数理解析研究所講究録 1297 巻 2002 年 245-249

二次錐相補性問題に対する超一次収束アルゴリズム

京都大学大学院・情報学研究科　林　俊介 (HAYASHI Shunsuke)
山下　信雄 (YAMASHITA Nobuo)
福島　雅夫 (FUKUSHIMA Masao)
Graduate School of Informatics, Kyoto University

1　二次錐相補性問題

本報告では，以下のような形で表される二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Complementarity Problem : SOCCP) について考える．

$$\begin{aligned}&\text{Find}\ \ (x,y)\in\Re^n\times\Re^n\\&\text{s.t.}\ \ x^Ty=0,\ x\in\mathcal{K},\ y\in\mathcal{K},\ y=f(x)\end{aligned}\tag{1}$$

但し，$f:\Re^n\to\Re^n$ は連続微分可能な関数であり，$\mathcal{K}$ は n_i 次の二次錐

$$\mathcal{K}^{n_i}=\left\{(z_1,z_2^T)^T\in\Re\times\Re^{n_i-1}\;\middle|\;\|z_2\|\le z_1\right\}$$

を用いて $\mathcal{K}=\mathcal{K}^{n_1}\times\mathcal{K}^{n_2}\times\cdots\times\mathcal{K}^{n_m}$ で定義される凸錐である．ここで，$\|\cdot\|$ は $\|z\|=\sqrt{z^Tz}$ で定義されるユークリッドノルムである．なお，本報告では，簡単のため $(z_1,z_2^T)^T$ を単に (z_1,z_2) と書く．

SOCCP は非線形相補性問題 (NCP) や二次錐計画問題 (SOCP) [2] を含む広いクラスの問題である．実際，$n_1=n_2=\cdots=n_m=1$ とした SOCCP (1) を考えてみる．そのとき，SOCCP (1) は

$$\begin{aligned}&\text{Find}\quad x\in\Re^n\\&\text{s.t.}\quad x^Ty=0,\ x\ge0,\ y\ge0,\ y=f(x)\end{aligned}$$

となり，これは NCP である．また，SOCP

$$\begin{aligned}&\min\quad \theta(w)\\&\text{s.t.}\quad \gamma(w)\in\mathcal{K}\end{aligned}\tag{2}$$

を考える．ただし，$\theta:\Re^s\to\Re,\gamma:\Re^s\to\Re^t$ である．さらに，この SOCP (2) において，$w'\in\Re^l_+$, $w''\in\Re^l_+$ を満たすような w',w'' を用いて，$w=w'-w''$ とおく．そして，$\hat{w}:=\binom{w'}{w''}\in\Re^{2l}_+$ とする．ここで，$\Re^l_+$ は l 次元の非負象限であり，$\mathcal{K}^1\times\cdots\times\mathcal{K}^1$ と表すこともできる．さらに，$\hat{\theta}:\Re^{2l}\to\Re$ を $\hat{\theta}(\hat{w}):=\theta(w'-w'')$ で，$\hat{\gamma}:\Re^{2l}\to\Re^n$ を $\hat{\gamma}(\hat{w}):=\gamma(w'-w'')$ で定義する．そのとき，SOCP (2) は

$$\begin{aligned}&\text{Minimize}\quad \hat{\theta}(\hat{w})\\&\text{subject to}\quad \begin{pmatrix}\hat{\gamma}(\hat{w})\\ \hat{w}\end{pmatrix}\in\mathcal{K}\times\Re^{2l}_+\end{aligned}\tag{3}$$

と等価に書き換えることができ，その KKT 条件は

$$
\begin{aligned}
&\nabla\hat{\theta}(\hat{w}) - \begin{pmatrix}\nabla\hat{\gamma}(\hat{w}) & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = 0,\\
&\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} \in \mathcal{K}\times\Re^{2l}_{+},\quad \begin{pmatrix}\hat{\gamma}(\hat{w})\\ \hat{w}\end{pmatrix} \in \mathcal{K}\times\Re^{2l}_{+},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\hat{\gamma}(\hat{w})\\ \hat{w}\end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

と書くことができる．ここで，$\mu_1 = \hat{\gamma}(\hat{w})$ とおくと，(4) は以下のように，SOCCP (1) の形に等価に変換することができる．

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\hat{\gamma}(\hat{w})\\ \nabla\hat{\theta}(\hat{w}) - \nabla\hat{\gamma}(\hat{w})\lambda_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \lambda_2\end{pmatrix},\\
&\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \hat{w}\end{pmatrix} \in \mathcal{K}\times\Re^{2l}_{+},\quad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} \in \mathcal{K}\times\Re^{2l}_{+},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \hat{w}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mu_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ここで，

$$
x = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \hat{w}\end{pmatrix},\quad y = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \lambda_2\end{pmatrix},\quad f(x) = \begin{pmatrix}\hat{\gamma}(\hat{w})\\ \nabla\hat{\theta}(\hat{w}) - \nabla\hat{\gamma}(\hat{w})\lambda_1\end{pmatrix}
$$

と，変数を置き換えると，確かに SOCP (2) の KKT 条件 (5) が SOCCP (1) の形で表せることが分かる．

2 SOCCP を解くアプローチ

これまでに，SOCCP に対して多くの解法が提案されてきた．線形な SOCP に対しては，線形計画問題に対する主双対内点法を一般化したアルゴリズムが開発されている [2]．しかし，今のところ，非線形な SOCP や一般の SOCCP に対する内点法は提案されていない．これらの問題に対しては，等価な方程式系や最適化問題に再定式化して解くという手法が有効である．

まず，以下で定義される残差関数 $\Phi_{\mathrm{NR}} : \Re^n \times \Re^n \to \Re^n$ を考える．

$$
\Phi_{\mathrm{NR}}(x,y) = x - [x-y]_+ \tag{6}
$$

ここで，$[\cdot]_+$ は $\mathcal{K}$ への射影を表す．このようにして定義された残差関数 Φ_{NR} は，微分不可能ではあるが，以下のような都合の良い性質を持つ．

$$
\Phi_{\mathrm{NR}}(x,y) = 0 \iff x\in\mathcal{K},\ y\in\mathcal{K},\ x^Ty = 0
$$

残差関数 Φ_{NR} を用いて，$H_{\mathrm{NR}} : \Re^n \times \Re^n \to \Re^{2n}$ を

$$
H_{\mathrm{NR}}(x,y) := \begin{pmatrix}\Phi_{\mathrm{NR}}(x,y)\\ f(x) - y\end{pmatrix}
$$

で定義すれば，SOCCP(1) と方程式系

$$
H_{\mathrm{NR}}(x,y) = 0 \tag{7}
$$

が等価であることが分かる．さらに，

$$\Psi_{\text{NR}}(x,y) := \frac{1}{2}\|H_{\text{NR}}(x,y)\|^2 \tag{8}$$

とおくことにより，方程式 (7) は，次の制約無し最小化問題とも等価であることが分かる．

$$\text{Minimize} \quad \Psi_{\text{NR}}(x,y) \tag{9}$$

したがって，最小化問題 (9) を解くことにより，SOCCP(1) の解を得ることができる．

3 平滑化法と正則化法

Φ_{NR} と同様，Ψ_{NR} も微分不可能であるため，ニュートン法などの微分を必要とする降下法を直接適用することができない．しかも，たとえ降下法が適用できたとしても，生成される点列が集積点を持つ保証は無い．そこで，これらの問題を解決するために，平滑化法と正則化法をアルゴリズムに組み込むことを考える．

3.1 平滑化法

平滑化法では，微分不可能な関数の代わりに，微分可能な近似関数（平滑化関数）を用いる．最近，福島, Luo, Tseng [1] は，以下で表される Φ_{NR} の平滑化関数 Φ_μ を導いた．

$$\Phi_\mu(x,y) = \begin{pmatrix} x^1 - \hat{g}(\lambda_1^1/\mu)u_1^1 - \hat{g}(\lambda_2^1/\mu)u_2^1 \\ \vdots \\ x^m - \hat{g}(\lambda_1^m/\mu)u_1^m - \hat{g}(\lambda_2^m/\mu)u_2^m \end{pmatrix}$$

$x = (x^1, \ldots, x^m) \in \Re^{n_1} \times \cdots \times \Re^{n_m}$, $y = (y^1, \ldots, y^m) \in \Re^{n_1} \times \cdots \times \Re^{n_m}$ である．また，λ_j^i と u_j^i は，任意の単位ベクトル ω を用いて

$$\begin{aligned} \lambda_j^i &= x_1^i - y_1^i + (-1)^j\|x_2^i - y_2^i\| \\ u_j^i &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1,\ (-1)^j \dfrac{x_2^i - y_2^i}{\|x_2^i - y_2^i\|}\right) & (x_2^i \neq y_2^i) \\ \dfrac{1}{2}\left(1,\ (-1)^j\omega\right) & (x_2^i = y_2^i) \end{cases} \end{aligned}$$

で定義され，$\hat{g}$ は任意の $\alpha \in \Re$ に対して，$\lim_{\alpha\to-\infty}\hat{g}(\alpha) = 0$, $\lim_{\alpha\to+\infty}\{\hat{g}(\alpha)-\alpha\} = 0$, $0 < \hat{g}'(\alpha) < 1$ を満たすような実数値関数である．関数 Φ_μ は以下の性質を満たしている．

(i) すべての $\mu > 0$ に対して Φ_μ は微分可能

(ii) $\lim_{\mu\downarrow 0}\Phi_\mu(x,y) = \Phi_{\text{NR}}(x,y)$, $\forall(x,y) \in \Re^n \times \Re^n$

制約無し最小化問題を効率良く解くためには，その目的関数が level-bounded [1] であることが望ましい．なぜなら，目的関数が level-bounded ならば，降下法で生成される点列が集積点を持つことが保証されるからである．次の命題は，最小化問題 (9) の目的関数 Ψ_{NR} が強圧性をもつための十分条件を与えている．

[1] すべての $\alpha \in \Re$ に対して，レベル集合 $\mathcal{L}_\alpha := \{z \mid \Theta(z) \leq \alpha\}$ が有界であるとき，実数値関数 Θ は level-bounded であるという．また，$\lim_{\|z\|\to\infty}\Theta(z) = +\infty$ であることと Θ が level-bounded であることは，等価であることが知

命題 1 f が強単調[2] ならば，(8) で定義される関数 Ψ_{NR} は *level-bounded* である．

ところが，f が強単調であるという仮定は実用上かなり厳しいものである．そこで，正則化法を用い，単調[3] な関数にも対応させることを考える．正則化法では，f の代わりに $f_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon x$ で定義される f_ε を用いる．f が単調ならば，f_ε が強単調であることは容易に確かめられる．

4 アルゴリズムと収束性

本節では，ニュートン法に平滑化法と正則化法を組み合わせ，大域的収束性と局所的な超一次収束性を持つアルゴリズムを提案する．まず，Φ_{NR} を平滑化した関数 Φ_μ と，f を正則化した関数 f_ε を用い，$H_{\mu,\varepsilon}$ と $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
H_{\mu,\varepsilon}(x,y) &:= \begin{pmatrix}\Phi_\mu(x,y)\\ f_\varepsilon(x)-y\end{pmatrix}\\
\Psi_{\mu,\varepsilon}(x,y) &:= \frac{1}{2}\|H_{\mu,\varepsilon}(x,y)\|^2
\end{aligned}
$$

これらの関数は微分可能であることに注意する．以下のアルゴリズムでは，μ と ε を 0 に近づけながら，同時に $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ の値を減らすことにより，最小化問題 (9) を解くことを目指している．なお，簡単のため，$w=(x,y)\in\Re^{2n}$ とおく．

アルゴリズム 1 η, $\rho\in(0,1)$, $\sigma\in(0,1/2)$ を適当に選ぶ．また，$\{s_k\}$ と $\{t_k\}$ を 0 に収束する正数の列とする．

(Step 0) $w^{(0)}\in\Re^{2n}$, $\mu_0\in(0,\infty)$, $\varepsilon_0\in(0,\infty)$, $\alpha_0\in(0,\infty)$ を選び，$k:=0$ とする．

(Step 1) $\|H_{\mathrm{NR}}(w^{(k)})\|=0$ ならば，反復終了．

(Step 2.0) $v^{(0)}:=w^{(k)}$ および $j:=0$ とおく．

(Step 2.1) 次の方程式系を満たす $\hat{d}^{(j)}$ を求める．

$$
H_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)})+\nabla H_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)})^T\hat{d}^{(j)}=0
$$

(Step 2.2) もし，$\|H_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)}+\hat{d}^{(j)})\|\le\alpha_k$ ならば，$w^{(k+1)}:=v^{(j)}+\hat{d}^{(j)}$ とし，*Step 3* へ行く．さもなければ，*Step 2.3* に行く．

(Step 2.3) 次の不等式を満たす最小の非負整数 m を求め，それを m_j とおく．

$$
\Psi_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)}+\rho^m\hat{d}^{(j)})\le(1-2\sigma\rho^m)\Psi_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)})
$$

$t_j:=\rho^{m_j}$ とし，$v^{(j+1)}:=v^{(j)}+t_j\hat{d}^{(j)}$ とおく．

(Step 2.4) もし，$\|H_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j+1)})\|\le\alpha_k$ ならば，$w^{(k+1)}:=v^{(j+1)}$ とおき，*Step 3* へ進む．さもなければ，$j:=j+1$ とし，*Step 2.1* に戻る．

---

[2] ある実数 $\varepsilon>0$ が存在し，任意の $(x,z)\in\Re^n\times\Re^n$ に対して $(x-z)^T(f(x)-f(z))\ge\varepsilon\|x-z\|^2$ となるとき，f は強単調であるという．

[3] 任意の $(x,z)\in\Re^n\times\Re^n$ に対して $(x-z)^T(f(x)-f(z))\ge0$ となるとき，f は単調であるという．

(Step 3) 各パラメータを以下のように更新する.

$$\begin{aligned}\mu_{k+1} &:= \min\left\{s_{k+1}\|H_{\text{NR}}(w^{(k+1)})\|, \mu_0\eta^{k+1}\right\}\\ \varepsilon_{k+1} &:= \min\left\{t_{k+1}\|H_{\text{NR}}(w^{(k+1)})\|, \varepsilon_0\eta^{k+1}\right\}\\ \alpha_{k+1} &:= \alpha_0\eta^{k+1}\end{aligned}$$

$k := k+1$ とし, *Step 1* に戻る.

アルゴリズム1の大域的収束性と局所的収束性に関して, 以下の2つの定理を導いた. ただし, f は単調な関数であると仮定する.

定理 1 SOCCP(1) の解集合 S が非空かつ有界であるとする. そのとき, アルゴリズム *1* で生成される点列 $\{w^{(k)}\}$ は有界であり, そのすべての集積点は SOCCP(1) の解となる.

定理 2 $\{w^{(k)}\}$ をアルゴリズム *1* で生成される点列とし, その集積点を w^* とする. また, f は単調な関数であるものとする. さらに, $\{\nabla H_{\mu_k,\varepsilon_k}(w^{(k)})\}$ が有界であり, 任意の集積点が正則であると仮定する. このとき, 十分大きな任意の k に対して, *Step 2.2* が成り立ち, さらに点列 $\{w^{(k)}\}$ は w^* に超一次収束する.

5 まとめ

本研究では, ニュートン法に平滑化法と正則化法を組み込むことにより, 単調な関数を含む SOCCP を解くためのアルゴリズムを提案した. さらに, 適当な仮定の下で, 提案したアルゴリズムが大域的収束性と超一次収束性を持つことを示した.

今後の課題としては, より広いクラスの関数に対する SOCCP を解く効率的なアルゴリズムを構築すること, および, 定理1と2における仮定をより緩くすることなどが挙げられる.

参考文献

[1] M. Fukushima, Z.-Q. Luo and P. Tseng, *Smoothing functions for second-order cone complementarity problems*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 12, 2001, pp. 436–460.

[2] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd and H. Lebret, *Applications of second-order cone programming*, Linear Algebra and Its Applications, Vol. 284, 1998, pp. 193-228.