数理解析研究所講究録 1298 巻 2002 年 123-134

STRONG CONVERGENCE THEOREMS FOR FAMILIES OF ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS

芝浦工業大学 工学部　厚芝 幸子 (Sachiko Atsushiba)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

1. 序

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする。C から C への写像 T が C から C への nonexpansive であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときであり、C から C への写像 T が asymptotically nonexpansive with $\{k_n\}$ であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq k_n\|x - y\|$$

かつ $\overline{\lim}_{n\to\infty} k_n \leq 1$ をみたすときである ([2] 参照)。$F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す。

C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合として、T を C から C への nonexpansive mapping とし、x を C の元とする。Halpern [3] と Reich [6] は次のような iteration scheme について研究した:

$$x_0 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{1}$$

ただし、$\{\alpha_n\}$ は $\alpha_n \in [0, 1]$ をみたす実数列である。Wittmann [16] は、$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ と $F(T) \neq \emptyset$ がみたされるならば、(1) で定義された $\{x_n\}$ が x から $F(T)$ への最短点に強収束することを証明した。Shioji and Takahashi [9] は Wittmann [16] の結果を Banach 空間に拡張した。

C を Hilbert 空間の空でない有界閉凸部分集合として、T を C から C への asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ とし、x を C の元とする。Shimizu and Takahashi [7] は、平均の概念を用いることで、次のような iteration scheme を導入し、asymptotically nonexpansive mapping の不動点への強収束定理を証明した:

$$x_0 \in C, \quad x_n = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} T^j x_n, \quad n \geq l_0. \tag{2}$$

ただし、$\{\alpha_n\}$ は $\alpha_n \in [0, 1]$ をみたす実数列であり、l_0 は十分大きな整数である。Shioji and Takahashi [10] は Shimizu and Takahashi [7] の結果を Banach 空間に拡張した。さら

Key words and phrases. Fixed point, iteration, nonexpansive mapping, weak convergence, strong convergence, invariant mean.

に、Shioji and Takahashi [11] は [10] の結果を用いることで、次の強収束定理を証明した ([8] も参照): E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない有界閉凸部分集合とし、T は C から C への asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ とする。$\{\alpha_n\}$ は $0 \le \alpha_n \le 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}\Big((1-\alpha_n)\Big(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j\Big)^2 - 1\Big)_+ < \infty$ をみたす実数列とする。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を

$$x_0 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^j x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

本論文では、[5, 11] の考えを用いて、C から C への写像に対して iteration scheme を導入し、Banach 空間における asymptotically nonexpansive mapping の不動点への強収束定理を示す。これは、Shioji and Takahashi [11] の拡張にあたる定理である。one-parametor asymptotically nonexpansive semigroup に対する強収束定理も与える。さらに、(general) semigroup をパラメタとする asymptotically nonexpansive mapping の族に対する iteration scheme を導入し、Banach 空間における asymptotically nonexpansive semigroup の共通不動点への強収束定理も得られたので報告する。これの応用についても述べる。

2. 準備

本論文では以後、E は実 Banach 空間を表し、E^* は E の共役空間とし、$\langle y, x^*\rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す。$x_n \to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し、また $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す。$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ、すべての実数からなる集合、すべての非負の実数からなる集合とする。さらに、$\mathbb{N}$ はすべての非負の整数からなる集合を表す。実数 a に対して、$\max\{a, 0\}$ を $(a)_+$ で表す。E の部分集合 A に対して、 $\mathrm{co}A$, $\overline{\mathrm{co}}A$ と co_pA はそれぞれ、 A の凸包、 閉凸包、集合 $\{\sum_{i=0}^{p} a_i y_i : y_i \in A, a_i \ge 0, \sum_{i=0}^{p} a_i = 1\}$ とする。

Banach 空間 E が狭義凸であるとは $\|x\| = \|y\| = 1, x \ne y$ をみたす任意の $x, y \in E$ について $\|x+y\|/2 < 1$ が成立するときをいう。狭義凸な Banach 空間 E では、任意の $x, y \in E$, $\lambda \in (0,1)$ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば、$x = y$ となる。

$B_r = \{v \in E : \|v\| \le r\}$ とする。Banach 空間 E が一様凸であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$x, y \in B_1$ かつ $\|x-y\| \ge \varepsilon$ ならば、$\|x+y\|/2 \le 1 - \delta$ となる $\delta > 0$ が存在することである。一様凸な Banach 空間は回帰的であり、狭義凸であることが知られている。また、 Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは任意の $x, y \in S_E$ に対して

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{4}$$

が存在するときにいう。ただし、$S_E = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ とする。$y \in S_E$ に対して、極限 (4) が $x \in S_E$ に関して一様に存在するとき、Banach 空間 E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるという。

$x \in E$ に対して、

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を考える。Hahn-Banach の定理より $J(x) \neq \emptyset$ がわかる。そこで $J \subset E \times E^*$ を E の双対写像とよぶことにする。Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるならば、E, E^* にそれぞれノルム位相、弱* 位相を入れたとき、双対写像 J は一価で連続写像になることや、Banach 空間 E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるならば、それと同じ位相で、双対写像 J は E の有界部分集合上で一様連続であることが知られている。

C を E の空でない閉凸部分集合とし、K を E の空でない部分集合とする。写像 P は C から K の上への写像とする。$Px + t(x - Px) \in C$ をみたす任意の $x \in C$ と $t \geq 0$ に対して $P(Px + t(x - Px)) = Px$ が成立するならば、P を sunny であるという。また、任意の $x \in K$ に対して $Px = x$ が成立するならば写像 P は retraction であるという。Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であれば、C から K の上への retraction P が sunny かつ nonexpansive であることの必要十分条件は

$$\langle x - Px, J(y - Px) \rangle \leq 0, \quad x \in C, \quad y \in K.$$

が成立することである。したがって、C から K の上への sunny nonexpansive retraction は高々1個存在する。sunny nonexpansive retraction の存在に関する次の命題が [10] で証明された。

Proposition 2.1 ([10]). E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、T は C から C への asymptotically nonexpansive mapping で $F(T)$ が空でないとする。このとき、C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction が存在する。

3. ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPING に対する定理

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし、T は C から C への asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ で $F(T)$ が空でないとする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1, 0 \leq \beta_n \leq 1$ をみたす実数列とする。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} T^j y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} T^j x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{5}$$

で定義される点列とする。特に、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\beta_n = 1$ であれば点列 $\{x_n\}$ は (3) で記述される点列である。この節では、asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ に対して (5) で定義される点列 $\{x_n\}$ を考え、この点列の強収束について考察する。一般性を失うことなく、$n \in \mathbb{N}$ に対して $k_n \geq 1$ としてよい。

asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ の不動点への強収束定理 (定理 3.5) を与える前に、 証明に用いられる補題を与えておく

Lemma 3.1 ([1]). C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし、T は C から C への asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ で $F(T)$ が空でないとする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1$, $0 \leq \beta_n \leq 1$ かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1) < \infty$$

をみたす実数列とする。ただし、$M_n = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j\right)\left(\beta_n + (1-\beta_n)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j\right)\right)$ である。x を C の元とし、$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ はそれぞれ (5) で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界である。また、任意の j に対して $\{T^j x_n\}$ と $\{T^j y_n\}$ も有界である。

Lemma 3.2 と Lemma 3.3 は Shioji and Takahashi[10] によって示された。

Lemma 3.2 ([10]). E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、T は C から C への asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ で $F(T)$ が空でないとする。$\{d_n\}$ は $0 < d_n \leq 1, \lim_{n\to\infty} d_n = 0$ かつ

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j - 1}{d_n} < 1$$

をみたす実数列とする。x を C の元とし、$\{z_n\}$ を

$$z_n = d_n x + (1-d_n)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^j z_n, \quad n \geq m_0$$

で定義される点列とする。ただし、m_0 は十分大きい整数とする。このとき、$\{z_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

Lemma 3.3 ([10]). C を一様凸な Banach 空間の空でない閉凸部分集合とし、T は C から C への asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ で $F(T)$ が空でないとする。このとき、任意の $r > 0$ に対して、

$$\varlimsup_{m\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \sup_{y\in C\cap B_r} \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^j y - T^m\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^j y\right) \right\| = 0$$

が成立する。ただし、$B_r = \{z \in E : \|z\| \leq r\}$ である。

Lemma 3.4 が定理 3.5 の証明の中で本質的である。

Lemma 3.4 ([1]). Eを一様凸なBanach空間でノルムは一様にGâteaux微分可能とする。CをEの空でない閉凸部分集合とし、TはCからCへのasymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$で$F(T)$が空でないとする。$\{\alpha_n\}$と$\{\beta_n\}$は$0 \leq \alpha_n \leq 1, 0 \leq \beta_n \leq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n - 1) < \infty$$

をみたす実数列とする。ただし、$M_n = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j\right)\left(\beta_n + (1-\beta_n)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j\right)\right)$である。$x$を$C$の元とし、$\{x_n\}$を(5)で定義される点列とする。このとき、

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle x - Px, J(x_n - Px)\rangle \leq 0$$

が成立する。ただし、PはCから$F(T)$の上へのsunny nonexpansive retractionである。

3.2. 強収束定理.

3.1の補題を用いて、asymptotically nonexpansive mappingに対する強収束定理を得るが、この定理はShioji and Takahashi [11]の結果の拡張になっている。

Theorem 3.5 ([1]). Eを一様凸なBanach空間でノルムは一様にGâteaux微分可能とする。CをEの空でない閉凸部分集合とし、TはCからCへのasymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$で$F(T)$が空でないとする。$\{\alpha_n\}$と$\{\beta_n\}$は$0 \leq \alpha_n \leq 1, 0 \leq \beta_n \leq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n - 1) < \infty$$

をみたす実数列とする。ただし、$M_n = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j\right)\left(\beta_n + (1-\beta_n)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} k_j\right)\right)$である。$x$を$C$の元とし、$\{x_n\}$を

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{n} T^j y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{n} T^j x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

Remark 3.6. $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1)<\infty$ から $\sum_{n=0}^{\infty}((1-\alpha_n){M_n}^2-1)_+<\infty$ が導かれるので、次のことがいえる ([1] 参照)。
E, C, T, $\{k_n\}$ と x を Theorem 3.5 の通りとする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0\le\alpha_n\le 1, 0\le\beta_n\le 1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((1-\alpha_n){M_n}^2-1\right)_+<\infty$$

をみたす実数列とする。ただし、M_n は Theorem 3.5 の通りである。$\{x_n\}$ は (5) で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ が T の不動点に強収束するための必要十分条件は $\{x_n\}$ が有界であることである。

$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}k_j-1\right)<\infty$ から $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1)<\infty$ が導かれるので次の結果は Theorem 3.5 の系として得られる ([1] 参照)。

Corollary 3.7. E, C, T, $\{k_n\}$ と x は Theorem 3.5 の通りとする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0\le\alpha_n\le 1, 0\le\beta_n\le 1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}k_j-1\right)<\infty$$

をみたす実数列とする。$\{x_n\}$ を (5) で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は Theorem 3.5 通りである。C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

T が nonexpansive の場合、$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1)=0$ がみたされるので、直接、以下の定理を得る。

Theorem 3.8 ([1]). E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、T は C から C への nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ で $F(T)$ が空でないとする。$\{\alpha_n\}$ は $0\le\alpha_n\le 1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ をみたす実数列で、$\{\beta_n\}$ は $0\le\beta_n\le 1$ をみたす実数列とする。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を (5) で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

4. One-parametor asymptotically nonexpansive semigroup に対する定理

この節では、one-parametor asymtotically nonexpansive semigroup に対する強収束定理を与える。

Banach 空間の閉凸部分集合 C から C への写像の族 $\mathcal{S}=\{T(s):s\in\mathbb{R}^+\}$ が次の (i),(ii),(iii) をみたすとき、$\mathcal{S}=\{T(s):s\in\mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parametor asymptotically nonexpansive semigroup with $\{k_s:s\in\mathbb{R}^+\}$ であるという。

(i) $s\mapsto k_s$ は $\mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}^+$ への有界で連続な写像である;
(ii) $\overline{\lim}_{s\in\mathbb{R}^+}k_s\le 1$;

(iii) $T(s+t) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in \mathbb{R}^+$ に対して成立する;
(iv) $\|T(s)x - T(s)y\| \leq k_s\|x-y\|$ が任意の $x, y \in C$ と $s \in \mathbb{R}^+$ に対して成立する;
(v) 任意の $x \in C$ に対して、$s \mapsto T(s)x$ は連続である;
(vi) $T(0)x = x$ が任意の $x \in C$ に対して成立する。

特に、任意の $s \in \mathbb{R}^+$ について $k_s = 1$ が成立するとき、$\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parametor nonexpansive semigroup であるとよばれる。一般性を失うことなく、$s \in \mathbb{R}^+$ に対して $k_s \geq 1$ としてよい。

定理3.5のアイディアを用いて以下の結果を得るが、これは [12] を一般化した結果である。

Theorem 4.1. E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、$\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parametor asymtotically nonexpansive semigroup with $\{k_s : s \in \mathbb{R}^+\}$ で $\bigcap_{s\in\mathbb{R}^+} F(T(s))$ が空でないとする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1, 0 \leq \beta_n \leq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n - 1) < \infty$$

をみたす実数列とする。ただし、$M_n = \left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} k_s ds\right)\left(\beta_n + (1-\beta_n)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} k_s ds\right)\right)$ である。$\{t_n\}$ は $t_n \to \infty$ をみたす正数列とする。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\dfrac{1}{t_n}\displaystyle\int_0^{t_n} T(s)y_n ds, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)\dfrac{1}{t_n}\displaystyle\int_0^{t_n} T(s)x_n ds, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{6}$$

で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $\bigcap_{s\in\mathbb{R}^+} F(T(s))$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

Remark 4.2. $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1) < \infty$ から $\sum_{n=0}^{\infty}((1-\alpha_n){M_n}^2 - 1)_+ < \infty$ が導かれるので次のことがいえる ([1] 参照)。
E, C, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$, $\{k_s : s \in \mathbb{R}^+\}$, $\{t_n\}$ と x を Theorem 4.1 の通りとする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1, 0 \leq \beta_n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((1-\alpha_n){M_n}^2 - 1\right)_+$$

をみたす実数列とする。ただし、M_n は Theorem 4.1 の通りとする。$\{x_n\}$ は (6) で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ が $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ の共通不動点に強収束するための必要十分条件は $\{x_n\}$ が有界であることである。

$\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ が C 上の one-parameter nonexpansive semigroup の場合は、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1)=0$$

がみたされるので、直接、以下の定理を得る。

Theorem 4.3. E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、$\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parameter nonexpansive semigroup with $\{k_s : s \in \mathbb{R}^+\}$ で $\bigcap_{s\in\mathbb{R}^+} F(T(s))$ が空でないとする。$\{\alpha_n\}$ は $0 \le \alpha_n \le 1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$ をみたす実数列で、$\{\beta_n\}$ は $0 \le \beta_n \le 1$ をみたす実数列とする。x を C の元とし、$\{t_n\}$ は Theorem 4.1 の通りとし、$\{x_n\}$ を (6) で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $\bigcap_{s\in\mathbb{R}^+} F(T(s))$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

5. Aymptotically nonexpansive semigroup に対する定理

3 節で得た強収束定理を (general) semigroup に対する強収束定理に拡張できた。そこで、この節では、asymptotically nonexpansive semigroup の共通不動点への強収束定理を与える。これは [13] を一般化した結果である。

以後、S を (general) semigroup とする。C から C への写像の族 $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ が次の (i),(ii),(iii) をみたすとき、$\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の asymptotically nonexpansive semigroup with $\{k_t : t \in S\}$ であるという。

(i) $k_s \ge 0$ が任意の $s \in S$ に対して成立し, $\sup k_s < \infty$;
(ii) $\inf_s \sup_t k_{st} \le 1$;
(iii) $T(st) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in S$ に対して成立する;
(iv) $\|T(s)x - T(s)y\| \le k_s\|x-y\|$ が任意の $x, y \in C$ と $s \in S$ に対して成立する。

特に、$t \in S$ に対して $k_t = 1$ が成立するとき $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup であるとよばれる。一般性を失うことなく、$s \in S$ に対して $k_s \ge 1$ としてよい。$F(\mathcal{S})$ は $T(s), s \in S$ の共通不動点、すなわち $F(\mathcal{S}) = \bigcap_{s\in S} F(T(s))$ を表す。

以後、$B(S)$ は S 上の有界実数値関数全体からなる Banach 空間とし、そのノルムは supremum-norm とする。また、X は $B(S)$ の部分空間を表す。$\mu \in X^*$ に対して、$\mu(f)$ は μ の $f \in X$ での値を表すが、$\mu(f)$ は $\mu_t(f(t))$ とかくこともある。X が 1 を含むとき、X 上の線形汎関数 μ は $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ をみたすならば X 上の mean といわれる。

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする。$\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ をみたすとする。さらに任意の $x \in C$ に対して $\{T(t)x : t \in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する。X を $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して l_s-invariant であり、また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して、$\langle T(\cdot)x, x^*\rangle \in X$ とする。このとき、X 上の任意の mean μ と任意の $x \in C$ に対して $\langle T_\mu x, y\rangle = \mu_s\langle T(s)x, y\rangle$ が任意の $y \in E^*$ に対して成立する C の元 $T_\mu x$ が唯一存在する ([4, 14])。

任意の $s\in S$ と $f\in B(S)$ に対して、$l_s f\in B(S)$ を

$$(l_s f)(t)=f(st),\quad t\in S$$

で定義する。また l_s^* で l_s の共役作用素を表す。$s\in S$ のとき、$B(S)$ の部分空間 X が l_s-invariant であるとは、任意の $f\in X$ に対して $l_s f\in X$ であるときにいう。

Theorem 3.5, Theorem 4.1 を一般化して次の定理 (主定理) を得る。

Theorem 5.1. E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、S は semigroup とする。また、$\mathcal{S}=\{T(s):s\in S\}$ は C 上の asymptotically nonexpansive semigroup with $\{k_t:t\in S\}$ で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする。X は $B(S)$ の部分空間で $1\in X$ であり、任意の $s\in S$ について l_s-invariant であり、写像 $t\mapsto k_t$ は X の元であり、任意の $x\in C$ と $x^*\in E^*$ に対して $t\mapsto\langle T(t)x,x^*\rangle$ も X の元であるとする。さらに、$\{\mu_n\}$ は X 上の mean の列で、任意の $s\in S$ に対して $\lim_{n\to\infty}\|\mu_n-l_s^*\mu_n\|=0$ をみたすものとする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0\le\alpha_n\le 1, 0\le\beta_n\le 1,$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$$

かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1)<\infty$$

をみたす実数列とする。ただし、$M_n=\big((\mu_n)_s(k_s)\big)\big(\beta_n+(1-\beta_n)\big((\mu_n)_s(k_s)\big)\big)$ である。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0\in C \\ x_{n+1}=\alpha_n x+(1-\alpha_n)T_{\mu_n}y_n \\ y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)T_{\mu_n}x_n \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases}\tag{7}$$

で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $F(\mathcal{S})$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

Remark 5.2. $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1)<\infty$ から $\sum_{n=0}^{\infty}((1-\alpha_n)M_n{}^2-1)_+<\infty$ が導かれるので次のことがいえる ([1] 参照)。
E, C, S, $\mathcal{S}=\{T(s):s\in S\},\{k_s:s\in S\}$, X, $\{\mu_n\}$ と x は Theorem 5.1 の通りとする。$\{\alpha_n\}$ は $0\le\alpha_n\le 1$ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ をみたす実数列とし、$\{\beta_n\}$ は $0\le\beta_n\le 1$ をみたす実数列とする。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big((1-\alpha_n)M_n{}^2-1\big)_+$$

を仮定する。ただし、M_n は Theorem 5.1 の通りである。$\{x_n\}$ は (7) で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ が T の不動点に強収束するための必要十分条件は $\{x_n\}$ が有界であることである。

$\mathcal{S}=\{T(s):s\in S\}$ が C 上の nonexpansive semigroup の場合は

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1)=0$$

がみたされるので、直接、以下の定理が導かれる。

Theorem 5.3. E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、S を semigroup とする。$\mathcal{S}=\{T(s):s\in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする。X は $B(S)$ の部分空間で $1\in X$ であり、任意の $s\in S$ について l_s-invariant であり、写像 $t\mapsto k_t$ は X の元であり、任意の $x\in C$ と $x^*\in E^*$ に対して $t\mapsto\langle T(t)x,x^*\rangle$ も X の元であるとする。さらに、$\{\mu_n\}$ は X 上の mean の列で、任意の $s\in S$ に対して $\lim_{n\to\infty}\|\mu_n-l_s^*\mu_n\|=0$ をみたすものとする。さらに、$\{\alpha_n\}$ は $0\leq\alpha_n\leq 1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ をみたす実数列で、$\{\beta_n\}$ は $0\leq\beta_n\leq 1$ をみたす実数列とする。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を (7) で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $F(\mathcal{S})$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

6. 主定理の応用

定理 5.1 から、直接、定理 3.5 や定理 4.1 が得られるが、そのほかに以下の結果も得られる ([15] 参照)。

Theorem 6.1. E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、T は C から C への asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ で $F(T)$ が空でないとする。$\{q_{n,m}:n,m\in\mathbb{N}\}$ を $q_{n,m}\geq 0$ かつ任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\sum_{m=0}^{\infty}q_{n,m}=1$ をみたし、さらに $\lim_n\sum_{m=0}^{\infty}|q_{n,m+1}-q_{n,m}|=0$ をみたす実数列とする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0\leq\alpha_n\leq 1, 0\leq\beta_n\leq 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$$

かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n-1)<\infty$$

をみたす実数列とする。ただし、$M_n=\left(\sum_{m=0}^{\infty}q_{n,m}k_m\right)\left(\beta_n+(1-\beta_n)\left(\sum_{m=0}^{\infty}q_{n,m}k_m\right)\right)$ である。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0\in C \\ x_{n+1}=\alpha_n x+(1-\alpha_n)\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}q_{n,m}T^m y_n \\ y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}q_{n,m}T^m x_n, \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

Theorem 6.2. E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、T, U は C から C への asymptotically nonexpansive mapping with $\{k_n\}$ で $TU = UT$ であり、$F(T) \cap F(U)$ が空でないとする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0 \le \alpha_n \le 1, 0 \le \beta_n \le 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha_n)(M_n - 1) < \infty$$

をみたす実数列とする。ただし、$M_n = \left(\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i,j=0}^{n} k^i k^j\right)\left(\beta_n + (1-\beta_n)\left(\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i,j=0}^{n} k^i k^j\right)\right)$ である。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\dfrac{1}{(n+1)^2}\displaystyle\sum_{i,j=0}^{n} T^i U^j y_n \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)\dfrac{1}{(n+1)^2}\displaystyle\sum_{i,j=0}^{n} T^i U^j x_n \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $F(T) \cap F(U)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}$ への関数 Q が

(a) $\displaystyle\sup_{s\in\mathbb{R}^+} \int_0^\infty |Q(s,t)|dt < \infty;$

(b) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty Q(s,t)dt = 1;$

(c) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty |Q(s,t+h) - Q(s,t)|dt = 0, \quad h \in \mathbb{R}^+.$

をみたすとき、Q を strongly regular kernel という。

Theorem 6.3. E を一様凸な Banach 空間でノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする。C を E の空でない閉凸部分集合とし、$\mathcal{S} = \{T(s) : s \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parametor asymptotically nonexpansive semigroup with $\{k_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ で $\bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} F(T(t))$ が空でないとする。$Q = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ を strongly regular kernel とする。$\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $0 \le \alpha_n \le 1, 0 \le \beta_n \le 1, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)(M_n - 1) < \infty$ をみたす実数列とする。ただし、$M_n = \left(\int_0^\infty Q(s_n,t)k_t dt\right)\left(\beta_n + (1-\beta_n)\left(\int_0^\infty Q(s_n,t)k_t dt\right)\right)$

である。$\{s_n\}$ を $s_n \to \infty$ をみたす正数列とする。x を C の元とし、$\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\displaystyle\int_0^\infty Q(s_n,t)T(t)y_n dt, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)\displaystyle\int_0^\infty Q(s_n,t)T(t)x_n dt, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

で定義される点列とする。このとき、$\{x_n\}$ は Px に強収束する。ただし、P は C から $\bigcap_{s\in\mathbb{R}^+} F(T(s))$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

References

[1] S. Atsushiba, *Strong Convergence of Iterative Sequences for Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces*, Sci. Math. Japon., **7** (2002), 365-376 (online version), to appear (paper version).

[2] K. Goebel, W.A.kirk, *A fixed point theorems for asymptotically nonexpansive mappings,* Proc. Amer. Math. Soc., **35** (1972), 171–174.

[3] B. Halpern, *Fixed points of nonexpansive maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.

[4] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **12** (1988), 1269-1281.

[5] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[6] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.

[7] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal., **26** (1996), 265–272.

[8] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **211** (1997), 71–83.

[9] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3641–3645.

[10] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of averaged approximants for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Approximation Theory, **97** (1999), 53–64.

[11] N. Shioji and W. Takahashi, *A Strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, Arch. Math., **72** (1999), 354–359.

[12] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for continuous semigroup in Banach spaces*, Math. Japon., **1** (1999), 57–66.

[13] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **1** (2000), 73–87.

[14] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

[15] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis, – Fixed Point Theory and Applications–*, Yokohama Pub. (2000).

[16] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings,* Arch. Math., **58** (1992), 486–491.

Department of Mathematics, Shibaura Institute of Technology, Fukasaki, Saitama-City, Saitama 330-8570, Japan

E-mail address: atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp