数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 101-106

2変数Airy関数について

宮本 忠 (慶應義塾大学大学院理工学研究科博士課程)
e-mail:t-miya@math.keio.ac.jp

0 introduction

Gauss の超幾何関数より得られる合流型の超幾何関数には有名な関数があることが知られている。

● 1変数合流型超幾何関数

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & & \text{Bessel} \arrow[dr] & \\ \text{Gauss} \arrow[r] & \text{Kummer} \arrow[urr] \arrow[drr] & & & \text{Airy.} \\ & & & \text{Hermite} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

これを 2変数一般化したものが下の図である。

● 2変数合流型超幾何関数

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & I(1+2+2) \arrow[r] \arrow[ddr] & I(2+3) \arrow[dr] & \\ I(1+1+1+1+1) \arrow[r] & I(1+1+1+2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & I(5). \\ & & I(1+1+3) \arrow[r] \arrow[uur] & I(1+4) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ここで、$I(1+1+1+1+1)$ は Appell の超幾何関数である。
以降では、2変数合流型超幾何関数の1つである $(x,y)\in\mathbf{C}^2$ 上の関数 $I(5)$

$$\begin{aligned} z_C(x,y) &= \int_C e^{h(t)}dt \\ h(t) &= -\frac{t^4}{4}+\frac{xt^2}{2}+yt \end{aligned}$$

(C は端点で被積分関数が 0 となるようにとられた積分路)

を扱う。上の2つの図式を比べると、この関数は2変数 Airy 関数とみなすことができる。今回はこの2変数 Airy 関数と、その関数のみたす偏微分方程式系、

$$\partial_x{}^2 u = \frac{x}{2}\partial_x u+\frac{y}{4}\partial_y u+\frac{1}{4}u$$

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_y u &= \frac{x}{2}\partial_y u + \frac{y}{2}u \\ {\partial_y}^2 u &= 2\partial_x u\end{aligned}$$

($x = \infty, y = \infty$ に不確定特異点をもち、解空間は 3 次元)

とに着目し、主に特異点 $y = \infty$ での解のふるまいを主に研究した。なお、上記の関数と方程式系は K. Okamoto and H. Kimura により [2] で発表されたものに変数変換を加えたものである。

まず、6 つの積分路を用意する。

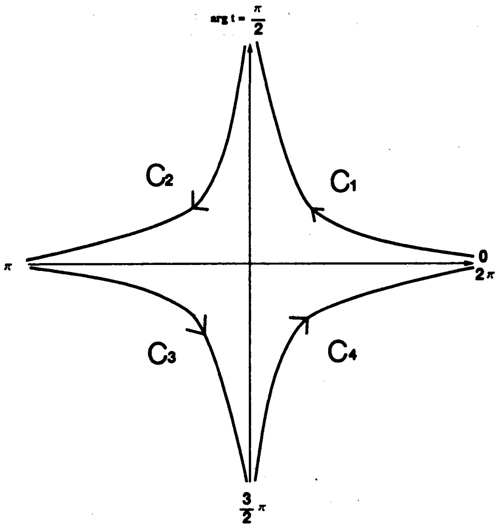

図 1:

それぞれの積分を $z_1 = \int_{C_1} f dt,\ z_2 = \int_{C_2} f dt,\ z_3 = \int_{C_3} f dt,\ z_4 = \int_{C_4} f dt,\ f = f(x,y,t)$ と表すと、次の命題が成り立つ。

Proposition 1 *We have*

$$z_2(x,y) = iz_1(-x, iy), \quad z_3(x,y) = -z_1(x,-y), \quad z_4(x,y) = -iz_1(-x,-iy).$$

さらに 2 つの積分路を用意する。

$z_R = \int_{C_R} f dt,\ z_I = \int_{C_I} f dt$ と置くと、上と同様に

Proposition 2

$$z_I(x,y) = iz_R(-x, iy).$$

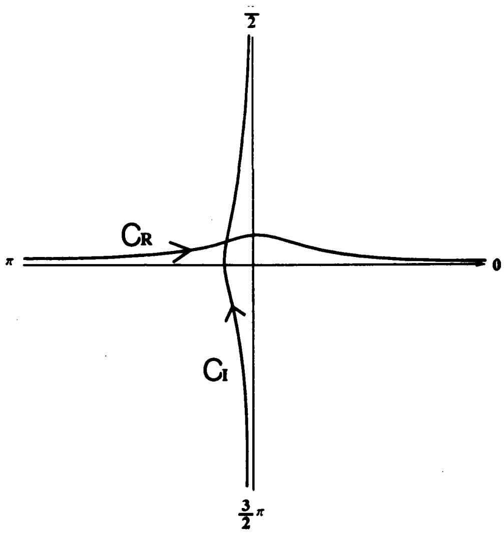

図 2:

が成り立つ。以上の積分の間の関係が次の命題。

Proposition 3 *Let $Z(x,y)$ and $Z^*(x,y)$ be column vectors given by*

$$Z(x,y) = {}^t(z_R, z_I, z_1), \quad Z^*(x,y) = {}^t(z_1, z_2, z_3).$$

Then we have

$$Z(x,y) = MZ^*(x,y), \quad M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

さらに次式も簡単に示す事ができる。

$$z_4 = -z_1 - z_2 - z_3.$$

1 Convergent Series Expansions

(1) の解 z_R, z_I, z_1 は x, y に関する収束級数の形で表すことができる。

Theorem 4 *In the domain $|x| < +\infty, |y| < +\infty$, we have*

$$z_R = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k \geq 0}} \frac{x^j y^k}{(1)_j (1)_k} \left(1 + (-1)^k\right) 2^{\frac{k-3}{2}} \Gamma\left(\frac{2j+k+1}{4}\right),$$

$$z_I = \sum_{\substack{j\geq 0\\ k\geq 0}} \frac{x^j y^k}{(1)_j(1)_k}(-)^j i^{k+1}\left(1+(-1)^k\right)2^{\frac{k-3}{2}}\Gamma\left(\frac{2j+k+1}{4}\right),$$
$$z_1 = \sum_{\substack{j\geq 0\\ k\geq 0}} \frac{x^j y^k}{(1)_j(1)_k}\left((-)^j i^{k+1}-1\right)2^{\frac{k-3}{2}}\Gamma\left(\frac{2j+k+1}{4}\right),$$

which are linearly independent.

Proposition 3 より、z_1, z_2, z_3 も収束級数の形で表すことができる。

2 Asymptotic Expansions near $y = \infty$

次に z_1, z_2, z_3, z_4 の $y=\infty$ 付近での漸近展開を saddle point method により求める。saddle point とは $h'(t) = -t^3 + xt + y = 0$ の解のことで、次の形に書くことができる。

Proposition 5 *Assume that $|xy^{-\frac{2}{3}}| < r_0$, where r_0 is a sufficiently small positive constant. Then the saddle points of $h(t)$ are given by*

$$t_j = \eta_j\left(1+\frac{1}{3}(xy^{-1}\eta_j) - \frac{1}{81}(xy^{-1}\eta_j)^3 + O((xy^{-1}\eta_j)^4)\right)$$

$(j = 0,1,2)$, where $\eta_j = y^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}j\pi i}$. The branch of t_0 is taken such that, $\arg t_0 = 0$ for $y > 0$.

ここで、

$$v = v(x,y) = -\frac{t_0}{2}(2t_0^3 + y)$$

と置き、z_1 の漸近展開式を v^{-1} のベキで表したのが次の定理。

Theorem 6 *Let r be an arbitrary small positive constant. Then the integral z_1 admits the asymptotic expansion in powers of v^{-1}*

$$z_1 \simeq \sqrt{\pi} i t_0 v^{-\frac{1}{2}} e^{h(t_0)} \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-)^{m+k}(-k)_{2m-k}\left(\frac{1}{2}\right)_{m+k}}{(1)_{2m-k}4^{2m-k}}w^k\right)v^{-m}$$

with $w = t_0^4 v^{-1}$ uniformly for $|xy^{-\frac{2}{3}}| < r$, as y tends to ∞ through the sector $|\arg y - (3/4)\pi| < \pi - \delta$. Here δ is a positive constant depending on r and satisfying $\delta \to 0$ as $r \to 0$.

この定理を扱いやすい形にしたのが次の定理である。

Theorem 7 *Let r' be an arbitrary small positive constant. Then the integral z_1 admits the asymptotic expansion in powers of $y^{-\frac{2}{3}}$*

$$z_1 \simeq \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{3}}\exp\left(\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}xy^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\left(6^{-\frac{1}{2}}ix\right)y^{-\frac{2}{3}n} \qquad (1)$$

uniformly for $|x| < r'$, *as* y *tends to* ∞ *through the sector* $|\arg y - (3/4)\pi| < \pi - \delta$, *where* $\phi_n(u)$ *is a polynomial expressed in terms of the Hermite polynomial* $H_{2n+m}(u)$;

$$\phi_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \frac{(-k)_{n-k+m}}{(1)_k (1)_{n-k} (1)_m} 3^{-\frac{2n+m}{2}} 2^{\frac{-4n+m}{2}} e^{-\frac{m}{2}\pi i} H_{2n+m}(u).$$

ここで $H_\nu(z)$ は Hermite 多項式 (cf. [1]p.193):

$$H_\nu(z) = (-1)^\nu e^{z^2} \left(\frac{d}{dz}\right)^\nu e^{-z^2} = \nu! \sum_{m=0}^{[\nu/2]} \frac{(-1)^m (2z)^{\nu-2m}}{m!(\nu-2m)!}$$

(1) の右辺を $Z_1(x, y)$ とおくと、Proposition 1 より、次の定理を得ることができる。

Corollary 8 *The integrals* z_2, z_3, *and* z_4 *admit asymptotic representations uniformly for* $|x| < r'$

$$z_2(x, y) \simeq Z_2(x, y) = iZ_1\left(-x, e^{\frac{1}{2}\pi i} y\right)$$

as y *tends to* ∞ *through the sector* $|\arg y - \frac{\pi}{4}| < \pi - \delta$, *and*

$$z_3(x, y) \simeq Z_3(x, y) = -Z_1\left(x, e^{\pi i} y\right)$$

as y *tends to* ∞ *through the sector* $|\arg y + \frac{\pi}{4}| < \pi - \delta$, *and*

$$z_4(x, y) \simeq Z_4(x, y) = -iZ_1\left(-x, e^{\frac{3}{2}\pi i} y\right)$$

as y *tends to* ∞ *through the sector* $|\arg y + \frac{3}{4}\pi| < \pi - \delta$. *Here* r' *and* δ *are the constants given in Theorem 7.*

3 Stokes Multipliers near $y = \infty$

z_1, z_2, z_3 の間の Stokes 係数を求めたのが次の定理。

Theorem 9 *(1)In the sector* $\left|\arg y - \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2} - \delta$,

$$z_1 \simeq Z_1, \quad z_2 \simeq Z_2, \quad z_3 \simeq Z_3.$$

(2)In the sector $\left|\arg y - \frac{3}{4}\pi\right| < \frac{\pi}{2} - \delta$,

$$z_1 \simeq Z_1, \quad z_2 \simeq Z_2, \quad z_1 + z_2 + z_3 \simeq Z_3.$$

(3)In the sector $\left|\arg y - \frac{5}{4}\pi\right| < \frac{\pi}{2} - \delta$,

$$z_1 \simeq Z_1, \quad -z_3 \simeq Z_2, \quad z_1 + z_2 + z_3 \simeq Z_3.$$

この定理は次の補題より簡単に導き出すことができる。

Lemma 10 *We have*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &\simeq Z_3, \quad \text{in } \left|\arg y - \frac{5}{4}\right| < \pi - \delta, \qquad (2) \\ -z_3 &\simeq Z_2, \quad \text{in } \left|\arg y - \frac{7}{4}\right| < \pi - \delta. \end{aligned}$$

参考文献

[1] A. Erdélyi, W.Magnus, F.Oberhettinger and F.G.Tricomi, Higher Transcendental Functions, vol. 1, McGraw-Hill, 1953.

[2] K. Okamoto and H. Kimura, On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables, Quart. J. Math. Oxford (2) 37 1986, 61–80.

[3] R.B.Paris, The asymptotic behaviour of Pearcey's integral for complex variables, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 432 1991, 391–426.