R-spaces, Tsukuba. J. of Math. **24**, no.1, 2000 171–188

[3] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groupes, and Symmetric Spaces, Academic Pess, (1978).

[4] W. Y. Hsiang, On the compact homogeneous minimal submanifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **56**, 1966 5–6.

[5] T. Kanno, Area-minimizing Cones over the Canonical Embedding of Symmetric R-spaces, Indiana Univ. Math. J. **51**, no.1, 2002.

[6] M. Kerckhove, Isolated orbits of the adjoint action and area-minimizing cones, Proc. Amer. Math. Soc. **121**, 1994 497–503.

[7] G. Lawlor, A sufficient criterion for a cone to be area-minimizing, Mem. Amer. Math. Soc. **91**, no.446, 1991. Providence, RI, 1991.