数理解析研究所講究録 1298 巻 2002 年 165-171

On ε-Equilibrium Point in a Fractional Metagame

秋田県立大学　経営システム工学　木村　　寛 (YUTAKA KIMURA)[1]
秋田県立大学　経営システム工学　星野　満博 (MITSUHIRO HOSHINO)[2]
秋田県立大学　経営システム工学　矢戸　弓雄 (YUMIO YATO)[3]

1 A Noncooperative n-person Fractional Metagame

分数形非協力 n 人ゲーム (MGP) を次の集合

$$(N, X, f_i, g_i, G^i, S^i) \tag{1.1}$$

で与える. ここで,

1. $N := \{1, 2, \cdots, n\}$ をプレイヤーの集合とし, i 番目のプレイヤーを $i = 1, 2, \cdots, n$ で表す.
2. E をバナッハ空間とし, 各々のプレイヤー $i \in N$ は戦略集合 $X_i \subset E$ から戦略 x_i を選ぶものとする. また $X := \prod_{i=1}^n X_i$ とおき, $X \ni x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で n 人の戦略を表し, これを多価戦略 (multistrategies) と呼ぶ.
3. 各 $i \in N$ に対して, $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$ とする. ただし, $\boldsymbol{R}_+ = (0, \infty)$ と定義する.
4. 各 $i \in N$ に対して, $G^i = \frac{f_i}{g_i}$ と定義し, G^i をゲーム (MGP) におけるプレイヤー i の損失関数とする.
5. 各 $i \in N$ に対して, $S^i : X^{\widehat{i}} \to 2^{X_i}$ をゲーム (MGP) におけるプレイヤー i の決定ルール (decision rule) とし, $S := \prod_{i=1}^n S^i$ とおく.

2 A Noncooperative Parametric n-person Metagame

Definition 2.1 $\bar{x} \in X$ がゲーム (MGP) の consistent であるとは,

$$\forall i \in N, \qquad x_i \in S^i(x^{\widehat{i}}) \tag{2.1}$$

が成り立つことをいう.

[1] 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 E-mail: yutaka@akita-pu.ac.jp
[2] 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 E-mail: hoshino@akita-pu.ac.jp
[3] 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 E-mail: yato@akita-pu.ac.jp

ここで ε-social equilibrium point の定義を次に与える.

Definition 2.2 ある $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム (MGP) の ε-social equilibrium point (for short, **ε-s.e.p.**) であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$\bar{x}_i \in S^i(\widehat{\bar{x}^i}), \qquad \text{and} \qquad G^i(\bar{x}) < \inf_{y_i \in S^i(\widehat{\bar{x}^i})} G^i(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) + \varepsilon \tag{2.2}$$

が成り立つことをいう.

ただし, 記号 $\widehat{\bar{x}^i}$ は $\widehat{\bar{x}^i} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \cdots, \bar{x}_n)$ を表す.

(MGP) における **ε-s.e.p.** の解の存在を直接求めるのは困難である. つまり, 一般に, 損失関数に凸 (または, 凹) などの性質があれば比較的このような解を得やすいが, 上で与えた分数形の損失関数を持ったゲームでは, 例え各 $i \in N$ で f_i が凸, g_i が凹であったとしても $\frac{f_i}{g_i}$ は凸, または凹になるとは限らない. そこで (MGP) から構成されるある新たなパラメトリックゲーム (MGP_θ) を定義し, (MGP_θ) での解析を通して, (MGP) における **ε-s.e.p.** の解析を行う.

よって次に, (MGP) に対するパラメトリックゲーム (MGP_θ) を構成する.

$$(N, X, f_i, g_i, \theta_i, F^i_{\theta_i}, S^i) \tag{2.3}$$

ここで,

1. $N := \{1, 2, \cdots, n\}$ をプレイヤーの集合.
2. E をバナッハ空間, $X_i \subset E$ を各プレイヤー $i \in N$ の戦略集合とし, また, $X := \prod_{i=1}^n X_i$ とおく.
3. 各 $i \in N$ に対して, $f_i : X \to \boldsymbol{R}$, $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$ とする.
4. 各 $i \in N$ に対して $\theta_i : X^{\widehat{i}} \to \boldsymbol{R}_+$ と定義し, $\theta := (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) : \prod_i X^{\widehat{i}} \to \boldsymbol{R}^n_+$ をゲーム (MGP_θ) におけるパラメター関数と呼ぶ. ただし, $X^{\widehat{i}} := \prod_{j \neq i} X_j$ である.
5. 各 $i \in N$ に対して, $F^i_{\theta_i} := f_i - \theta_i g_i : X \to \boldsymbol{R}$ をゲーム (MGP_θ) におけるプレイヤー i の損失関数とする. つまり, 任意の $x \in X$ に対して $F^i_{\theta_i}(x) = f_i(x) - \theta_i(\widehat{x^i}) g_i(x)$ である.
6. 各 $i \in N$ に対して, $S^i : X^{\widehat{i}} \to 2^{X_i}$ をゲーム (MGP_θ) におけるプレイヤー i の決定ルール (decision rule) とし, $S := \prod_{i=1}^n S^i$ とおく.

Definition 2.3 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム (MGP_θ) の social equilibrium point (for short, **s.e.p.**) であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$\bar{x}_i \in S^i(\widehat{\bar{x}^i}), \qquad \text{and} \qquad F^i_{\theta_i}(\bar{x}) = \inf_{y_i \in S^i(\widehat{\bar{x}^i})} F^i_{\theta_i}(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) \tag{2.4}$$

$$= \inf_{y_i \in S^i(\widehat{\bar{x}^i})} \{ f_i(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) - \theta_i(\widehat{\bar{x}^i}) g_i(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) \} \tag{2.5}$$

が成り立つことをいう.

今, 各 $i \in N$ において $\varphi_i : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}\varphi_i(x,y) &= F^i_{\theta_i}(x) - F^i_{\theta_i}(y_i, x^{\hat{i}}) \\ &= f_i(x) - f_i(y_i, x^{\hat{i}}) - \theta_i(x^{\hat{i}})(g_i(x) - g_i(y_i, x^{\hat{i}})), \qquad \forall (x,y) \in X \times X.\end{aligned}$$

また, $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する.

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y), \qquad \forall (x,y) \in X \times X. \tag{2.6}$$

このとき次の Lemma 2.1 が成り立つ.

Lemma 2.1 次の (1),(2) は同値である.

(1) $\bar{x} \in X$ がゲーム (MGP_θ) の **s.e.p.** である.

(2) すべての $y \in S(\bar{x})$ に対して

$$\varphi(\bar{x}, y) \leq 0, \qquad \text{and} \qquad \bar{x} \in S(\bar{x}).$$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) であることは, $\bar{x} \in X$ がゲームの **s.e.p.** であることより, Definition 2.3 と φ の作り方より明らか.

次に (2) $\Rightarrow$ (1) であることは, 任意の $i \in N$ を固定し, $y = (y_i, \bar{x}^{\hat{i}})$ をとる. 今, $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0$ であることより,

$$\varphi_i(\bar{x}, y) + \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) \leq 0 \tag{2.7}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned}\sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) &= \sum_{j \neq i} \{ f_j(\bar{x}) - f_j(y_j, \bar{x}^{\hat{j}}) - \theta_j(\bar{x}^{\hat{j}})(g_j(\bar{x}) - g_j(y_j, \bar{x}^{\hat{j}})) \} \\ &= \sum_{j \neq i} \{ f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{x}_j, \bar{x}^{\hat{j}}) - \theta_j(\bar{x}^{\hat{j}})(g_j(\bar{x}) - g_j(\bar{x}_j, \bar{x}^{\hat{j}})) \} \\ &\quad (\text{今 } j \neq i \text{ より}, \bar{x} = (\bar{x}_j, \bar{x}^{\hat{j}}) = (y_j, \bar{x}^{\hat{j}})) \\ &= \sum_{j \neq i} \{ f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{x}) - \theta_j(\bar{x}^{\hat{j}})(g_j(\bar{x}) - g_j(\bar{x})) \} \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって以上より $\varphi_i(\bar{x}, y) \leq 0$ であるので, φ_i の作り方から, $\bar{x} \in X$ はゲーム (MGP_θ) の **s.e.p.** である. □

Lemma 2.2 X をバナッハ空間, K を X のコンパクトな凸部分集合とし, 集合値写像 $S : K \to 2^K$ は, u.h.c. かつ, nonempty, convex, closed-values であるとする. また, 実数値関数 $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ は次の条件 (1),(2),(3) を満たすものと仮定する.

(1) $\forall y \in K, \qquad x \mapsto \varphi(x,y)$; 下半連続関数.

(2) $\forall x \in K, \qquad y \mapsto \varphi(x,y)$; 凹関数.

(3) $\forall y \in K, \qquad \varphi(y,y) \leq 0.$

さらに，次で定義する集合 M は閉集合であると仮定する．

$$M = \{x \in K | \alpha(x) := \sup_{y \in S(x)} \varphi(x,y) \leq 0\} \tag{2.8}$$

このとき $\bar{x} \in K$ が存在し，次が成り立つ．

$$\bar{x} \in S(\bar{x}), \qquad \text{and} \qquad \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x},y) \leq 0. \tag{2.9}$$

この Lemma 2.2 の証明は, [5] を参照.

Theorem 2.1 各 $i \in N$ において，$X_i \subset E$ はコンパクト凸な部分集合，集合値写像 $S^i : X^{\hat{i}} \to 2^{X_i}$ は，u.h.c., l.s.c. かつ，nonempty, convex, closed-values であるとする．また，f_i, g_i, θ_i は次の条件 (1),(2),(3) を満たしていると仮定する．

(1) $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続かつ X_i 上で凸関数である．

(2) $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$, X 上で連続かつ X_i 上で凹関数である．

(3) $\theta_i : X^{\hat{i}} \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, $X^{\hat{i}}$ 上で連続である．

このとき次の式を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する．

$$\bar{x} \in S(\bar{x}), \qquad \text{and} \qquad \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x},y) \leq 0. \tag{2.10}$$

すなわち，ゲーム $\bar{x}$ は，ゲーム (MGP_θ) の **s.e.p.** である．

Proof. 各 $i \in N$ で $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合より，$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ はコンパクト凸集合. 仮定 (1)(2) より, 任意の $y \in X$ において $\varphi_i(\cdot, y)$ は X 上で連続であるので, $\varphi(\cdot, y)$ も X 上で連続であり, Lemma 2.2 の条件 (1) を満たす. また, f_i, g_i はそれぞれ X_i 上で凸関数, 凹関数であることと, $\theta_i : X^{\hat{i}} \to \boldsymbol{R}_+$ であることから, 任意の $x \in X$ に対して, $\varphi(x, \cdot)$ は X 上で凹関数となり, Lemma 2.2 の条件 (2) を満たす. 更に, すべての $y \in X$ に対して, $\varphi(y,y) = 0$ であることは明らかなので,

$$\sup_{y \in X} \varphi(y,y) = 0,$$

を得る．また，S のつくり方より，S は u.h.c. かつ，nonempty, convex, closed-values である．ここで，

$$M = \{x \in K | \alpha(x) := \sup_{y \in S(x)} \varphi(x,y) \leq 0\} \tag{2.11}$$

とおくと，M は閉集合である．よって, 以上より Lemma 2.2 から, 次を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する．

$$\bar{x} \in S(\bar{x}), \qquad \text{and} \qquad \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x},y) \leq 0. \tag{2.12}$$

従って, Lemma 2.1 より, この $\bar{x} \in X$ はゲーム (MGP_θ) の **s.e.p.** である． □

3 An ε-Equilibrium Point of n-person Fractional Metagame

ゲーム (MGP_θ) での一般のパラメター関数 θ に対して, 各 $i \in N$ において $\bar{\theta}_i$ を次で定義する.

$$\bar{\theta}_i(\widehat{x^i}) := \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, \widehat{x^i}), \qquad \forall x \in X. \tag{3.1}$$

ただし, $G^i(y_i, \widehat{x^i}) = \frac{f_i(y_i, \widehat{x^i})}{g_i(y_i, \widehat{x^i})}$. また, $\bar{\theta} := (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_n)$ とおく.
ここで, (MGP_θ) での結果を用いて (MGP) における ε-**s.e.p.** の存在を考える.

はじめに $\varepsilon > 0$ を与え, すべての $i \in N$ に対して, $\bar{\theta}_i^\varepsilon := \bar{\theta}_i + \varepsilon$ と定義する. つまり,

$$\bar{\theta}_i^\varepsilon(\widehat{x^i}) := \bar{\theta}_i(\widehat{x^i}) + \varepsilon, \qquad \forall x \in X, \tag{3.2}$$

とし, また, $\bar{\theta}_\varepsilon := (\bar{\theta}_1^\varepsilon, \cdots, \bar{\theta}_n^\varepsilon)$ とおく.

Definition 3.1 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム $(MGP_{\bar{\theta}_\varepsilon})$ の **s.e.p.** であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$F^i_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}(\bar{x}) = \inf_{y_i \in S^i(\widehat{\bar{x}^i})} F^i_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) \tag{3.3}$$

$$= \inf_{y_i \in S^i(\widehat{\bar{x}^i})} \{f_i(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) - (\bar{\theta}_i(\widehat{\bar{x}^i}) + \varepsilon) g_i(y_i, \widehat{\bar{x}^i})\} \tag{3.4}$$

が成り立つことをいう.

Theorem 3.1 ある $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム $(MGP_{\bar{\theta}_\varepsilon})$ の **s.e.p.** であるならば, $\bar{x} \in X$ はゲーム (MGP) の ε-**s.e.p.** である.

Proof. 任意の $i \in N$, $x \in X$ に対して, $\bar{\theta}_i(\widehat{x^i}) + \varepsilon > \bar{\theta}_i(\widehat{x^i})$ より,

$$0 > \inf_{y_i \in S^i(\widehat{x^i})} F^i_{\bar{\theta}_i^\varepsilon}(y_i, \widehat{x^i}). \tag{3.5}$$

また, $\bar{x}$ が $(MGP_{\bar{\theta}_\varepsilon})$ の **s.e.p.** より,

$$0 > f_i(\bar{x}) - (\bar{\theta}_i(\widehat{\bar{x}^i}) + \varepsilon) g_i(\bar{x}) \tag{3.6}$$

が成り立つ. よって,

$$G^i(\bar{x}) < \bar{\theta}_i(\widehat{\bar{x}^i}) + \varepsilon.$$

ゆえに, $\bar{x}$ は (MGP) の ε-**s.e.p.** である. □

Lemma 3.1 各 $i \in N$ において $X_i \subset E$ はコンパクト集合であり, f_i, g_i は次の (1),(2) を満たしていると仮定する.

(1) $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続.

(2) $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$, X 上で連続.

このとき, 任意の $i \in N$ に対して, $\bar{\theta}_i^{\varepsilon} : X^{\hat{i}} \to \boldsymbol{R}_+$ は $X^{\hat{i}}$ の上で一様連続である.

この Lemma 3.1 の証明は, [8] を参照.

Theorem 3.2 ある $\varepsilon > 0$ を与え, 各 $i \in N$ において, $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合であり, 集合値写像 $S^i : X^{\hat{i}} \to 2^{X_i}$ は u.h.c., l.s.c. かつ, nonempty, convex, closed-values であるとする. また f_i, g_i は次の (1),(2) を満たしていると仮定する.

(1) $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続かつ X_i 上で凸関数である.

(2) $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$, X 上で連続かつ X_i 上で凹関数である.

このとき次の式を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する.

$$\bar{x} \in S(\bar{x}), \qquad \text{and} \qquad \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \tag{3.7}$$

したがって, ゲーム $\bar{x}$ は, ゲーム (MGP) の ε-**s.e.p.** である.

Proof. 任意の $i \in N$ に対して, $\varphi_i^{\varepsilon} : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}\varphi_i^{\varepsilon}(x, y) &:= F^i_{\bar{\theta}_i^{\varepsilon}}(x) - F^i_{\bar{\theta}_i^{\varepsilon}}(y_i, x^{\hat{i}}) \\ &= f_i(x) - f_i(y_i, x^{\hat{i}}) - (\bar{\theta}_i(x^{\hat{i}}) + \varepsilon)(g_i(x) - g_i(y_i, x^{\hat{i}})), \qquad \forall (x, y) \in X \times X.\end{aligned}$$

また, $\varphi^{\varepsilon} : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する.

$$\varphi^{\varepsilon}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{\varepsilon}(x, y), \qquad \forall (x, y) \in X \times X. \tag{3.8}$$

各 $i \in N$ で $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合より, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ はコンパクト凸集合. 仮定 (1)(2) より, $\varphi_i^{\varepsilon}(\cdot, y)$ は X 上で連続であるので, $\varphi^{\varepsilon}(\cdot, y)$ も X 上で連続であり, Lemma 2.2 の条件 (1) を満たす. また, f_i, g_i はそれぞれ X_i 上で凸関数, 凹関数であることと, $\bar{\theta}_i^{\varepsilon} : X^{\hat{i}} \to \boldsymbol{R}_+$ であることから, $\varphi^{\varepsilon}(x, \cdot)$ は X 上で凹関数となり, Lemma 2.2 の条件 (2) を満たす. 更に, すべての $y \in X$ に対して, $\varphi^{\varepsilon}(y, y) = 0$ であることは明らかなので,

$$\sup_{y \in X} \varphi^{\varepsilon}(y, y) = 0,$$

を得る. また, S も u.h.c. かつ, nonempty, convex, closed-values となることも明らかである. したがって, 集合 M を (2.11) として定義することにより, Theorem 2.1 の証明と同様にして, M は閉集合となる. よって, Lemma 2.2 から, 次を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する.

$$\bar{x} \in S(\bar{x}), \qquad \text{and} \qquad \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \tag{3.9}$$

ゆえに Lemma 2.1 より, $\bar{x}$ はゲーム $(MGP_{\bar{\theta}^{\varepsilon}})$ の **s.e.p.** である. また Theorem 3.1 より, $\bar{x}$ はゲーム (MGP) の ε-**s.e.p.** である. □

References

[1] J.P.Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).

[2] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).

[3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).

[4] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).

[5] J.P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).

[6] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).

[7] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.

[8] Y. Kimura, Y. Sawasaki, and K. Tanaka, A Noncooperative Equilibrium for n-Person Game with Fractional Loss Function, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, World Scientific, (1999) 44-51.

[9] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).

[10] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε-Equilibrium Point in a Noncooperative n-person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 413-423.

[11] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.