数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 16-20

On a connection problem for higher order linear ordinary differential equations

小池達也

京都大学大学院理学研究科

1 Introduction

大きいパラメータを持つ高階線形常微分方程式に対する解の接続問題を取り扱う一つの方法に近年著しく発展を遂げつつある完全 WKB 解析がある. これは変わり点の近傍における解析から Stokes 曲線上における WKB 解の Borel 和の接続公式を求め, Stokes 曲線を横切るたびにそれを繰り返し用いることで解析接続を具体的に記述するものである. 一方解が積分表示を持つ場合は最急降下法もまた接続問題を取り扱う有力な方法である. 例えば方程式の係数が一次式 (つまり Laplace 型) の場合は Fourier-Laplace 変換を用いることで解の積分表示を構成することができる. この両者の関係は generic な状況下のもとで [T] や [AKT2] において調べられている. 本稿ではこの両者の関係を作用素を Fourier-Laplace 変換した際に現われる特異点に注目して調べたい. 以下まず §2 において考えたい問題について例を用いて説明する. 続く §3 で主定理を述べる.

2 An Example

最初に η を大きいパラメータとして方程式 $P(x,\eta^{-1}d/dx;\eta)\psi=0$, 但し

$$\begin{aligned}P=&\left(\eta^{-1}\frac{d}{dx}\right)^3+\left(x+1-\alpha+\eta^{-1}r_1\right)\left(\eta^{-1}\frac{d}{dx}\right)^2\\&+\frac{1}{4}\left(2(1-2\alpha)x+5-4\alpha+\eta^{-1}r_2\right)\left(\eta^{-1}\frac{d}{dx}\right)-\frac{\alpha}{4}(2x+5+\eta^{-1}r_3)\end{aligned}\tag{1}$$

($\alpha=\exp(0.4i\pi)$, r_j $(j=1,2,3)$ は定数) の接続問題について, 最初に完全 WKB 解析の立場から, 続いて解の積分表示を用いて考える. (以下で用いる完全 WKB 解析の用語・記法については例えば [AKKoT] を参照のこと.)

まず作用素 (1) に対して WKB 解を $j=0,1,2$ として

$$\psi_j=\exp\left(\int^x S^{(j)}(x,\eta)dx\right),\qquad S^{(j)}=\eta\xi_j(x)+\cdots\tag{2}$$

と構成することができる. ここに $\xi_j(x)$ は作用素 P に対する特性方程式

$$P_0(x,\xi):=(\xi-\alpha)(\xi^2+(x+1)\xi+(2x+5)/4)=0\tag{3}$$

$$\xi_0(x) = \alpha, \tag{4}$$

$$\xi_1(x) = -\frac{x+1+\sqrt{x^2-4}}{4}, \tag{5}$$

$$\xi_2(x) = -\frac{x+1-\sqrt{x^2-4}}{4} \tag{6}$$

とおいた. (図 1 のように 2 から -2 までカットを引き $x>2$ に対して $\sqrt{x^2-4}>0$ となるように分枝を選んでいる.) 変わり点はこれらの $\xi_j(x)$ が重なる点として定義され

$$\xi_0(x)=\xi_1(x) \implies x=x_0:=-\frac{4\alpha^2+4\alpha+5}{2(2\alpha+1)}, \tag{7}$$

$$\xi_1(x)=\xi_2(x) \implies x=\pm 2 \tag{8}$$

より 3 つの変わり点が存在することがわかる. これらの変わり点のうち ± 2 は simple な変わり点であり, x_0 は double な変わり点である. この変わり点と

$$\mathrm{Im}\int_{x_0}^{x}(\xi_1(x)-\xi_0(x))dx=0, \quad \mathrm{Im}\int_{\pm 2}^{x}(\xi_2(x)-\xi_1(x))dx=0, \tag{9}$$

により定義される Stokes curve, さらに ordered crossing point を解消するために導入された virtual turning point 及び new Stokes curve (例えば [AKT1] を参照のこと) を図示したものが図 1 である.

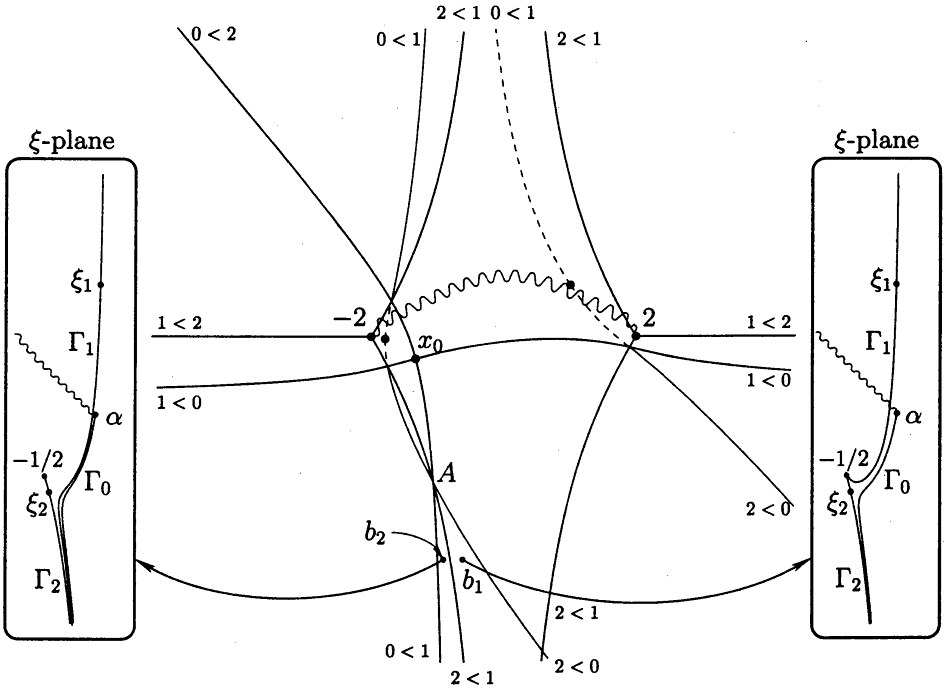

図 1: (1) の Stokes 曲線. 波線はカットを表わす.
また両側の図は (11) に対する最急降下線である.

さて経路 I を b_1 から b_2 にいたる経路とし, I に沿った解の解析接続を考えよう. 図に示されている点 A は ordered crossing point であることに注意して I を横切る Stokes curve

における WKB 解の Borel 和の接続係数を求めると, ψ_1 をこの I に沿って解析接続するとき

$$I:\ \psi_1 \mapsto \psi_1 - ie^{-2i\pi\lambda}\psi_2, \quad \lambda = -\operatorname*{Res}_{x=x_0}\left[S^{(1)}(x,\eta)\right] - 1/2 \tag{10}$$

となることがわかる.

次に P は Laplace 型であることに注意して Fourier-Laplace 変換により解の積分表示を求め, その積分表示を用いて経路 I に沿った解析接続を考えよう. まず解の積分表示は

$$\phi = \int e^{\eta x\xi}\,\widehat{\psi}(\xi,\eta)\,d\xi, \qquad \widehat{\psi}(\xi,\eta) = \exp\left(\int^{\xi}\widehat{S}(\xi,\eta)d\xi\right), \tag{11}$$

$$\text{但し}\qquad \widehat{S}(\xi,\eta) = \eta\frac{\xi^2+\xi+5/4}{\xi+1/2} - \frac{r_1\xi^2+(r_2/4-2)\xi-((r_2-4)\alpha+2)/4}{(\xi-\alpha)(\xi+1/2)}.$$

により与えられる. ここで $\widehat{\psi}$ は P を Fourier-Laplace 変換

$$x^j(\eta^{-1}d/dx)^k \mapsto (-\eta^{-1}d/d\xi)^j\xi^k \tag{12}$$

することで得られる作用素

$$\begin{aligned}\widehat{P} = -(\xi-\alpha)\left((\xi+\frac{1}{2})\left(\eta^{-1}\frac{d}{d\xi}\right)+(\xi^2+\xi+\frac{5}{4})\right)\\ +\eta^{-1}\left(r_1\xi^2+(\frac{r_2}{4}-2)\xi-\frac{1}{4}((r_3-4)\alpha+2)\right)\end{aligned} \tag{13}$$

の解である (特に WKB 解と思える). 作用素 $\widehat{P}$ は $\xi=\alpha$ を特異点に持つが, これは η に関して -1 次の項にのみ現われる特異点であることに注意されたい. さてこの積分表示に対して最急降下法を適用することで解の解析接続を求めよう. そこでまず phase を

$$f(x,\xi) = x\xi + \int^{\xi}\frac{\xi^2+\xi+5/4}{\xi+1/2}d\xi \tag{14}$$

により定める. すると

$$\frac{\partial f}{\partial\xi} = 0 \tag{15}$$

で定義される鞍点は (4) (5) で与えられた $\xi_j(x)$ $(j=1,2)$ となることがわかる. さらに「$\xi=\xi_0(=\alpha)$ は $\widehat{P}$ の特異点であるが, 大きいパラメータについて主部の項の特異点にはなっていない」ということから ξ_0 も鞍点と同様の取り扱いをしなければならない ([KoT] を参照すること). そこで Γ_j $(j=0,1,2)$ を $\xi_j(x)$ を通る $\mathrm{Re}f(x,\xi)$ の最急降下線とする. また (11) において積分路を Γ_j としたものを ϕ_j とする. このとき点 A の近傍においてある定数 $C_j=C_j(\eta)$ が存在して $j=0,1,2$ に対して

$$\phi_j = C_j\psi_j \tag{16}$$

が, また $(C_1)^{-1}C_2=i$ が成り立つ. ($j=1,2$ に対しては [AKT2] を参照すること. また $j=0$ の場合は議論が必要であるが, 以下では必要ないのでここではこれ以上は説明しな

い.) さらに経路 I に沿った解析接続を被積分函数 $\widehat{\psi}$ の分枝に注意して考えると (図 1 を参照のこと.)

$$I:\ \phi_1 \mapsto \phi_1 + e^{2i\pi\kappa}\phi_2, \quad \kappa = \operatorname*{Res}_{\xi=\alpha}\left[\widehat{S}(\xi,\eta)\right] \tag{17}$$

となる.

さて同じ経路に沿った接続問題を考えたのであるから (10), (16), (17) は当然両立しなければならない. 実際

$$\lambda = -\kappa - 1/2 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname*{Res}_{x=x_0}\left[S^{(1)}(x,\eta)\right] = \operatorname*{Res}_{\xi=\alpha}\left[\widehat{S}(\xi,\eta)\right] \tag{18}$$

が成立する. これにより (10), (16), (17) は両立することがわかる. この関係式はより一般的な状況のもとで成り立つ (23) の帰結である.

3 Main Theorem

以下では

$$P(x,\eta^{-1}d/dx;\eta) = \sum_{j\geq 0}\eta^{-j}P_j(x,\eta^{-1}d/dx) \tag{19}$$

を多項式係数の常微分作用素とし, また $x=a$ を double な変わり点でありその特性値は $\xi=\widehat{a}$ であるとしよう. この時 $P_0(x,\xi)=0$ の根 $g(x)$ で $x=a$ の近傍で正則, かつ

$$g(a)=\widehat{a}, \quad g'(a)\neq 0 \tag{20}$$

となるものが存在する. (前節の例では $a=x_0$, $g=\xi_1$ であった.) この P を (12) で定義された Fourier-Laplace 変換して得られる作用素を $\widehat{P}$ としよう. この時 $\xi=\widehat{a}$ は $\widehat{P}$ の変わり点か特異点になる. (generic は条件下では double な変わり点になるが, 元の作用素が Laplace 型の場合は特殊な場合にあたり $\widehat{a}$ は常に特異点になる.) さて条件 (20) により g は $x=a$ において正則な逆関数を持つ. それを $\widehat{g}(\xi)$ とする. この時 g, $\widehat{g}$ を用いて P, $\widehat{P}$ の WKB 解を

$$\psi = \exp\left(\int^x S(x,\eta)dx\right), \quad S = \eta g(x) + \cdots, \tag{21}$$

$$\widehat{\psi} = \exp\left(\int^\xi \widehat{S}(\xi,\eta)d\xi\right), \quad \widehat{S} = -\eta\widehat{g}(\xi) + \cdots \tag{22}$$

とそれぞれ構成することができる. 以上のもとで次が成り立つ.

$$\operatorname*{Res}_{x=a}\left[S(x,\eta)\right] = \operatorname*{Res}_{\xi=\widehat{a}}\left[\widehat{S}(\xi,\eta)\right]. \tag{23}$$

この (23) の証明については現在準備中の論文を参照されたい.

参考文献

[AKKoT] T.Aoki, T.Kawai, T.Koike, Y.Takei: On the exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases, to appear in Adv. Math.

[AKT1] T.Aoki, T.Kawai, Y.Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher order ordinary differential equations, Analyse algeébrique des perturbations singulières, I; Méthodes résurgentes, Hermann, 1994, pp. 69-84.

[AKT2] T.Aoki, T.Kawai, Y.Takei: On the exact steepest descent method — a new method for the description of Stokes curves, J. Math. Phys., 42(2001), 3691-3713.

[KoT] T.Koike, Y.Takei: The effect of new Stokes curves in the exact steepest descent method, to appear in "Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis", World Scientific.

[T] Y.Takei: Integral representation for ordinary differential equations of Laplace type and exact WKB analysis, RIMS Kôkyûroku, No. 1168, 2000, pp. 89-92.