数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 80-91

5 次元超球上のある保型形式

北海道大学大学院理学研究科　松本圭司 (Keiji Matsumoto)
Division of Mathematics, Graduate School of Science,
Hokkaido University
東京大学大学院数理科学研究科　寺杣友秀 (Tomohide Terasoma)
Department of Mathematical Science,
University of Tokyo

1　序

Gauss の超幾何微分方程式の多変数版として、n 個の独立変数 $x_1,\ldots,x_n$ と $\sum_{j=1}^{n+3}\mu_j = 2$ をみたす $(n+3)$ 個のパラメーター $\mu_1,\ldots,\mu_{n+3}$ をもつ階数 $(n+1)$ の Appell-Lauricella の超幾何微分方程式系 F_D が知られている。局所的に得られる $(n+1)$ 個の線型独立な解 ψ_j たちは独立変数の空間 $X=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_j\neq 0,1,\infty,x_k\ (j\neq k)\}$ 全体に解析接続することができるので、多価正則写像

$$p : X \ni (x_1,\ldots,x_n)\mapsto(\psi_0,\ldots,\psi_n)\in\mathbb{P}^n$$

が得られる。パラメーター $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_{n+3})$ が

$$0<\mu_j<1,\quad (1-\mu_j-\mu_k)^{-1}\in\mathbb{N}\cup\infty \text{ for } j\neq k \tag{1}$$

をみたすとき、p の像 $p(X)$ は n 次元複素超球 $\mathbb{B}_\mu$ 内で open dence となり、像 $p(X)$ をモノドロミー群 Γ_μ で割った空間 $p(X)/\Gamma_\mu$ と X とは同型となることが [DM] や [T] で示されている。$n\geq 2$ に対して条件 (1) をみたす μ は有限個で $n>5$ に対してはそのような μ は存在せず、$n=5$ に対しては 1 通り、$n=4$ に対しては 1 通り、$n=3$ に対しては 7 通り、$n=2$ に対しては 27 通りある。

これらの μ に対して、周期写像 p の逆写像を記述する $\mathbb{B}_\mu$ 上のモノドロミー群に関する保型形式を具体的に構成することは自然な要請である。実際

$n=2,3$ に対するいつくかの μ に関して [K1], [Ma1], [Ma2], [P], [S] で研究されている。この講究録では条件 (1) をみたす $n=5$ に対する唯一のパラメーター $\mu=(1/4,\ldots,1/4)$ に対して [MT2] でなされた p^{-1} の研究で論文では割愛したいくつかの具体的な計算を紹介する。

この μ に対しては、独立変数の空間 X は $x_6=0$, $x_7=1$, $x_8=\infty$ とみなすことにより、$\mathbb{P}^1$ 上の 8 点配置空間 M_{8pts} とみなすことができる。$n=4$ に対して条件 (1) をみたす唯一のパラメーターは $(1/2,1/4,\ldots,1/4)$ であり、8 点配置空間 M_{8pts} で $x_j=x_k$ と退化した場合に相当している。$n=2,3$ に対して条件 (1) をみたすパラメーターで μ_j たちの共通分母が 4 のものが 4 つあるが、これらは 8 点配置空間 M_{8pts} のある種の退化した配置と対応している。結局 $\mu=(1/4,\ldots,1/4)$ に対して p^{-1} を記述すれば、μ_j たちの共通分母が 4 のものすべてに対して周期写像の逆写像を与えることになる。

[MT2] の主定理を述べるために M_{8pts} の射影空間への埋め込みを与える。集合 $\{1,\ldots,8\}$ を 2 個ずつ 4 組に分けたもの $\{\{j_1,j_2\},\ldots\{j_7,j_8\}\}$ を $\{1,\ldots,8\}$ の $(2,2,2,2)$-partition と呼ぶ。$\{1,\ldots,8\}$ の $(2,2,2,2)$-partitions 全体の集合を $P(2^4)$ で表す。$P(2^4)$ は $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}/4!=105$ 個の元からなる。各 $(2,2,2,2)$-partition $r=\{\{j_1,j_2\},\ldots\{j_7,j_8\}\}$ に対して、多項式 $P_r=\prod_{k=1}^{4}(x_{j_{2k-1}}-x_{j_{2k}})$ を定める。P_r は射影変換に関する relative invariants となっているので、写像

$$P: M_{8pts}\ni x\mapsto(\ldots,P_r,\ldots)\in\mathbb{P}^{104}\quad(r\in P(2^4))$$

が得られる。この写像 P は埋め込みであることが [K2] で示されている。

Theorem 1 モノドロミー群 Γ_μ に関する *105* 個の保型形式 $\mathcal{T}_r^{(2)}$ で以下の図式が可換となるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} M_{8pts} \arrow[rd, "P"] \arrow[d, "p"'] & \\ \mathbb{B}_\mu/\Gamma_\mu \arrow[r, "\mathcal{T}^{(2)}"'] & \mathbf{P}^{104}, \end{tikzcd}$$

ここで写像 $\mathcal{T}^{(2)}$ は 105 個の保型形式 $\mathcal{T}_r^{(2)}$ たちの比で与えられる。特に $\mathcal{T}^{(2)}$ の像は P の像と一致し、$\mathcal{T}^{(2)}\circ P^{-1}$ は p の逆写像を与える。

以下で保型形式 $\mathcal{T}_r^{(2)}$ の具体的な構成を行なう。

2 $\mathbb{P}^1$ の 4 次分岐被覆 C

超幾何微分方程式系 F_D には解の積分表示

$$\int_0^1 (z-x_1)^{-\mu_1}\cdots(z-x_n)^{-\mu_n} z^{-\mu_{n+1}}(z-1)^{-\mu_{n+2}}dz$$

がある。$\mu=(1/4,\dots,1/4)$ のとき、この積分表示は代数曲線

$$C: w^4=\prod_{j=1}^{8}(z-x_j)$$

の正則 1-from $\frac{dz}{w}$ のサイクルに沿った積分とみなすことができる。この節では C (の非特異モデル) の幾何学的事実を整理しておく。

曲線 C 上の有理型関数 $\pi_z: C\ni(z,w)\mapsto z\in\mathbb{P}^1$ により、C は $\mathbb{P}^1$ の 8 点 $x_1,\dots,x_8$ で分岐する 4 次分岐被覆とみなすことができる。その被覆変換群は

$$\rho: C\ni(z,w)\mapsto(z,iw)$$

で生成される 4 次巡回群である。また、Hurwitz の公式から C の種数は 9 であることがわかる。また、C は種数 3 の hyperellptic curve の 8 点で分岐する 2 次分岐被覆とみなすこともできる。

曲線 C 正則 1-form のなす vector space $H^0(C,\Omega^1)$ および 1 次ホモロジー群 $H_1(C,\mathbb{Z})$ への ρ^2 の作用による (-1)-固有空間 をそれぞれ $H^0(C,\Omega^1)^-$, $H_1(C,\mathbb{Z})^-$ とする。

Proposition 1 $H^0(C,\Omega^1)$ は

$$\varphi_1=\frac{dz}{w},\quad \varphi_{2+k}=\frac{z^k dz}{w^3}\ (k=0,...,4),\quad \varphi_{7+l}=\frac{z^l dz}{w^2}\ (l=0,1,2)$$

で張られる。$H^0(C,\Omega^1)^-$ は $\varphi_1,\dots,\varphi_6$ で張られる。

$H_1(C,\mathbb{Z})$ の基底を与えるために、 $x_j\in\mathbb{R}$, $x_1<\cdots<x_8$ と仮定する。閉区間 $[x_j,x_{j+1}]$ $(j=1,\dots,7)$ に対して C 内の path I_j を

$$I_j=\{(z,w)\in C \mid z\in[x_j,x_{j+1}],\ \exp(\frac{\pi i}{4}j)w\in[0,\infty)\}$$

で与える。I_j の境界は $(z,w)=(x_j,0),(x_{j+1},0)$ なので、$(1-\rho)I_j$ は境界を消し合い C のサイクルとなる。同様に $A_j=(1-\rho^2)I_j$, $B_j=\rho(A_j)$ もサイクルである。

Proposition 2 $H_1(C,\mathbb{Z})$ は $\rho^k(1-\rho)I_j$ $(j=1,\ldots,6,\ k=0,1,2)$ で生成される。$H_1(C,\mathbb{Z})^-$ は A_j,B_j $(j=1,\ldots,6)$ で生成され、この基底に対する交点行列は $\begin{pmatrix} P & Q \\ -Q & P \end{pmatrix}$ である、ここで

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。また、$(1-\rho^2)H_1(C,\mathbb{Z})$ は $H_1(C,\mathbb{Z})^-$ の *index* $2^6=64$ の *sublattice* である。

3 周期写像の像

周期写像の逆写像を記述するにあたり、[K1], [Ma1], [Ma2], [P], [S] では超幾何微分方程式系 F_D の解の積分表示に対応する曲線 C の Jacobi 多様体 $J(C)=H^0(C,\Omega^1)^*/H_1(C,\mathbb{Z})$ を考察した。$\mu=(1/4,\ldots,1/4)$ の場合、F_D の 6 個の独立な解は $\varphi_1=\frac{dz}{w}$ の $H_1(C,\mathbb{Z})^-$ の基底での積分として得られるので、$J(C)$ ではなくて $Prym(C)=(H^0(C,\Omega^1)^-)^*/H_1(C,\mathbb{Z})^-$ を考えるのが自然である。

$H_1(C,\mathbb{Z})^-$ の基底 $\{A_1,\ldots,A_6,B_1,\ldots,B_6\}$ では ρ の作用が行列 $J=\begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix}$ で表現される。そのことから以下のことが得られる。

Proposition 3 $H^0(C,\Omega^1)^-$ の基底 $\phi_1,\ldots,\phi_6$ を $\int_{B_j}\phi_k=\delta_{jk}$ をみたすようにとる。周期行列 $(\int_{A_j}\phi_k)_{jk}$ は

$$i(I-2y({}^tyHy)^{-1}\,{}^tyH)$$

と表示できる、ここで $H=-2(Q+iP)^{-1}$ で

$${}^ty=(y_1,\ldots,y_6)=(\int_{A_1}\frac{dz}{w},\ldots,\int_{A_6}\frac{dz}{w})$$

は ${}^tyH\bar{y}>0$ をみたす。

H は符号数 $(1,5)$ の hermite 行列で $\mathbb{B}_\mu = \{y \in \mathbb{P}^5 \mid {}^t y H \bar{y} > 0\}$ は5次元複素超球である。[DM], [T], [MY] により以下が得られる。

Proposition 4 $\mu = (1/4, \ldots, 1/4)$ の場合、周期写像 p の像は $\mathbb{B}_\mu$ の *open dence* な部分集合で、モノドロミー群 Γ_μ は

$$\{g \in GL_6(\mathbb{Z}[i]) \mid {}^t g H \bar{g} = H,\ g \equiv I \bmod (1-i)\}$$

となる。

アーベル多様体 $Prym(C)$ に関する theta 関数を考察するには、$H_1(C,\mathbb{Z})^-$ の基底で交点行列が $\begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}$ (E は対角行列) となるものが必要である。C は種数3の曲線の8点で分岐する2次分岐被覆とみなせるので、E が $\mathrm{diag}(2,2,2,1,1,1)$ となる基底が存在する。つまり、$Prym(C)$ の偏極は $(2,2,2,1,1,1)$ 型となっている。しかし、その基底に関しては ρ の作用が複雑になるので theta 関数の挙動を調べることが困難である。そこで次節で ρ の作用が容易でしかも偏極が $(2,2,2,2,2,2)$ 型となる $Prym(C)$ と isogenous なアーベル多様体を構成し、それに関する theta 関数の挙動を調べる。

4 Principal sublattices of $H_1(C,\mathbb{Z})^-$

商空間 $V = H_1(C,\mathbb{Z})^-/(1-\rho^2)H_1(C,\mathbb{Z})$ は $\mathbb{F}_2$-係数線型空間 $\mathbb{F}_2^6$ と同型で交点形式と対応している2次形式がある。この2次形式に関する直交群は8次対称群 S_8 と同型である。そして $(2,2,2,2)$-partitions と対応している105組の V の3次元部分空間の正規直交基底が存在する。そのことから次の命題が得られる。

Proposition 5 $(1-\rho^2)H_1(C,\mathbb{Z})$ と $H_1(C,\mathbb{Z})^-$ との中間格子 Λ で以下の性質をもつ基底 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6, \beta_1, \ldots, \beta_6\}$ をとることができるものが 105 存在する。

$$\alpha_j \cdot \alpha_k = \beta_j \cdot \beta_k = 0, \quad \alpha_j \cdot \beta_k = -2\delta_{jk}, \quad \rho\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -U \\ U & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_b \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & -1 & & \\ & & -1 & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

このような lattice Λ の 1 つは以下のように与えられる。$\binom{\alpha}{\beta}$ を

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= A_1, \\
\alpha_2 &= A_1 + A_2 + B_2, \\
\alpha_3 &= A_1 + A_2 + B_2 + B_3, \\
\alpha_4 &= A_1 + A_2 - A_4 + B_2 + B_3 + B_4, \\
\alpha_5 &= A_1 + A_2 + A_5 + B_2 + B_3, \\
\alpha_6 &= A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + B_2 + B_3 + B_6, \\
\beta_1 &= -B_1, \\
\beta_2 &= A_2 - B_1 - B_2, \\
\beta_3 &= -A_2 - A_3 - A_4 + B_1 + B_2 - B_4, \\
\beta_4 &= -A_2 - A_3 + B_1 + B_2, \\
\beta_5 &= A_2 + A_3 - B_1 - B_2 - B_5, \\
\beta_6 &= A_2 + A_3 + A_6 - B_1 - B_2 - B_5 - B_6.
\end{aligned}$$

で与えると、Proposition 5 の性質をみたす。$\binom{\alpha}{\beta}$ で生成される lattice を Λ とすればよい。他の 104 個を得るには対称群 S_8 の作用を考えればよい。こうして得られる $(2,2,2,2)$-partitions r と対応している 105 個の sublattices Λ ごとに保型形式 $\mathcal{T}_r^{(2)}$ を構成する。

以後、上記の lattice Λ を固定して議論する。

Proposition 6 $H^0(C, \Omega^1)^-$ の基底 $\phi_1^\beta, \ldots, \phi_6^\beta$ を

$$\int_{\beta_j} \zeta_k = \delta_{jk}$$

をみたすものでとる。6 次ジーゲル上半空間に属する周期行列 $\tau = (\int_{\alpha_j} \phi_k^\beta)_{jk}$ は

$$i(U - 2\eta({}^t\eta U \eta)^{-1}\, {}^t\eta)$$

と表示することができる。ここで ${}^t\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_6) = (\int_{\alpha_1} \frac{dz}{w}, \ldots, \int_{\alpha_6} \frac{dz}{w})$ は ${}^t\eta U \bar{\eta} > 0$ をみたす。周期写像の像は5次元超球 $\mathbb{B}_\Lambda = \{\eta \in \mathbb{P}^5 \mid {}^t\eta U \bar{\eta} > 0\}$ 内の *open dence* な部分集合である。

Remark 1 ここでは5次元超球の表示は簡単になるが、モノドロミー群は $\{g \in GL_6(\mathbb{Z}[i]) \mid {}^t g U \bar{g} = U\}$ の部分群だがレベル $(1-i)$ の主合同部分群ではなくなってしまう。

5 Lattice Λ に関する theta 関数

複素トーラス $A_\Lambda = \mathbb{C}^6/(\mathbb{Z}^6\tau \oplus \mathbb{Z}^6) \simeq (H^0(C, \Omega^1)^-)^*/\Lambda$ に関する theta 関数を

$$\vartheta_{ab}(z,\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^6} \exp(\pi i(n+a)\tau\, {}^t(n+a) + 2\pi i(n+a)\, {}^t(z+b))$$

で定める、ここで $z \in \mathbb{C}^6$, τ は Proposition 6 で与えた周期行列、$a, b \in \mathbb{Q}^6$ とする。$a = b = 0$ のとき $\vartheta_{00}(z,\tau)$ を簡単のため $\vartheta(z,\tau)$ で表す。この関数は以下の準周期性をもつ。

$$\vartheta_{ab}(z+m\tau+n) = \exp(2\pi i(a\, {}^t n - b\, {}^t m)\exp(-\pi i m\tau\, {}^t m - 2\pi i z\, {}^t m)\vartheta_{ab}(z). \quad (2)$$

曲線 C から複素トーラス A_Λ への写像 ι を

$$\iota : P \mapsto \int_{\gamma(P)-\rho^2\gamma(P)} \phi^\beta,$$

で定める、ここで $\phi^\beta = (\phi_1^\beta, \ldots, \phi_6^\beta)$ で $\gamma(P)$ は $P_1 = (x_1, 0)$ を始点とし P を終点とする C 内の滑らかな曲線とする。この写像は well-defined である。写像 ι による $P_j = (x_j, 0)$ の像を与えておく。

$$\begin{aligned}
\iota(P_1) = \iota(P_2) &= \frac{1}{2}(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)\begin{pmatrix}\tau\\ I\end{pmatrix},\\
\iota(P_3) = \iota(P_4) &= \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0)\begin{pmatrix}\tau\\ I\end{pmatrix},\\
\iota(P_5) = \iota(P_6) &= \frac{1}{2}(1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0)\begin{pmatrix}\tau\\ I\end{pmatrix},\\
\iota(P_7) = \iota(P_8) &= \frac{1}{2}(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)\begin{pmatrix}\tau\\ I\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

分岐点 P_j たちの ι による像が2個ずつ4つの組となっていることからこの Lattice Λ は $(2,2,2,2)$-partition $\{\{12\},\{34\},\{56\},\{78\}\}$ と対応している。

theta 関数 $\theta_{ab}(z,\tau)$ の写像 ι による引き戻し

$$\iota^*(\theta_{ab}(z,\tau)) = \theta(\iota(P),\tau)$$

は C 上の一価関数とはならないが、theta 関数の準周期性より C 上の零点および零点の位数は well defined となる。

Proposition 7 複素トーラス A_Λ の点 v に対して C 上の関数 $\theta(v+\iota(P),\tau)$ が恒等的に零でないならば、その関数の零点の総数は 12 である。また、A_Λ 内の点 $\frac{1}{2}(q,qU)\begin{pmatrix}\tau\\ I\end{pmatrix}$ $(q\in\mathbb{Z}^6)$ に対し、$F_q(P)=\vartheta_{\xi(q)}(\iota(P),\tau)$ が恒等的に零でないとする、ここで $\xi(q)=\frac{1}{2}(q,qU)$ とする。このとき P_1 における $F_q(P)$ の零点の位数は4 を法として $-qU\,{}^tq$ と合同となる。

Remark 2 $q=0=(0,\ldots,0)$ に対し $F_0(P)$ は恒等的に零ではないので、上記の命題より P_j における零点の位数は以下のようになる。

P_1,P_2	P_3,P_4	P_5,P_6	P_7,P_8
0	2	0	2

分岐点の集合 $\{P_1,\ldots,P_8\}$ 内に重複を込めて合計8個の零点ある。

C 上の正則多価関数 $F_0(P)$ の残り4個の零点が決定できないかを以下で試みる。

6 残りの零点

Lemma 1 曲線 C 上の正則多価関数 $F_0(P)=\vartheta(\iota(P),\tau)$ の P_3,P_4,P_7,P_8 以外の零点の一つを Q とすると残りの零点は $\rho(Q),\rho^2(Q),\rho^3(Q)$ である。

Lemma 2 曲線 C 上の正則多価関数 $F_q(P)=\vartheta_{\xi(q)}(\iota(P),\tau)$ で P_3,P_4,P_7,P_8 で2位の零点をもつようになる $q\in\mathbb{Z}^6$ は 2 を法として

$$q_0=(0,0,0,0,0,0),\quad q_1=(0,0,1,1,1,1),$$

$$q_2=(1,1,0,0,1,1),\quad q_3=(1,1,1,1,0,0)$$

のいずれかと合同である。

Proposition 8 q_1, q_2, q_3 に対して、$R_j(P) = F_0(P)/F_{q_j}(P)$ は C 上の一価有理型関数で (z, w) 座標で表示すると $(z-s)/(z-t)$ の定数倍となる。ここで $Q = (s, w(s))$ と $R = (t, w(t))$ はそれぞれ F_0 と F_{q_j} の P_3, P_4, P_7, P_8 以外の零点。

Proof. P を $H_1(C, \mathbb{Z})$ の生成元 $(1-\rho)I_j$, $\rho(1-\rho)I_j$, $\rho^2(1-\rho)I_j$ に沿って解析接続すると $\iota(P)$ には $(1-\rho^2)(1-\rho)I_j = A_j - B_j$, $\rho(1-\rho^2)(1-\rho)I_j = A_j + B_j$, $\rho^2(1-\rho^2)(1-\rho)I_j = -A_j + B_j$ が加わる。$A_j - B_j$, $A_j + B_j$ を $\binom{\alpha}{\beta}$ の線型結合で表すと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
A_1 - B_1 &= \alpha_1 + \beta_1, & A_1 + B_1 &= \alpha_1 - \beta_1,\\
A_2 - B_2 &= -\beta_1 + \beta_2, & A_2 + B_2 &= -\alpha_1 + \alpha_2,\\
A_3 - B_3 &= \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_4, & A_3 + B_3 &= -\alpha_2 + \alpha_3 - \beta_2 - \beta_4,\\
A_4 - B_4 &= \alpha_3 - \alpha_4, & A_4 + B_4 &= -\beta_3 + \beta_4,\\
A_5 - B_5 &= -\alpha_3 + \alpha_5 + \beta_4 + \beta_5, & A_5 + B_5 &= -\alpha_3 + \alpha_5 - \beta_4 - \beta_5,\\
A_6 - B_6 &= -\beta_5 + \beta_6, & A_6 + B_6 &= -\alpha_5 + \alpha_6,
\end{aligned}$$

theta 関数 ϑ_{ab} の準周期性 (2) を用いると、P が C の任意の cycle に沿って解析接続されても $F_0(P)/F_{q_j}(P)$ の値は変化しないことがわかる。 *q.e.d.*

Remark 3 *curve* 上の有理型関数がその *Jacobian* 上の *theta* 関数の積の比で構成されることはよく知られている。その構成では分子、分母に現れる *theta characteristics* には和に関する条件がつく。上記命題では２つの *theta* 関数の ι による引き戻しの比そのものが C 上の有理型関数になっている。

Proposition 9 有理型関数 $R_1(P)$ の零点 $Q = (s, w(s))$ と極 $R = (t, w(t))$ は一致し $R_1(P)$ は定数関数となる。有理型関数 R_2, R_3 に対し $R_j(P)$ の零点 $Q = (s, w(s))$ と極 $R = (t, w(t))$ の z-座標 s, t は

$$s + t = \frac{2(x_1x_2 - x_5x_6)}{x_1 + x_2 - x_5 - x_6}, \quad st = \frac{x_1x_2x_5 + x_1x_2x_6 - x_1x_5x_6 - x_2x_5x_6}{x_1 + x_2 - x_5 - x_6} \tag{3}$$

をみたす。

Proof. P を $I_j, \rho(I_j)$ に沿って解析接続すると $\iota(P)$ には A_j, B_j が加わる。A_j, B_j を Λ の基底 $\binom{\alpha}{\beta}$ で表示すると

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1, & B_1 &= -\beta_1,\\
A_2 &= \tfrac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2), & B_2 &= \tfrac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2),\\
A_3 &= -\beta_2 - \beta_4, & B_3 &= -\alpha_2 + \alpha_3,\\
A_4 &= \tfrac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_4 - \beta_3 + \beta_4), & B_4 &= \tfrac{1}{2}(-\alpha_3 + \alpha_4 - \beta_3 + \beta_4),\\
A_5 &= -\alpha_3 + \alpha_5, & B_5 &= -\beta_4 - \beta_5,\\
A_6 &= \tfrac{1}{2}(-\alpha_5 + \alpha_6 - \beta_5 + \beta_6), & B_6 &= \tfrac{1}{2}(-\alpha_5 + \alpha_6 + \beta_5 - \beta_6),\\
A_7 &= -\beta_6, & B_7 &= -\alpha_6,
\end{aligned}$$

となっている。$I_{2m+1}, \rho(I_{2m+1})$ での接続に対しては、周期点分のずれである。F_{q_j} は P_1, P_2, P_5, P_6 で零でないので theta 関数の準周期性により、

$$\begin{aligned} R_1(P_1) &= R_1(P_2), \quad R_1(P_5) = R_1(P_6) && (4) \\ R_j(P_1) &= -R_j(P_2), \quad R_j(P_5) = -R_j(P_6) \quad (j = 2, 3) && (5) \end{aligned}$$

となる。一方、定数倍を調整すれば $R_j(z, w) = (z - s)/(z - t)$ となっていることから、R_1 対しては (4) より

$$\frac{x_1 - s}{x_1 - t} = \frac{x_2 - s}{x_2 - t}$$

が得られる。これより $x_1x_2 - x_2s - x_1t + st = x_1x_2 - x_1s - x_2t + st$ となり $s = t$ となる。また、R_2, R_3 に対しては (5) より

$$\frac{x_1 - s}{x_1 - t} + \frac{x_2 - s}{x_2 - t} = 0, \quad \frac{x_5 - s}{x_5 - t} + \frac{x_6 - s}{x_6 - t} = 0$$

となり、方程式

$$2st - (x_1 + x_2)(s + t) + 2x_1x_2 = 0, \quad 2st - (x_5 + x_6)(s + t) + 2x_5x_6 = 0$$

が得られ、$s + t$, st について解けばこの命題が得られる。 *q.e.d.*

Remark 4 s, t に関する判別式が

$$\frac{(s + t)^2}{4} - st = \frac{(x_1 - x_5)(x_1 - x_6)(x_2 - x_5)(x_2 - x_6)}{(x_1 + x_2 - x_5 - x_6)^2}$$

なので s, t が重根となるための必要十分条件は $x_1 = x_5$, $x_1 = x_6$, $x_2 = x_5$, $x_2 = x_6$ のうちどれかが成立することである。

7 $x_{j_1}, \ldots, x_{j_4}$ の cross ratio

前節の結果から x_1, x_2, x_5, x_6 の cross ratio を theta constants $\vartheta_j = \vartheta_{\xi(q_j)}(0, \tau)$ で表示することができる。

Proposition 10

$$\frac{(\vartheta_1 + i\vartheta_2)^2(\vartheta_0 - i\vartheta_3)^2}{4\vartheta_0^2\vartheta_2^2} = \frac{(x_2 - x_5)(x_1 - x_6)}{(x_1 - x_2)(x_5 - x_6)}.$$

Proof. 曲線 C 上の有理型関数 $R_1(P)=\vartheta(\iota(P))/\vartheta_{\xi(q_1)}(\iota(P))$ は定数関数なので、$R_1(P_1)=R_1(P_5)$ であり $\vartheta_0\vartheta_2=\vartheta_1\vartheta_3$ が得られる。一方、曲線 C 上の有理型関数

$$R_2(P)=\frac{\vartheta(\iota(P),\tau)}{\vartheta_{\xi(q_2)}(\iota(P),\tau)}=c\frac{z-s}{z-t}$$

に $P=P_1,P_5$ を代入すると

$$R_2(P_1)=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}=c\cdot\frac{x_1-s}{x_1-t},\quad R_2(P_5)=-\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}=c\cdot\frac{x_5-s}{x_5-t}$$

が得られる。$R_2(P_1)$ と $R_2(P_5)$ の比を考えると定数 c は消え、

$$\frac{R_2(P_1)}{R_2(P_5)}=\frac{(x_1-s)(x_5-t)}{(x_1-t)(x_5-s)}=-\frac{\vartheta_0\vartheta_1}{\vartheta_2\vartheta_3}=-\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}=-\frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2^2}$$

となっている。そして等式 $(\vartheta_1-i\vartheta_2)(\vartheta_0+i\vartheta_3)=(\vartheta_1+i\vartheta_2)(\vartheta_0-i\vartheta_3)$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(1+\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2})(1+\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}) &= \frac{(\vartheta_0^2+\vartheta_3^2)^2}{4\vartheta_0^2\vartheta_3^2}=\frac{\vartheta_1^2+\vartheta_2^2}{2\vartheta_1\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_0^2+\vartheta_3^2}{2\vartheta_0\vartheta_3}\\ &= \frac{(\vartheta_1+i\vartheta_2)^2(\vartheta_0-i\vartheta_3)^2}{4\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\end{aligned}$$

が得られる。上記の式に $\vartheta_0^2/\vartheta_3^2=-((x_1-s)(x_5-t))/((x_1-t)(x_5-s))$ を代入し (3) を用いるとこの命題が得られる。 *q.e.d.*

対称群 S_8 を作用させれば $x_1,\dots,x_8$ の任意の 4 つの $x_{j_1},\dots,x_{j_4}$ に対する cross ratio が得られる。

Proposition 11 $T_{r_1}^{(2)}=\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$ はモノドロミー群に関する保型形式となる、ここで r_1 は $(2,2,2,2)$-*partition* $\{\{12\},\{34\},\{56\},\{78\}\}$ である。

保型形式 $T_{r_1}^{(2)}$ に対称群 S_8 を作用させて他の $(2,2,2,2)$ partition r に対する保型形式 $T_r^{(2)}$ を構成すると序で述べた定理が得られる。詳しくは [MT2] を参照。

References

[DM] Deligne, P. and Mostow, G. D., Monodromy of hypergeometric functions and nonlattice integral monodromy, *I.H.E.S. Publ. Math.* **63** (1986), 5–89.

[F] Fay, J.D. Theta Functions on Riemann Surfaces, *LNM.* **352**, Springer, 1973.

[I] Igusa, J., Theta Functions, Springer, 1972.

[K1] Koike, K., On the family of pentagonal curves of genus 6 and associated modular forms on the ball, to appear in *J. Math. Soc. Japan.*

[K2] Koike, K., The projective model of the configuration space $X(2,8)$, preprint.

[MT1] Matsumoto, K. and Terasoma, T., Theta constants associated to cubic three folds, to appear in *J. Algebraic Geom.*

[MT2] Matsumoto, K. and Terasoma, T., Theta constants associated to coverings of $\mathbf{P}^1$ branching at 8 points, preprint, *Math. AG/0208040.*

[MY] Matsumoto, K. and Yoshida, M., Configuration space of 8 points on the projective line and a 5-dimensional Picard modular group, *Compositio Math.* **86** (1993), 265–280.

[Ma1] Matsumoto, K., On modular functions in 2 variables attached to a family of hyperelliptic curves of genus 3, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV* vol.XVI, Fasc. 4, (1989), 557–578.

[Ma2] Matsumoto, K., Theta constants associated with the cyclic triple coverings of the complex projective line branching at six points, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **37 no. 3** (2001), 419–440.

[Mu] Mumford, D., Prym varieties I, Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), 325–350, Academic Press, New York, 1974.

[P] Picard, E., Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires, *Acta Math.*, **2** (1883), 114–126.

[S] Shiga, H., On the representation of Picard modular function by θ constants I-II, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **24** (1988), 311–360.

[T] Terada, T., Fonctions hypergéometriques F_1 et fonctions automorphes I, II, *Math. Soc. Japan* **35** (1983), 451–475; **37** (1985), 173–185.

[Y] Yoshida, M., *Hypergeometric Functions, My Love*, Vieweg, 1997.