数理解析研究所講究録 1293 巻 2002 年 132-143

容量不等式と再帰性の判定

京都工芸繊維大学・工芸学部　大倉　弘之 (Hiroyuki Ôkura)
Faculty of Engineering and Design,
Kyoto Institute of Technology

1. 序

本報告では対称マルコフ過程の再帰性の判定法について容量不等式を中心に紹介する.

本論に入る前に背景にある問題意識を紹介しておく. 非コンパクトなリーマン多様体 M が放物型 (parabolic) であることとその上のブラウン運動 (X_t) が再帰的であることが同値であることはよく知られている. ここでブラウン運動とは M 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ に対する熱核 $p(t,x,y)$ を M の体積要素 m に関する推移確率密度関数に持つ拡散過程, 即ち連続な道を持つマルコフ過程のことである. 特に M がユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ のときは, よく知られているように 放物型 $\iff d \leq 2$ である. 一般に 2 つの放物型リーマン多様体 M_1, M_2 の直積 $M_1 \times M_2$ が放物型であるかどうかを判定するときの一つの考え方は各 M_1, M_2 に対応する "大域的次元" d_1, d_2 を求め, それらの和 d_1+d_2 の値の大きさで判定することである. 実際, 各 M_i に対応する熱核 $p_i(t,x_i,y_i)$ の $t \to \infty$ のときの漸近挙動が $p_i(t,x_i,y_i) \asymp t^{-d_i/2}$ と示されたとすれば, 直積 $M = M_1 \times M_2$ に対する熱核は $p(t,(x_1,x_2),(y_1,y_2)) = p_1(t,x_1,y_1)p_2(t,x_2,y_2)$ で与えられるので, 判定条件

$$M \text{ が放物型} \iff \int_1^\infty p(t,x,y)\,dt = \infty \iff \int_1^\infty t^{-(d_1+d_2)/2}\,dt = \infty \iff d_1+d_2 \leq 2$$

が得られる. この判定条件は積分の発散条件であり, 結論は 2 つの熱核の漸近挙動により完全に決定されることがわかる. ただ, 熱核の挙動に $(\log t)^{-\alpha}$ のような factor が掛かる場合は "次元" という数だけでは捕え切れないこともわかる. いずれにしても, 放物型という性質はこのように量的に取り扱うことができるのである.

一般のマルコフ過程の再帰性の場合は必ずしも推移確率密度関数が存在するとは限らないので, 上と同じ形で論ずることは一般には困難だが, 再帰性の様々な特徴付けに応じて考察が可能である. 本報告では容量を用いた特徴付けに基いて容量に対する評価を主として問題にする. また, マルコフ過程に対する従属操作と直積・斜積を作るという 2 種類の操作に着目し, これらの操作によって再帰性がどの程度まで保たれるかを調べている.

これは再帰的なマルコフ過程がどれだけの範囲の操作に対して再帰性を保つかという観点からその再帰性の“強さ”を捕えようという考え方を背景にしている．即ち，再帰性を保つような操作をより多く許容するほうがより“強い”再帰性を持つと考えるのである．しかしながら，今だに“強さ”の順序構造について詳しくは明らかになっているわけではない．更なる，判定法の整備が必要と思われる．ただ，以下で与えた再帰性の判定法でも，一つの操作を施した後，尚どれだけの範囲の操作を許容するかが，出来るだけ明らかになるように配慮している．

2. 対称マルコフ過程の再帰性・推移性と容量

X を局所コンパクト可分距離空間，m を X 上のラドン測度で $\mathrm{Supp}[m] = X$ なるものとする．$\boldsymbol{M} = (X_t)$ を X 上の m-対称マルコフ過程で $T_t = e^{tL}$ を対応する $L^2(X, m)$ [1] 上の対称半群，$(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ を $L^2(X, m)$ 上のディリクレ形式: $\mathscr{E}(u, v) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, v)$，$\mathscr{F} := \{u \in L^2(X, m) : \mathscr{E}(u, u) < \infty\}$ とする．いくつかの基本的概念をまとめておく．

定義 1. $\boldsymbol{M}$ 又は $\mathscr{E}$ が**再帰的** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall f \in L^1(X, m)_+, \int_0^\infty T_t f\, dt = 0$ or ∞ m-a.e.
$\Longleftrightarrow 1 \in \mathscr{F}_e$ and $\mathscr{E}(1, 1) = 0$ ([S, FOT]),
但し，$\mathscr{F}_e$ は**拡張ディリクレ空間**といい ($u \in \mathscr{F}_e \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\{u_n\} \subset \mathscr{F}$ s.t.$u_n \to u$ m-a.e., $\sup_n \mathscr{E}(u_n, u_n) < \infty$)，$u \in \mathscr{F}_e$ なら $\mathscr{E}(u, u) := \lim_{n \to \infty} \mathscr{E}(u_n, u_n)$ が常に定まる．
$\boldsymbol{M}$ 又は $\mathscr{E}$ が**推移的** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall f \in L^1(X, m)_+, \int_0^\infty T_t f\, dt < \infty$ m-a.e.

$\boldsymbol{M}$ が既約のときは再帰的でないことと推移的であることは同値である (cf. [FOT]).

以下では $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ は**正則**であると仮定する．即ち，$C_0(X) \cap \mathscr{F}$ が $C_0(X)$ と $(\mathscr{F}, \mathscr{E}_1)$ のそれぞれに於いて稠密である．ここで，$C_0(X)$ はコンパクトサポートを持つ連続関数の全体で一様ノルムの位相を考えた空間，また $\mathscr{E}_1(\cdot, \cdot) := \mathscr{E}(\cdot, \cdot) + (\cdot, \cdot)$ である．

定義 2. K がコンパクト，G が X の開部分集合で $K \subset G$ のとき，(K, G) を capacitor(**コンデンサ**) と呼び，その**容量**を次式で定める:

$$\mathrm{Cap}(K; G) := \inf\{\mathscr{E}(u, u) : u \in \mathscr{C}(K; G)\},$$
$$\mathscr{C}(K; G) := \{u \in \mathscr{F} \cap C_0(X) : 0 \le u \le 1 \text{ on } X, u = 1 \text{ on } K, u = 0 \text{ q.e. on } G^c\}.$$

次は容量を用いた再帰性の特徴付けである (cf. [G, O 95]). 相対コンパクトな開集合の増大族 $B(r) \nearrow X$ を考える．

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\text{ が再帰的} &\Longleftrightarrow \text{任意のコンパクト } K \subset X \text{ に対して } \mathrm{Cap}(K; X) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall r > 0 \lim_{R \to \infty} \mathrm{Cap}(\overline{B(r)}; B(R)) = 0.\end{aligned} \tag{2.1}$$

[1]内積は $(\cdot, \cdot)$ で表す．

ところで，正則なディリクレ形式は次の一意的な分解をもつことが知られている．

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(u,v) &= \mathscr{E}^{(c)}(u,v)+\mathscr{E}^{(j)}(u,v)+\mathscr{E}^{(k)}(u,v) \qquad (u,v\in\mathscr{F}_{\mathrm{e}}),\\
\mathscr{E}^{(c)}(u,v) &= \frac{1}{2}\int_X d\mu^c_{\langle u,v\rangle} && \text{(local part)},\\
\mathscr{E}^{(j)}(u,v) &= \iint_{X\times X}(\tilde u(x)-\tilde u(y))(\tilde v(x)-\tilde v(y))\,dJ(x,y) && \text{(jumping part)},\\
\mathscr{E}^{(k)}(u,v) &= \int_X \tilde u(x)\tilde v(x)\,dk(x) && \text{(killing part)}.
\end{aligned}$$

ここで $d\mu^c_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ は符号付 Radon 測度に値をとる 2 次形式で**局所エネルギー測度**と呼ばれる (e.g. ブラウン運動のときは $d\mu^c_{\langle u,v\rangle}=(\nabla u,\nabla v)dm$)．$dJ(x,y)$ は $X\times X$ 上の対称な Borel 測度で $J(\{x=y\})=0$ なるもので**飛躍測度**と呼ばれる．$dk(x)$ は**死滅測度**と呼ばれる非負値 Radon 測度である．また $\tilde u$ は u の準連続変形である．

$\mathscr{E}^{(k)}\neq 0$ なら再帰的にはなり得ないので $\mathscr{E}^{(k)}=0$ を仮定すると

$$\mathscr{E}\text{ が再帰的} \iff \sup_{r>0}\lim_{R\to\infty}\mathrm{Cap}(\overline{B(r)};B(R))<\infty \text{ (cf. [O])}. \tag{2.2}$$

3. 容量不等式

上で見たように容量を評価することにより再帰性を判定することができる．最初は上からの容量不等式を示すための方法を 2 つの場合に整理して紹介する．

予備的な評価として $\varphi_{r,R}\in\mathscr{C}(\overline{B(r)};B(R))$ $(0<r<R)$ に対する評価 $\mathscr{E}(\varphi_{r,R},\varphi_{r,R})\leq e(r,R)$ が得られているとして，これを強化する方法を紹介する．

強局所型 ($\mathscr{E}=\mathscr{E}^{(c)}$) **の場合：**

定理 1 ([St 95, O 95]). $\mathscr{E}=\mathscr{E}^{(c)}$ とする．任意の分割 $\triangle: r=r_0<r_1<r_2<\cdots<r_N=R$ に対して $H_\triangle=\sum_{n=1}^N e_n^{-1}$，$H(r,R):=\sup_\triangle H_\triangle$ とおくと，

$$\mathrm{Cap}(\overline{B(r)};B(R))\leq H(r,R)^{-1} \qquad (0<r<R).$$

注意 1. この定理による評価はしばしば元々の $e(r,R)$ による評価より大きく改善される．しかし，$\sup_\triangle\sum_n H(r_{n-1},r_n)=H(r,R)$ となるので，この操作を繰り返してもそれ以上は改善されないことがわかる．

典型的な場合として exhaustion function と呼ばれる $\psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}\cap C(X)$ [2]により $B(r)=\{x:\ \psi(x)<r\}$ $(r>0)$ となっている場合，$w(r):=\mu^c_{\langle\psi,\psi\rangle}(\{0<\psi<r\})$ $(r>0)$ とおくと

[2] $\psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}$ とは任意の相対コンパクト開集合 G に対して $\psi=\psi_G$ なる $\psi_G\in\mathscr{F}$ が存在すること．また，$\mu^c_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}$ 上に拡張される．

$e(r,R) = \dfrac{w(R)-w(r)}{2(R-r)^2}$ による評価が出来るので $H(r,R) = 2\displaystyle\int_r^R \frac{d\rho}{w'(\rho)}$ により定理の評価が成り立つ．尚，$w(r)$ は**エネルギー増大関数**と呼ばれ ([St 98])，このような量の有効性は [K 96] で指摘されていた．また，$w(r)$ は常に絶対連続であることが知られている ([BH])．

非局所型 ($\mathscr{E} = \mathscr{E}^{(c)} + \mathscr{E}^{(j)}$) **の場合**：

$J_0(r,R) := J(B(r) \times B(R)^c)$ $(0 < r < R)$ とおく．$0 < r < R < r' < R'$ のとき，$0 \le \mathscr{E}(\varphi_{r,R}, \varphi_{r',R'}) \le 2J_0(R,r')$ となることがわかる．これは強局所型の場合は0であった量で，$e(r,R)$ と共にこの量を評価することが必要となる．

定理 2 ([O])．ある数 $c_0 > 1$，$K > 0$ と $(0,\infty)$ 上の正値連続単調関数 f，g に対し

$$(*)\begin{cases} 3e(r,R) \le K(f(r) \wedge f(R))g(R) & (c_0 \le R/r < c_0^2), \\ 4J_0(r,R) \le K(f(c_0^{-2}r) \wedge f(r))g(c_0^2R) & (c_0 \le R/r) \end{cases}$$

を仮定する．ただし，g は非増加とする．このとき

$$\mathrm{Cap}(\overline{B(r)}; B(R)) \le KI(r,R)^{-1} \qquad (0 < r < c_0 r \le R)$$

が成り立つ．但し，$I(r,R) = \dfrac{1}{f(R)g(R)} + \displaystyle\int_r^R \frac{d(-1/f)(\rho)}{g(\rho)} = \frac{1}{f(r)g(r)} + \int_r^R \frac{d(1/g)(\rho)}{f(\rho)}$ である．

以上では容量の上からの評価の方法を与えた．これは再帰性の十分条件を与えることになる．一方，下からの容量評価は一般に上からに比べて難しい (cf. [O 94])．以下では再帰性の必要条件を得るためには，容量評価以外の方法を用いる．

4. マルコフ過程の直積・斜積

各 $i = 1,2$ に対して $X^{(i)}$ 上の $m^{(i)}$ 対称なマルコフ過程 $\boldsymbol{M}^{(i)} := (X_t^{(i)})$ と $\boldsymbol{M}^{(1)}$ の正値連続加法的汎関数 $\boldsymbol{A} := (A_t)$ に対して $X_t := (X_t^{(1)}, X_{A_t}^{(2)})$ で定まる $\boldsymbol{M} := (X_t)$ を $\boldsymbol{M}^{(1)}$，$\boldsymbol{M}^{(2)}$ の $\boldsymbol{A}$ に関する**斜積** (skew product) といい $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{(1)} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}^{(2)}$ と書く．各 $\boldsymbol{M}^{(i)}$ に対応する $L^2(X^{(i)}, m^{(i)})$ 上のディリクレ形式を $(\mathscr{E}^{(i)}, \mathscr{F}^{(i)})$，$\mu$ を $\boldsymbol{A}$ の Revuz 測度とすると，$\boldsymbol{M}$ に対応する $L^2(X^{(1)} \times X^{(2)}, m^{(1)} \otimes m^{(2)})$ 上のディリクレ形式 $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ は $\mathscr{C}^{(i)} := \mathscr{F}^{(i)} \cap C_0(X^{(i)})$ とおいて

$$\mathscr{E}(u \otimes v, u \otimes v) := \mathscr{E}^{(1)}(u,u)(v,v)_{m^{(2)}} + (u,u)_\mu \mathscr{E}^{(2)}(v,v) \qquad (u \in \mathscr{C}^{(1)}, v \in \mathscr{C}^{(2)})$$

で特徴付けられる (cf. [O 98])．以上で，特に $A(t) = t$ のとき $\mu = m^{(1)}$ となり $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{M}^{(1)}$，$\boldsymbol{M}^{(2)}$ の**直積**であり，$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{(1)} \otimes \boldsymbol{M}^{(2)}$ と書く．$\mathrm{Cap}^{(i)}(K^{(i)}; G^{(i)})$ を $(\mathscr{E}^{(i)}, \mathscr{F}^{(i)})$ に関する $(K^{(i)}, G^{(i)})$ の容量とし，ある $c_0 > 1$，$K_i > 0$ に対して不等式

$$\mathrm{Cap}^{(i)}(\overline{B^{(i)}(r)}; B^{(i)}(R)) \le \frac{K_i}{R-r} \quad (1 \le r < c_0 r \le R; i = 1,2). \tag{4.1}$$

の成立を仮定する．従って，各 $\boldsymbol{M}^{(i)}$ は再帰的である．(逆に各 $\boldsymbol{M}^{(i)}$ が再帰的であれば開集合族 $\{B^{(i)}(r)\}$ をうまくとり，必要に応じてパラメータを付け替えることによって (4.1) が成立するようにできる場合は多い．) このとき，以下の各量と開集合族 $\{B(r)\}$ を定める：

$$
\begin{aligned}
&\rho_i(t) := m^{(i)}(B^{(i)}(t)) \vee 1, \quad \rho_\mu(t) := \mu(B^{(1)}(t)) \vee 1 \qquad (t \geq 1;\ i = 1,2);\\
&F_i(t) := \int_1^t \rho_i(\sigma)\, d\sigma, \quad G_i(s) := F_i^{-1}(s) \qquad (t \geq 1,\ s \geq 0;\ i = 1,2,\mu),\\
&C(t) := 1 + \int_0^t \frac{ds}{\rho_\mu(G_\mu(s))\rho_2(G_2(s))} \qquad (t \geq 1),\\
&B(r) := B^{(1)}(G_\mu(C^{-1}(r))) \times B^{(2)}(G_2(C^{-1}(r))) \qquad (1 \leq r < C(\infty) := \sup_{t\geq 1} C(t)).
\end{aligned}
$$

定理 3 ([O]). $C(\infty) = \infty$ ならば $\boldsymbol{M}^{(1)} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}^{(2)}$ は再帰的である．このとき，$c_1 > c_0$ とすると次が成り立つ．

$$
\mathrm{Cap}(\overline{B(r)}; B(R)) \leq \frac{K}{R-r} \qquad (1 \leq r < c_1 r \leq R < \infty). \tag{4.2}
$$

ただし，$K := \dfrac{4(K_1+K_2)(c_1-1)}{(1-1/c_0)(c_1-c_0)}$.

注意 2. $\psi_i \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}^{(i)} \cap C(X^{(i)})$ $(i = 1,2)$ に対して $B^{(i)}(r) = \{x^{(i)} :\ \psi_i(x^{(i)}) < r\}$ $(i = 1,2)$ となっていれば $B(r) = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) :\ C(F_\mu(\psi_1(x^{(1)}))) \vee C(F_2(\psi_2(x^{(2)}))) < r\}$ と書ける．

直積・斜積の再帰性の必要条件を一般的な形で与えることには今のところ成功していない．ただ，1次元拡散過程の直積に関しては既に富崎 [T] により反射・滞留壁のある場合も含めて一般的に解決している．

5. マルコフ過程の従属操作

$[0,\infty)$ 上の原点から出発する右連続な片側加法過程 $\boldsymbol{S} = (S(t), \Pi)$ を subordinator という．Lévy-Khintchin の公式：

$$
E[e^{-\lambda S(t)}] = e^{-t\psi(\lambda)}, \qquad \psi(\lambda) = b\lambda + \int_{(0,\infty)} (1-e^{-\lambda s})\, d\nu(s)
$$

により，ドリフト係数 $b \geq 0$ と Lévy 測度 $d\nu(s)$ [3] で完全に特徴付けられている．以下では

$$
\nu_1(x) := \int_{(0,\infty)} s \wedge x\, d\nu(s) = \int_0^x \nu((s,\infty))\, ds < \infty \qquad (x \geq 0)
$$

とおく．マルコフ過程 $\boldsymbol{M} = (X_t)$ の $\boldsymbol{S}$ による**従属過程** $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{S}} := (X_t^{\boldsymbol{S}})$ は $X_t^{\boldsymbol{S}} := X_{S(t)}$ で与えられる．但し，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{S}$ は独立とする．特に $0 < \beta \leq 1$ で

$$
\psi(\lambda) = \lambda^\beta \iff \begin{cases} b = 0,\ d\nu(s) = c_\beta \dfrac{ds}{s^{\beta+1}} & (0 < \beta < 1) \\ b = 1, d\nu = 0 & (\beta = 1) \end{cases}
$$

[3] ここでは $\int_{(0,\infty)} s \wedge 1\, d\nu(s) < \infty$ を満たす $(0,\infty)$ 上の正値 Radon 測度のこと

のときSを$S^{[\beta]}$(β-安定過程)，M^Sを$M^{[\beta]}$とそれぞれ書くことにする．一般にMがm-対称ならばM^Sもm-対称で，対応する$L^2(X,m)$上の半群をT_t^S，ディリクレ形式を$(\mathscr{E}^S,\mathscr{F}^S)$と書く．$T_t$の生成作用素が$L$のとき，$T_t^S$の生成作用素は$L^S=-\psi(-L)$である．$(\mathscr{E}^S,\mathscr{F}^S)$は次で特徴付けられる：

定理 4 ([O 02]). 常に$\mathscr{F}\subset\mathscr{F}^S$であり，$u\in\mathscr{F}$に対して

$$\mathscr{E}^S(u,u)\le b\mathscr{E}(u,u)+\int_{(0,\infty)}\{s\mathscr{E}(u,u)\}\wedge(u,u)\,d\nu(s) \tag{5.1}$$

$$=\Big\{b+\nu_1\Big(\frac{(u,u)}{\mathscr{E}(u,u)}\Big)\Big\}\mathscr{E}(u,u) \tag{5.2}$$

となる．さらに，$u,v\in\mathscr{F}_{\mathrm{e}}^S$のとき

$$\mathscr{E}^S(u,v)=b\mathscr{E}(u,v)+\int_{(0,\infty)}(u-T_su,v)\,d\nu(s) \tag{5.3}$$

$$=b\mathscr{E}(u,v)+\iint(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,dJ(x,y) \tag{5.4}$$

となる．但し，$dJ(x,y)=\dfrac{1}{2}\mathbf{1}_{\{x\neq y\}}dm(x)\displaystyle\int_{(0,\infty)}d\nu(s)p_s(x,dy)$である．
また，$(\mathscr{E},\mathscr{F})$が正則なら$(\mathscr{E}^S,\mathscr{F}^S)$も正則である．

$(\mathscr{E}^S,\mathscr{F}^S)$に関する容量を$\mathrm{Cap}^S(K;G)$と表わし，$S=S^{[\beta]}$ $(0<\beta<1)$のとき，$\mathrm{Cap}^{[\beta]}(K;G)$のように添え字の$S$を全て$[\beta]$に置き換えることにする．
上の定理の不等式より直ちに次の容量不等式が得られる：

定理 5 ([O 02]). (K,G)が*capacitor*で$m(G)<\infty$のとき

$$\mathrm{Cap}^S(K;G)\le\mathrm{Cap}(K;G)\Big\{b+\nu_1\Big(\frac{m(G)}{\mathrm{Cap}(K;G)}\Big)\Big\}, \tag{5.5}$$

$$\mathrm{Cap}^{[\beta]}(K;G)\le C_\beta m(G)^{1-\beta}\mathrm{Cap}(K;G)^\beta. \tag{5.6}$$

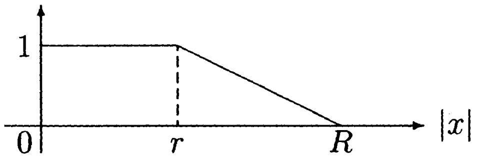
次は(2.2)よりすぐ出る：

系 1. $\bigcup_{r>0}B(r)=X$とする．M^Sは次の条件が満たされれば再帰的である：

$$\sup_{r>0}\lim_{R\to\infty}\mathrm{Cap}(\overline{B(r)};B(R))\,\nu_1\Big(\frac{m(B(R))}{\mathrm{Cap}(\overline{B(r)};B(R))}\Big)<\infty.$$

系 2. $\mathscr{E}=\mathscr{E}^{(c)}$とし，ある$\psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}\cap C(X)$により$B(r)=\{x\in X:\ \psi(x)<r\}$と書けていて，ある定数$C>0$に対して$d\mu^c_{\langle\psi,\psi\rangle}\le C\,dm$が成り立つとする．$v(\rho):=m(B(\rho))=O(\rho^{2\beta})$ $(\rho\to\infty)$ならば$M^{[\beta]}$は再帰的である．

証明. まず $0 \le r < R$, $x \in \mathbb{R}$ に対して Cut-off function



$$\theta_{r,R}(x) := \left(\frac{R-|x|}{R-r}\right)^{+} \wedge 1 \tag{5.7}$$

を考える．$w(r) := \mu^{c}_{\langle\psi,\psi\rangle}(\{0<\psi<r\}) \le C\,v(r)$ だから $\varphi_{r,R}(x) := \theta(\psi(x))$ とおくと

$$\mathrm{Cap}(\overline{B(r)}; B(R)) \le \mathscr{E}(\varphi_{r,R}, \varphi_{r,R}) \le \frac{w(R)-w(r)}{2(R-r)^2} \le \frac{C\,v(R)}{2(R-r)^2}$$

となる．よって定理 5 により次を得る：

$$\mathrm{Cap}^{[\beta]}(\overline{B(r)}; B(R)) \quad = O\Big(v(R)^{1-\beta}\Big\{\frac{v(R)}{(R-r)^2}\Big\}^{\beta}\Big) = O(\frac{v(R)}{R^{2\beta}}) = O(1)\ (R \to \infty). \quad \square$$

$\boldsymbol{M}$ がリーマン多様体上のブラウン運動のときには最後の系が適用できる (距離関数 d と 1 点 x_0 をとって $\psi = d(\cdot, x_0)$ とおくと $C=1$ ととれ，$v(r)$ は測地球の体積となる)．同様に，良い内的距離 [BM] がある場合も適用可能である．

6. $\mathbb{R}^2$ 上のある特異な拡散過程

本 § は次で定まる拡散過程 $\boldsymbol{M} = (X_t)$ とその従属過程 $\boldsymbol{M}^S$ のみを取り扱う．$\{B^{(i)}_t\}$ $(i=1,2)$ を 2 つの独立な $\mathbb{R}$ 上のブラウン運動とし，$\ell(t)$ を $\{B^{(1)}_t\}$ の $0 \in \mathbb{R}$ に於ける**局所時間**[4]とする．

$$X_t := (B^{(1)}_t, B^{(2)}_{\ell(t)}) \qquad \text{(skew product)}$$

で定まる $\mathbb{R}^2$ 上の拡散過程に対応する $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上のディリクレ形式は

$$\mathscr{E}(u,u) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\partial u(x^{(1)},x^{(2)})}{\partial x^{(1)}}\right)^2 dx^{(1)}dx^{(2)} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial u(0,x^{(2)})}{\partial x^{(2)}}\right)^2 dx^{(2)}$$

で与えられる．$B(r) := (-r^2, r^2) \times (-r, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ d(0,y) < r\}$ とおく．但し，$d(x,y) = \sqrt{|x^{(1)}-y^{(1)}|} \vee |x^{(2)}-y^{(2)}|$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}), y = (y^{(1)}, y^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ である．

定理 6. $\mathrm{Cap}(\overline{B(r)}; B(R)) \le \dfrac{2}{R-r} = 2\left(\displaystyle\int_r^R d\rho\right)^{-1} \qquad (0<r<R).$

証明. これは定理 3 が適用できる場合だが，次のように直接示すことが出来て，この方が誤差の少ない良い評価が得られる： まず $\varphi_{r,R} := \theta_{r^2,R^2} \otimes \theta_{r,R}$(cf. (5.7)) とおいて，次を得る

$$\mathscr{E}(\varphi_{r,R}, \varphi_{r,R}) = \frac{2(R+2r)}{3(R^2-r^2)} + \frac{1}{R-r} \le \frac{2}{R-r} \qquad \square$$

---

[4] $0 \in \mathbb{R}$ に於ける Dirac 測度 δ_0 を Revuz 測度とする正値連続加法的汎関数.

さて，$\psi := d(0,\cdot)$ に対して系 1 を適用して上の定理を用いれば次の結果を得る：

定理 7 ([O 02]). $(X_t^{[\beta]})$ が再帰的 $\Longrightarrow \frac{3}{4} \le \beta < 1$.

実際，$0 < r < R$ のとき

$$\mathrm{Cap}^{[\beta]}(\overline{B(r)}; B(R)) \le C_\beta (4R^3)^{1-\beta} \Big(\frac{2}{R-r}\Big)^\beta = C'_\beta \frac{R^{3-4\beta}}{(1-r/R)^\beta}$$

となるので上の定理の結果のみならず $\boldsymbol{M}^{[\beta]}$ に対する容量不等式も得られている．しかし，$\beta = 3/4$ のときは $R \to \infty$ のとき $r > 0$ について有界という以上にはあまり意味のない評価である．以下の結果はこの場合を含めて一般的に解決するものである．

定理 8 ([O 02, O]). 任意の定数 $c_0 > 1$ に対して次の不等式が成立するような定数 $K > 0$ をとることができる：

$$\mathrm{Cap}^{\boldsymbol{S}}(\overline{B(r)}; B(R)) \le K \left(\int_r^R \frac{d\rho}{b + \nu_1(\rho^4)} \right)^{-1} \qquad (0 < r < c_0 r \le R). \tag{6.1}$$

次の系は定理 7 を含む：

系 3 ([O 02]). $\displaystyle\int_1^\infty \frac{d\rho}{b + \nu_1(\rho^4)} = \infty$ ならば $\mathscr{E}^{\boldsymbol{S}}$ は再帰的である．

更に，定理 8 は $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{[3/4]}$ の場合の容量不等式も与える．実際このとき $b = 0$，$\nu_1(x) = C_{3/4} x^{1/4}$ だから

$$\mathrm{Cap}^{[3/4]}(\overline{B(r)}; B(R)) \le K \left(\int_r^R \frac{d\rho}{\rho} \right)^{-1} = \frac{K}{\log R - \log r}.$$

更に $b = 0$，$\nu_1(x) = O(x^{1/4} \log x)$ ならば

$$\mathrm{Cap}^{\boldsymbol{S}}(\overline{B(r)}; B(R)) \le K \left(\int_r^R \frac{d\rho}{\rho \log \rho} \right)^{-1} = \frac{K}{\log\log R - \log\log r}.$$

ところで，系 3 の再帰性の十分条件は，実は必要条件でもあることがわかる．これを見るために，推移性 (非再帰性) の判定法を紹介する．

$\gamma(B) := \displaystyle\int_0^\infty \Pi(S(t) \in B)\, dt \,\big(B \subset [0,\infty)\big)$ とおく．

定理 9 ([O 02]). $\int_{[0,\infty)} (f, T_s f)\, d\gamma(s) < \infty$ を満たすような $f \in L^2(X,m)$ ($f > 0$ m-$a.e.$) が存在するとき $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{S}}$ は推移的である．

実際 $\int_0^\infty (f, T_t^{\boldsymbol{S}} f)\, dt = \int_{[0,\infty)} (f, T_s f)\, d\gamma(s)$ なのでこの定理は一般的に成り立つ．次の評価は $\boldsymbol{M}$ の具体的な推移確率の評価から得られる (次 § 補題 3 参照)．

補題 1 ([O 02]). $(f, T_t f) = O(t^{-3/4})$ $(t \to \infty)$ となるような $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ $(f > 0)$ が存在する．

定理 10 ([O 02]). $\displaystyle\int_1^\infty \frac{d\rho}{b+\nu_1(\rho^4)} < \infty$ ならば $\mathscr{E}^S$ は推移的である．特に，$0 < \beta < 3/4$ なら $\mathscr{E}^{[\beta]}$ は推移的である．

これは上の 2 つの結果と一般的な不等式 $\dfrac{\gamma([0,x])}{e} \le \dfrac{1}{\psi(1/x)} \le \dfrac{ex}{b+\nu_1(x)}$ から得られる．

7. 定理 8 の証明 (あらすじ)

本 § も前 § と同じ状況考える．最初は $e(r,R)$ の評価である．

補題 2 ([O]). $\varphi_{r,R}(x) := \theta_{r^2,R^2}(x^{(1)})\theta_{r,R}(x^{(2)})$ $\quad(0 < r < R, c = R/r)$ とおくと

$$\mathscr{E}^S(\varphi_{r,R}, \varphi_{r,R}) \le \mathscr{E}(\varphi_{r,R}, \varphi_{r,R})\Big\{b + \nu_1\Big(\frac{(\varphi_{r,R}, \varphi_{r,R})_m}{\mathscr{E}(\varphi_{r,R}, \varphi_{r,R})}\Big)\Big\} \le \frac{2}{1-1/c}\frac{b+\nu_1(2R^4)}{R}.$$

次は $J_0(r,R)$ の評価に移るが，そのために元の拡散過程の推移確率 $p_t(x,dy)$ をある程度詳しく評価する必要がある．幸いこの場合は具体的な表示が得られる．

補題 3 ([O 02]). $p_t(x,dy) = p_t^{(\mathrm{s})}(x,dy) + p_t^{(\mathrm{c})}(x,dy)$ $\quad(x = (x^{(1)}, x^{(2)}), y = (y^{(1)}, y^{(2)}))$ と分解できる．但し，

$$\begin{aligned}
p_t^{(\mathrm{s})}(x,dy) &= 1_{(0,\infty)}(x^{(1)}y^{(1)})\{g(t, y^{(1)} - x^{(1)}) \\
&\qquad - g(t, y^{(1)} + x^{(1)})\}dy^{(1)}d\delta_{x^{(2)}}(y^{(2)}), \\
p_t^{(\mathrm{c})}(x,dy) &= \int_{[0,t)} q(x^{(1)}, ds)\int_0^\infty d\lambda \frac{|y^{(1)}| + \lambda}{t-s} \\
&\qquad g(t-s, |y^{(1)}| + \lambda)g(\lambda, y^{(2)} - x^{(2)})dy^{(1)}dy^{(2)}.
\end{aligned}$$

ここで，$d\delta_x(y)$ は $x \in \mathbb{R}$ に於ける *Dirac* 測度であり，$g(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/2t}$，更に，

$$q(x^{(1)}, ds) = \begin{cases} \dfrac{|x^{(1)}|}{s}g(s, x^{(1)})ds & (x^{(1)} \ne 0), \\ d\delta_0(s) & (x^{(1)} = 0). \end{cases}$$

上の表示は次の補題で使われるが，補題の証明はかなり長い．また，上の表示は推移性証明の為の補題 1 でも用いられた．理論のさらなる発展を目指すにはこの具体的な表示のどれだけの性質が実際に使われているのかを整理する必要があるが，今後の課題である．

補題 4 ([O]). $J_0(r, cr) \le \dfrac{17}{(c-1)^4}\dfrac{\nu_1(c^4r^4)}{r}$ $\quad(r > 0, c > 1)$.

定理 8 の証明. 定理 2 を適用する為に，$f(\rho) = \rho^3$，$g(\rho) = \{b + \nu_1(\rho^4)\}/\rho^4 = b/\rho^4 + \int_{(0,\infty)} (s/\rho^4) \wedge 1\, d\nu(s)$ を用いて次を示す：

$$(*) \begin{cases} \mathscr{E}^S(\varphi_{r,R}, \varphi_{r,R}) \le K_0 f(r) g(R) & (c_0 \le R/r < c_0^2), \\ J_0(r,R) \le K_1 f(c_0^{-2} r) g(c_0^2 R) & (R/r \ge c_0). \end{cases}$$

実際，上の補題を用いて，

$$\mathscr{E}^S(\varphi_{r,R}, \varphi_{r,R}) \le \frac{4c^3}{1-1/c} r^3 \frac{b + \nu_1(2R^4)}{2R^4} = \frac{4c^3}{1-1/c} f(r) g(2^{1/4} R) \le \frac{4c_0^6}{1-1/c_0} f(r) g(R);$$
$$J_0(r,R) \le \frac{17}{(c-1)^4} \frac{\nu_1(R^4)}{r} = \frac{17}{(1-1/c)^4} r^3 \frac{\nu_1(R^4)}{R^4} \le \frac{17 c_0^{14}}{(1-1/c_0)^4} f(c_0^{-2} r) g(c_0^2 R).$$

従って，定理 2 より適当な $K > 0$ があって，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \mathrm{Cap}^S(\overline{B(r)}; B(R)) &\le K \Big(\int_r^R \frac{d(-1/f)(\rho)}{g(\rho)} \Big)^{-1} = K \Big(\int_r^R \frac{3\rho^{-4}\, d\rho}{\{b + \nu_1(\rho^4)\}\rho^{-4}} \Big)^{-1} \\ &= \frac{K}{3} \Big(\int_r^R \frac{d\rho}{b + \nu_1(\rho^4)} \Big)^{-1}. \end{aligned}$$ □

8. 反射壁ブラウン運動

$\varPhi(y)$ を $[0,\infty)$ 上の滑らかな増加関数で $\varPhi(y) > 0$ $(y > 0)$ なるものとし，2 次元領域 $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, |x| < \varPhi(y)\}$ を考える．$\overline{D}$ 上の反射壁ブラウン運動 $\boldsymbol{M}$ は次のディリクレ形式に対応する拡散過程である：

$$\mathscr{E}(u,v) = \frac{1}{2} \iint_D (\nabla u, \nabla v)\, dxdy \qquad (u, v \in \mathscr{F} = H^1(D)).$$

$B(r) := \{(x,y) \in D : y < r\}$ $(r > 0)$ と $\varphi_{r,R}(x,y) := \theta_{r,R}(y)$ を考えるとき次の容量不等式が得られる：

定理 11. $\mathrm{Cap}(\overline{B(r)}; B(R)) \le \Big(\int_r^R \frac{d\rho}{\varPhi(\rho)} \Big)^{-1} \le \frac{\int_r^R \varPhi(y)\, dy}{(R-r)^2} \qquad (0 < r < R).$

これと定理 5 を用いて

$$\begin{aligned} \mathrm{Cap}^{[\beta]}(\overline{B(r)}; B(R)) &\le C_\beta m(B(R))^{1-\beta} \mathrm{Cap}(\overline{B(r)}; B(R))^\beta \\ &\le C_\beta \Big(2 \int_0^R \varPhi(y)\, dy \Big)^{1-\beta} \Big(\frac{\int_r^R \varPhi(y)\, dy}{(R-r)^2} \Big)^\beta \le C'_\beta \int_0^R \varPhi(y)\, dy / (R-r)^{2\beta} \end{aligned}$$

を得るので (2.2) より次を得る：

定理 12. $\int^R \varPhi(y)\, dy = O(R^{2\beta})$ $(R \to \infty)$ ならば $\boldsymbol{M}^{[\beta]}$ は再帰的である．

特に，$D=\{(x,y): y>|x|^\alpha\}=\{(x,y): y>0.|x|<y^{1/\alpha}\}$ $(\alpha\geq 1)$ のとき，$\beta\geq\dfrac{\alpha+1}{2\alpha}$ ならば定理 12 に於ける再帰性の十分条件は必要条件でもあるだろうか？筆者の予想は肯定的である．これは，例えば推移密度関数の上からの評価

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^2} p_t(x,y)=O\Big(1\Big/\int^{\sqrt{t}}\Phi(y)\,dy\Big)\qquad(t\to\infty)$$

が示されれば定理 9 が適用できるからである．ただ，このような $p_t(x,y)$ の評価は以外と難しいように思える．いくつかの状況証拠のようなものはあるのだが，厳密に証明できているのか今のところ不明である．ただ，$\Phi(y)$ が正定数 c の時は $[-c,c]$ 上と $[0,\infty)$ 上の反射壁ブラウン運動の直積だから 1 次元ブラウン運動と同じ評価 $O(1/\sqrt{t})$ を得，上の最後の例で $\alpha=1\iff\Phi(y)=y$ のときは 2 つの 1 次元反射壁ブラウン運動の直積と見なせるので結局 2 次元ブラウン運動と同じ評価 $O(1/t)$ を得る．これらの丁度中間の場合が問題になっているのである．更に，$\alpha>1$ のときに $p_t(x,y)$ の $O(1/t)$ による上からの評価は得られないこともわかる．なぜならば，もしそれが得られると仮定すると，定理 9 により，$\beta<1$ のとき $\boldsymbol{M}^{[\beta]}$ は推移的である $(\psi(\lambda)=\lambda^\beta$ のとき $d\gamma(s)=(s^{\beta-1}/\Gamma(\beta))\,ds$ に注意せよ)．一方，$\int^R\Phi(y)\,dy=O(R^{1+1/\alpha})$ $(R\to\infty)$ だから定理 12 より $1/2+1/(2\alpha)\leq\beta\leq 1$ のとき $\boldsymbol{M}^{[\beta]}$ は再帰的である．これは矛盾である．

参考文献

[BaH] R.F. Bass and P. Hsu: Some potential theory for reflecting Brownian motion in Hölder and Lipschitz domains, Ann. Probab., **19**, 486–501, (1991).

[Be] J. Bertoin: *Lévy Processes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1996).

[BM] M. Biroli and U. Mosco: A Saint-Venant principle for Dirichlet forms on discontinuous media, Ann. Mat. Pura Appl., **169**, (1995), 125–181.

[Bo] S. Bochner: *Harmonic analysis and the theory of probability*, Univ. California Press, Berkeley, (1955).

[BH] N. Bouleau and F. Hirsch: *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*, Walter de Gruyter, Berlin-NewYork, (1991).

[CG] T. Coulhon and A. Grigor'yan: On-diagonal lower bounds for heat kernels on non-compact manifolds and Markov chains, Duke Math. J., **89** no.1, 133–199, (1997).

[FO] M. Fukushima and Y. Oshima: On the skew product of symmetric diffusion processes, Forum Math., **1**, 103–142, (1989).

[FOT] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda: *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, Walter de Gruyter, Berlin-NewYork, (1994).

[G] A. Grigor'yan: Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, Bulletin of Amer. Math. Soc., **36**, 135–249, (1999).

[K 96] H. Kaneko: Liouville theorems based on symmetric diffusions, Bull. Soc. Math. France, **124**, 545–557, (1996).

[K 00] H. Kaneko: Recurrence and transience criteria for symmetric Hunt processes, Potential Analysis, **13**, 185–197, (2000).

[M] I. McGillivray: A recurrence condition for some subordinated strongly local Dirichlet forms, Forum Math., **9**, 229–246, (1997).

[O 89] H. Ôkura: Recurrence criteria for skew products of symmetric Markov processes, Forum Math., **1**, 331–357, (1989).

[O 94] 大倉 弘之: 対称 Markov 過程の大域的性質と容量不等式, 統計数理研究所共同研究リポート, **56**「確率過程の大域的性質の研究 (2)」, 1–22, (1994)

[O 95] H. Ôkura: Capacitary inequalities and global properties of symmetric Dirichlet forms, in *Dirichlet Forms and Stochastic Processes*, Proceedings of the International Conference, Beijing, 1993, ed. by Z. M. Ma et al., de Gruyter, Berlin, 291–303, (1995).

[O 96] H. Ôkura: Capacitary inequalities and recurrence criteria for symmetric Markov processes of pure jump type, in *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Proceedings of the Seventh Japan-Russia Symposium, Tokyo, 1995, ed. by S. Watanabe et al., World Scientific, Singapore, 387–395, (1996).

[O 98] H. Ôkura: A new approach to the skew product of symmetric Markov processes, Mem. Fac. Eng. and Design Kyoto Inst. Tech., **46**, 1–12, (1998).

[O 02] H. Ôkura: Recurrence and transience criteria for subordinated symmetric Markov processes, Forum Math., **14**, 121–146, (2002).

[O] H. Ôkura: Capacitary upper estimates for symmetric Dirichlet forms, Preprint.

[S] M. Silverstein: *Symmetric Markov Processes*, Lect. Notes in Math. **426**, Springer, Berlin-New York, (1974).

[St 95] K–Th. Sturm: Sharp estimates for capacities and applications to symmetric diffusions, Probability Theory and Related Fields, **103**, 73–89, (1995).

[St 98] K–Th. Sturm: The geometric aspect of Dirichlet forms, in "New directions in Dirichlet forms", AMS/IP Studies in Advnced Mathematics, **8**, 233–277, (1998).

[T] M. Tomisaki: On the asymptotic behaviors of transition probability densities of one-dimensional diffusion processes, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, **12**, 819–834, (1977).