数理解析研究所講究録 1294 巻 2002 年 110-120

ベクトル値超幾何微分方程式の分解

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科
東京工業大学・大学院理工学研究科
落合 啓之 (Hiroyuki Ochiai)

Abstract: 3次元錘多様体上の調和1形式をガウスの超幾何函数を用いて書き表す。連立の微分方程式を具体的に分解する手法による。最後の節では、二通りに分解される超幾何型の微分作用素についての性質を述べる。藤井道彦との共同研究に基づく。詳細は本論文を参照。

1 Introduction

1.1 超幾何函数

球函数の満たす微分方程式はおおむね超幾何関数的であると思われている。表現に付随した特殊函数は、不変微分作用素(たとえば展開環の中心元)の同時固有関数であるというタイプの微分方程式を満たすことが多い。ルジャンドル多項式、ベッセル函数などがこのような例である。[ホール・リトルウッド多項式のような p 進球函数的なものはこの範囲に入らないので、今日の話の範疇には入らない。差分類似を考えることを否定しないが。] これらは超幾何函数(合流型も含む) で表示することができる。超幾何函数、球関数ともその多変数化は由緒正しく非自明で楽しい数学である。著名なものとして、球函数の場合は関口・Heckmann-Opdam という名前で呼ばれることの多い、ルート系に付随した微分方程式系があり、超幾何函数に対しては(青本) Gelfand の超幾何函数という大きな理論がある。背後にある幾何は、球函数の場合は G/K 的なものであり、超幾何函数はグラスマン的、すなわち G/P 的なものである。表現論的には、前者は固有空間表現の一般化、後者は(退化) 主系列表現に属するとみなすことができる。球函数を超幾何函数で表示するといういとなみは、超幾何函数側も良くはわかっていないという文脈では、G/K 的なものと G/P 的なものを結びつけることであり、一般的な状況での戦略・指針は明らかではない。漠然と両者は違うものであろうという感覚があるに過ぎなく、それも厳に正しいかどうかは予断を許さない。

(帯) 球函数の微分方程式は K の自明な表現に付随するものであるが一般の K-type の時にそれを考えると、ベクトル値の微分方程式系 (holonomic system) が得られる。表現論的・特殊函数論的にともに重要である。この場合に変数分離を行って Cartan subalgebra の座標で書いた微分方程式系も超幾何的な微分方程式と言って良いであろう。ルートの重複度に当たるパラメータを連続化することができるか、超幾何函数・スカラー値の球函数による表示を持つかそれとも新しい函数になるかなど、解決すべき基本的な問題も多い。

今回の話はこれと少しずれるが、独立変数が1個（つまり常微分方程式）の連立系（ベクトル値）で連続なパラメータが自然に入るものを扱う。そして、この系の解がガウスの超幾何函数でかけること、すなわち方程式 (D 加群) としては、2階のものの直和に分解することを示す。この結果のように、方程式の見かけや由来がベクトル値であっても (かなりな計算することによって) 既存のものに帰着されてしまう、逆に否定的に表現すれば新しい函数を定義していない、ということが起こることに注意したい。

1.2 考える微分方程式系

In this article, we consider the following system of differential equations.

$$\begin{cases} 4z^2 f''(z) + 4zf'(z) - \left(\dfrac{1-\lambda z + z^2}{(1-z)^2} + \dfrac{a^2+b^2 z}{1-z}\right) f(z) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\dfrac{2a}{(1-z)^{3/2}} g(z) - \dfrac{2bz^{3/2}}{(1-z)^{3/2}} h(z) = 0, \\ 4z^2 g''(z) + 4zg'(z) - \left(\dfrac{1-\lambda z}{(1-z)^2} + \dfrac{a^2+b^2 z}{1-z}\right) g(z) - \dfrac{2a}{(1-z)^{3/2}} f(z) = 0, \\ 4z^2 h''(z) + 4zh'(z) - \left(\dfrac{-\lambda z + z^2}{(1-z)^2} + \dfrac{a^2+b^2 z}{1-z}\right) h(z) - \dfrac{2bz^{3/2}}{(1-z)^{3/2}} f(z) = 0. \end{cases}$$

We fix the parameters $a > 0, b > 0$, and $\lambda \in \mathbf{R}$. The independent variable z is considered to be $0 < z < 1$, for the moment. The branches of the multi-variable functions $z^{1/2}$ and $(1-z)^{3/2}$ are taken to be real for $0 < z < 1$. The derivation $' = \frac{d}{dz}$. We have three unknown functions (dependent variables) f, g and h. As is discussed later, by the elimination of dependent variables, this system is equivalent to some Fuchsian ordinary differential equation of 6th order with three (regular) singular points $0, 1, \infty$.

Problem 1 *Can we write the solutions (f, g, h) of this differential equations in terms of Gauss hypergeometric functions ? If we can, then write down explicitly.*

1.3 双曲幾何からの動機

いくらなんでも唐突なので方程式の由来を記しておく。[5] [6].

3次元の双曲多様体は、局所的に $(\mathbf{H}^3, PSL_2(\mathbf{C}))$ をモデルとするようなRiemann 多様体である。ここで $\mathbf{H}^3 = PSL_2(\mathbf{C})/PSU_2 \sim SO_0(3,1)/SO(3)$ は階数1の Riemann 対称空間のひとつである。有限体積の完備な3次元双曲多様体はrigidityを持つため、(完備なままでの) 変形は存在しない。したがって個々のものがばらばらに存在して、調べづらいため、それらを連続的な (変形の) 族でつなぐためのひとつのアイディアは何らかの特異性を許すことである。錘多様体はチーズケーキ[1]状の3次元の双曲多面体の2側面を貼り合せて得られる図形をモデルとする。ケーキの中心に当たる部分 (芯) を特異集合と呼ぶ。錘角を $\alpha > 0$ とする。$\alpha = 2\pi$ のときが特異性のない場合であり、$\alpha > 2\pi$ の場合も込めて考える。特異集合の周りで、特異集合からの距離を r, 特異集合に沿った距離を ϕ, 特異集合を回る角度を $(\theta \mod \alpha)$ と座標を取ると、特異集合の周りでの Riemann 計量は $dr^2 + \sinh^2 r d\theta + \cosh^2 r d\phi^2$ となる。局所的にこのような構造を持った Riemann 多様体を錘多様体と呼ぶ。特異集合は絡み目 (link) すなわち S^1 の有限個の disjoint union をなし、各 S^1 成分ごとに錘角が別個でよい。

元に戻って、有限体積の3次元双曲錘多様体の変形を考える。Hodgson-Kerckhoff はそのすべての錘角が 2π 以下の場合に、錘角を固定した無限小変形が表すコサイクルのコホモロジー類の消滅を示し、角度を固定する変形が存在しないことを示した。変形の一意性が示されれば、ホロノミー表現の次元の計算などで存在も従うので、錘角を微小に変化させる変形が一意的に存在することが (錘角の条件の下で) 示されたことになる。このコホモロジーの消滅は、特異集合の近傍での接束に値をとる調和ベクトル場の L^2 性を調べることによっている。

彼らはこの微分方程式 $\Delta v = 0$ を双対な微分形式に対する微分方程式 $(\Delta + 4)\tau = 0$ に直し、上述の (r, ϕ, θ) 座標で変数分離することで、r 座標に関するベクトル値の連立微分方程式を書いた。[これをさらに $z = \tanh^2 r$ の変数で書き直したものが前節の方程式である。] f, g, h は標準的な座標で書いた微分形式 (3次元) を基底として書いたときの係数に表れる函数であり、パラメータ a, b は錘多様体の特異集合周りの幾何から決まる。具体的には、特異集合 (S^1 と同相) の長さを l, 特異集合に沿って ϕ が一周したときの θ の増加が t であるとしたとき、$n, m \in \mathbf{Z}$ を θ, ϕ 方向の Fourier mode としたとき $a = (2\pi/\alpha)n$, $b = (2\pi/l)m + (\alpha t)/l$ で与えられる。そして、固有値 $\lambda = -2$ の場合が調和ベクトル場の場合に当たる。

Hodgson-Kerckhoff はこの方程式の指数を見ることでコホモロジー類の消滅を証明し、微小な変形の一意性を導いた。この方程式の解の具体的な函数で表示は得られていなかったが、ここでは、これがガウスの超幾何函数で書けること、およびその具体形を書き切れることを示したい。これらの表示式が、大域的な変形やその結果としての多様体の退化の様子、あるいは錘角が 2π 以下であるという仮定を超えるなどに役立つことを期待しているが、

[1]なぜチーズなのかは謎

これらは研究途上である。

通常、Laplacian の変数分離などで現れる微分作用素のようにルートの重複度などに由来する自然数値のパラメータを含む場合、そのパラメータを複素変数に拡張することが超幾何関数的に大切である。今の場合は入っているパラメータ a, b, λ はすべて(離散変数でなく)連続変数であり、しかも幾何学的由来を持つ量であることが著しい。

2 Results

結果を述べるとともに、出てくる微分作用素の間の関係式を参考のためいくつか書いておく。ここでよく使う記号として、$\partial = d/dz$ とし、z を変数とする２階の Fuchs 型微分作用素

$$P[p,q;r,s,t] := \partial^2 + \left(\frac{p}{z} + \frac{q}{z-1}\right)\partial + \left(\frac{r}{z^2(z-1)} + \frac{s}{z(z-1)} + \frac{t}{z(z-1)^2}\right)$$

with parameters $p, q, r, s, t \in \mathbf{C}$ を考える。準備として、

Lemma 2 *(Conjugation by elementary power functions.) For* $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} P[p,q,r,s,t]z^\lambda &= z^\lambda P[p+2\lambda, q; r-\lambda(\lambda+p-1), s+\lambda(\lambda+p+q-1), t], \\ P[p,q,r,s,t](z-1)^\lambda &= (z-1)^\lambda P[p, q+2\lambda; r, s+\lambda(\lambda+p+q-1), t+\lambda(\lambda+q-1)]. \end{aligned}$$

2.1 Splittings

The differential equations under consideration is of the form:

$$\begin{aligned} 2z^2(1-z)^{3/2}A_1 f &= ag + 2bz^{3/2}h, \\ 2z^2(1-z)^{3/2}R_3 g &= af, \\ 2z^2(1-z)^{3/2}R_1 h &= bz^{3/2}f. \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} A_1 &:= P\left[1,0;\frac{a^2+1}{4},\frac{b^2-1}{4},\frac{\lambda-2}{4}\right], \\ R_3 &:= P\left[1,0;\frac{a^2+1}{4},\frac{b^2}{4},\frac{\lambda-1}{4}\right], \\ R_1 &:= P\left[1,0;\frac{a^2}{4},\frac{b^2-1}{4},\frac{\lambda-1}{4}\right]. \end{aligned}$$

Here we retain the notation in [4], so the numbering of the operators presented here may look funny.

Proposition 3 *(Derivation of the single equation)*

$$\begin{aligned} bf &= 2z^{1/2}(1-z)^{3/2}R_1 h, \\ abg &= z^{5/2}(1-z)^3 R_2 h, \end{aligned}$$

where

$$R_2 := z^{-1/2}(1-z)^{-3/2}A_1 z^{1/2}(1-z)^{3/2}R_1 - \frac{b^2}{4}z^{-1}(1-z)^{-3}.$$

Let

$$X_h := z^{-5/2}(1-z)^{-3}R_3 z^{5/2}(1-z)^3 R_2 - \frac{a^2}{4}z^{-4}(1-z)^{-3}R_1.$$

(X_h is of 6th order.) Then

$$X_h h = 0.$$

If $ab \neq 0$, then the original differential equations for (f,g,h) is equivalent to $X_h h = 0$.

We define the conjugated operators

$$\bar{A}_1 = P\left[2,3;\frac{a^2}{4},\frac{b^2+15}{4},\frac{\lambda+1}{4}\right] = z^{-1/2}(1-z)^{-3/2}A_1 z^{1/2}(1-z)^{3/2}.$$

We introduce several differential operators, which will be used in the following theorem. It is non-trivial to find these operators, and easy to check all the relations exhibited in the theorem.

$$\begin{aligned} P_1 &= P\left[1,-1;\frac{a^2}{4},\frac{b^2+1}{4},\frac{\lambda+1}{4}\right], \\ P_2 &= P\left[2,4;\frac{a^2+2a}{4},\frac{b^2+25}{4},\frac{\lambda+7}{4}\right], \\ P_3 &= P\left[6,6;\frac{a^2-2a-24}{4},\frac{b^2+121}{4},\frac{\lambda+23}{4}\right], \\ P_4 &= P\left[3,3;\frac{a^2-4}{4},\frac{b^2+25}{4},\frac{\lambda+1}{4}\right], \\ \bar{P}_1 &= P\left[5,7;\frac{a^2-16}{4},\frac{b^2+121}{4},\frac{\lambda+33}{4}\right] = z^{-2}(1-z)^{-4}P_1 z^2(1-z)^4, \\ P_{10} &= P\left[2,4;\frac{a^2}{4},\frac{b^2+25}{4},\frac{\lambda+7}{4}\right] = P_2 + \frac{a}{2z^2(1-z)}. \end{aligned}$$

Theorem 4 *(Factorization and splitting.)*

(i) [4, Theorem 3.1.1](Factorization)

$$X = P_3 P_2 P_1 = P_3(-a) P_2(-a) P_1.$$

(ii) [4, Theorem 3.1.2](Projection operators)

$$\bar{P}_1 P_4 - P_3 P_2 = \frac{2-\lambda}{4z^2(1-z)^4}$$

(iii) (division by P_1)

$$R_1 - P_1 = \frac{1}{z-1}\left(\partial - \frac{1}{2(z-1)}\right).$$

(iv) (division by P_1) [4, Lemma 4.1.1]

$$R_2 = P_{10} P_1 - \frac{a^2}{4z^3(1-z)^3},$$

or equivalently,

$$P_{10} P_1 - \bar{A}_1 R_1 = -\frac{a^2 + b^2 z^2}{4z^3(1-z)^3}.$$

Corollary 5 *Suppose $\lambda \neq 2$. Then $X_h h = 0$ if and only if*

$$h = v + \frac{4}{2-\lambda} z^2 (1-z)^4 P_4 (w^+ + w^-),$$

where $P_1 v = 0$, $P_2 w^+ = 0$ and $P_2(-a) w^- = 0$.

問題の位置づけについて注意しておきたい。もともとの連立系、あるいは6階の方程式 $X_h h = 0$ からモノドロミーを計算することは自明でない、というかできない。Theorem 4 (i) のように、モノドロミーが(もとの微分方程式系が、と言っても同じ)可約であるという事実も計算しないとわからない。分解すること自体が偶然によっているという可能性もあり、からくりが解明されているわけではない。さらに、Corollary のように、分解した成分が直和に分かれることも自明ではないし、その分解への準同型を与える写像を書き下すことも一般論からは保障されない。結果としては、2階の超幾何の3つの直和に分解することがわかる。もし、モノドロミーが元の方程式でもわかっていれば(少なくとも抽象的には)この事実が成り立つことがわかるが、元の方程式のままではモノドロミーはわからない。むしろこの結果を利用して初めてモノドロミーがわかる。

2.2 Another elimination

$$\begin{aligned} af &= 2z^2(1-z)^{3/2}R_3 g, \\ abh &= z^{5/2}(1-z)^3 R_4 g, \end{aligned}$$

where

$$R_4 := z^{-2}(1-z)^{-3/2}A_1 z^2(1-z)^{3/2}R_3 - \frac{a^2}{4}z^{-1}(1-z)^{-3}.$$

Define

$$X_g := z^{-5/2}(1-z)^{-3}R_1 z^{5/2}(1-z)^3 R_4 - \frac{b^2}{4}z^{-1}(1-z)^{-3}R_3,$$

then $X_g g = 0$.

Theorem 6 *[4, Theorem 3.1.4]* $X_g = z^{-1/2}X_h z^{1/2}$.

This theorem is not necessary to prove any formula given here. However, it plays the crucial role to find out the operators P_4, etc. See for detail [3].

Suppose we are given a short exact sequence of D-modules

$$0 \to D/DQ \to D/DQP \to D/DP \to 0$$

with some differential operators P and Q. This sequence is split if and only if there exists some operators A and B such that $PA+BQ=1$. This equation looks similar to something like $PA+QB=1$, which is much easier to handle. In general, it is not easy to find an intertwining operator between given two (holonomic) D-modules. See [8] for the recent status. It is enough lucky that the theorem above provides an operator belongs to $\mathrm{End}_D(D/DQP)$ which turns to be non-scalar in our case. Using this operator, we can construct the projection operator onto the factor module.

We introduce

$$\begin{aligned} P_5 &= P\left[2,-1;\frac{a^2-1}{4},\frac{b^2}{4},\frac{\lambda+1}{4}\right] = z^{-1/2}P_1 z^{1/2}, \\ P_6 &= P\left[4,4;\frac{a^2-9}{4},\frac{48+2b\sqrt{-1}+b^2}{4},\frac{\lambda+7}{4}\right], \\ P_7 &= P\left[6,6;\frac{a^2-25}{4},\frac{120+2b\sqrt{-1}}{4},\frac{\lambda+23}{4}\right], \\ P_8 &= P\left[7,8;\frac{a^2+2b\sqrt{-1}-35}{4},\frac{b^2+196}{4},\frac{\lambda+43}{4}\right], \\ P_9 &= P\left[3,5;\frac{a^2+2b\sqrt{-1}-3}{4},\frac{48+2b\sqrt{-1}+b^2}{4},\frac{\lambda+13}{4}\right], \\ \bar{P}_5 &= z^{-3}(1-z)^{-4}P_5 z^3(1-z)^4. \end{aligned}$$

Theorem 7 *(i) [4, Theorem 3.1.5]*

$$X_g = P_7P_6P_5 = P_7(-b)P_6(-b)P_5.$$

(ii) [4, Theorem 3.1.6]

$$\bar{P}_5P_9 - P_8P_6 = \frac{\lambda-2}{4}z^{-3}(1-z)^{-4}.$$

2.3 Degenerate case

Due to the careful choice of our operators listed above, the corresponding results for the case of degenerate parameters $ab = 0$ can be also obtained by the specialization $a = 0$ or $b = 0$. Geometrically, this degeneration seems to correspond to the cusps of the hyperbolic 3 manifold. We only list up the operators. The splitting of the system of differential equations is similarly stated as in the previous subsection.

(i) [4, §4.2] $T_2^{a=0} = \frac{2-\lambda}{2}z^{1/2}(1-z)^2$,

(ii) (6) $= R_3^{a=0} = P\left[1, 0; \frac{1}{4}, \frac{b^2}{4}, \frac{\lambda-1}{4}\right] = z^{1/2}(1-z)^2 P_2^{a=0} z^{-1/2}(1-z)^{-2}$.

(iii) [4, Theorem 3.2.1] $R_2^{a=0} = P_2^{a=0}P_1^{a=0}$.

(iv) (13) $= R_1^{b=0}$.

(v) [4, Theorem 3.3.1] $R_4^{b=0} = P_6^{b=0}P_5^{b=0}$.

(vi) (16) $= A_1^{a=b=0}$, (17) $= R_3^{a=b=0}$, (18) $= R_1^{a=b=0}$.

3 Discussion

In the case $\lambda = 2$, several statements above do not hold. We have no intrinsic explanation at the moment, but try to understand in terms of the decomposition of differential operators.

Let us recall Theorem 4(ii): for $\lambda = 2$, we have $\bar{P}_1P_4 = P_3P_2$. In such a case, the exponents at given as follows

	$z=0$	$z=1$	$z=\infty$
$\bar{P}_1$	α_3+2, α_4+2	β_3+2, β_4+2	γ_3, γ_4
P_4	α_1, α_2	β_1, β_2	γ_1, γ_2
P_3	α_2, α_3+2	β_2, β_3+2	γ_3, γ_4
P_2	α_1, α_4+2	β_1, β_4+2	γ_1, γ_2

with the condition

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2&=1,\\ \alpha_3+\alpha_4+\beta_3+\beta_4+\gamma_3+\gamma_4&=1,\\ \alpha_1+(\alpha_4+2)+\beta_1+(\beta_4+2)+\gamma_1+\gamma_2&=1.\end{aligned}$$

The corresponding operators are of the form

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= P\left[1-\alpha_3-\alpha_4, 1-\beta_3-\beta_4; -\alpha_3\alpha_4, \gamma_3\gamma_4, \beta_3\beta_4\right],\\ P_4 &= P\left[1-\alpha_1-\alpha_2, 1-\beta_1-\beta_2; -\alpha_1\alpha_2, \gamma_1\gamma_2, \beta_1\beta_2\right],\\ P_3 &= P\left[1-\alpha_3-(\alpha_2-2), 1-\beta_3-(\beta_2-2); -\alpha_3(\alpha_2-2), \gamma_3\gamma_4, \beta_3(\beta_2-2)\right],\\ P_2 &= P\left[1-\alpha_1-(\alpha_4+2), 1-\beta_1-(\beta_4+2); -\alpha_1(\alpha_4+2), \gamma_1\gamma_2, \beta_1(\beta_4+2)\right].\end{aligned}$$

We will give a classification of such operators satisfying $\bar{P}_1P_4 = P_3P_2$.

Proposition 8 *These operators satisfies $\bar{P}_1P_4 = P_3P_2$ if and only if one of the following (i) or (ii) holds.*

(i) $\gamma_3\gamma_4 = (\alpha_4+\beta_4)(\alpha_3+\beta_3-1)$ *and* $\gamma_1\gamma_2 = (\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2-1)$.

(ii) $\alpha_1 = \alpha_3+1$, $\beta_1 = \beta_3+1$ *and* $\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3\gamma_4 = 3(\alpha_1+\beta_1+\alpha_4+\beta_4)$.

3.1 The reducible case

We discuss each case separately. Let us consider the case (i) in this subsection. Since $\alpha_2+\beta_2 = \alpha_4+\beta_4+4$, we also have $\gamma_3\gamma_4 = (\alpha_2+\beta_2-4)(\alpha_3+\beta_3-1)$ and $\gamma_1\gamma_2 = (\alpha_1+\beta_1)(\alpha_4+\beta_4+3)$. Hence we obtain the following factorization:

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= q[1-\alpha_3, 1-\beta_3]q[-\alpha_4, -\beta_4],\\ P_4 &= q[1-\alpha_2, 1-\beta_2]q[-\alpha_1, -\beta_1],\\ P_3 &= q[1-\alpha_3, 1-\beta_3]q[-\alpha_2+2, -\beta_2+2],\\ P_2 &= q[-1-\alpha_4, -1-\beta_4]q[-\alpha_1, -\beta_1],\end{aligned}$$

where

$$q[\alpha,\beta] := \partial + \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1}.$$

Note that, under the condition $\alpha_2+\beta_2 = \alpha_4+\beta_4+4$, we have

$$q[-\alpha_4, -\beta_4]q[1-\alpha_2, 1-\beta_2] = q[-\alpha_2+2, -\beta_2+2]q[-1-\alpha_4, -1-\beta_4],$$

which assures the relation $\bar{P}_1P_4 = P_3P_2$.

3.2 The case (ii)

The exponents are

	$z=0$	$z=1$	$z=\infty$
$\bar{P}_1$	α_1+1, α_4+2	β_1+1, β_4+2	γ_1+3, γ_2+3
P_4	α_1, α_2	β_1, β_2	γ_1, γ_2
P_3	α_1+1, α_2	β_1+1, β_2	γ_1+3, γ_2+3
P_2	α_1, α_4+2	β_1, β_4+2	γ_1, γ_2

with $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1$ and $\alpha_2+\beta_2=\alpha_4+\beta_4+4$. The dimension of the parameters is 6. The reason why the equality $\bar{P}_1P_4=P_3P_2$ does hold has not yet been well understood.

The operators $\bar{P}_1$, P_2, P_3 and P_4 in §2 with $\lambda=2$ have exponents

$$\begin{array}{lll} \alpha_1=-1-(a/2), & \beta_1=-3/2, & \gamma_1=(5+b\sqrt{-1})/2, \\ \alpha_2=-1+(a/2), & \beta_2=-1/2, & \gamma_2=(5-b\sqrt{-1})/2, \\ \alpha_3=-2-(a/2), & \beta_3=-5/2, & \gamma_3=(11+b\sqrt{-1})/2, \\ \alpha_4=-2+(a/2), & \beta_4=-7/2, & \gamma_4=(11-b\sqrt{-1})/2. \end{array}$$

These are a special case of the case (ii).

References

[1] D. Cooper, C.D. Hodgson and S.P. Kerckhoff, Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds, MSJ Memoirs **5** (2000), Math. Soc. Jpn.

[2] M. Fujii and H. Ochiai, An expression of harmonic vector fields of hyperbolic 3-cone-manifolds, in terms of the hypergeometric functions, in 双曲空間及び離散群の研究 II, 数理解析研究所講究録 **1270**(2002) 112–125.

[3] M. Fujii and H. Ochiai, An algorithm for solving linear ordinary differential equations of Fuchsian type with three regular singular points, preprint, 2002.

[4] M. Fujii and H. Ochiai, Harmonic vector fields on hyperbolic 3-cone-manifolds, preprint, 2002.

[5] C. Hodgson and S. Kerckhoff, Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery, J. Diff. Geom. **48** (1998) 1–59.

[6] S. Kojima, 結び目・3次元多様体と双曲幾何, 数学 **49** (1997), no. 1, 25–37.

[7] N. Takayama and T. Oaku (eds) J. Symbolic Computation (2001) **32**.

[8] H. Tsai and U. Walther, Computing homomorphisms between holonomic D-modules, in [7] 597–617.

E-mail: ochiai@math.nagoya-u.ac.jp
Department of Mathematics, Nagoya University,
Furo, Chikusa, Nagoya 464-8602.