数理解析研究所講究録 1298 巻 2002 年 18-24

ある Obstacle Problem の解の一致点集合について

東京理科大学理学部数学科 宮島静雄 (Shizuo Miyajima)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Science University of Tokyo

1. Obstacle Problem

C^1 級汎関数の変分問題 ある実 Banach 空間 X 上の実数値汎関数 $J[u]$ $(u \in X)$ に対する変分問題 $\min_{u\in X} J[u]$ の解 u_0 は，J が Fréchet 微分可能であれば $J'[u_0]=0$ をみたしていなければならない．例えば $X=H_0^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界，境界は C^1 級)，$f\colon \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は C^1 級とすると，$J[u] := \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,dx$ に対して

$$J'[u]h = \int_\Omega \left[f_u(x,u,\nabla u)h + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_{x_i}}(x,u,\nabla u)\cdot\frac{\partial h}{\partial x_i}\right] dx$$

となり，よく知られているように部分積分によって $J'[u]=0$ は Euler–Lagrange 方程式

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial u_{x_i}}(x,u,\nabla u)\right) = f_u(x,u,\nabla u)$$

に書き換えられる．このような場合は，変分法的な観点と偏微分方程式の観点の双方から変分問題の解の存在や regularity を議論することが可能となる．

しかし，一般の場合に戻ると，変分問題としては Banach 空間全体の上での最小値を考えるということは必然の枠組みではなく，その凸部分集合に制限して問題を考えることも非常に自然なものである．こうした観点は早くから導入されてきたが，この場合は Euler–Lagrange 方程式の代わりに「変分不等式」の解を求めることになる．これは次のように定式化されるものである．K を X の閉凸集合として，その indicator function I_K を

$$I_K[u] := \begin{cases} 0 & u\in K \text{ のとき} \\ \infty & u\notin K \text{ のとき} \end{cases}$$

で定めると，制約条件付きの，$\min_{u\in K} J[u]$ を求める問題は，制約条件なしの $\min_{u\in X}(J+I_K)[u]$ を求める問題に帰着される．従って u_0 が $\min_{u\in K} J[u]$ の解を与えるためには，J が C^1 級ならば，

$$J'[u_0] + \partial I_K[u_0] \ni 0, \tag{1a}$$

$$u_0 \in K \tag{1b}$$

をみたすことが必要である．ここに ∂I_K は下半連続凸関数 I_K の劣微分であり，$u_0 \in K$ ならば $\partial I_K[u_0] = \{\varphi \mid \varphi \in X^*,\ \forall v \in K\ \langle v - u_0, \varphi\rangle \le 0\}$ で与えられる．

このような制約条件付き変分問題の例として**「障害物問題」Obstacle Problem** がある．これは X がある空間 Ω 上の関数空間であり，与えられた Φ に対して $K := \{u \in X \mid u \ge \Phi\}$ となっているときを指している．($X = L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$, $X = H_0^1(\Omega)$ などでは確かに K は閉凸になる.)

凸汎関数の場合　今までは $J[u]$ は C^1 級としてきたが，∞ を値に取る，適正下半連続汎関数の場合には凸解析の手法が適用できることになる．簡単な例の場合にこの方法で扱える障害物問題を説明しよう．

空間次元 1 で，$L^2((0,1))$ 上の適正下半連続汎関数

$$J[u] := \begin{cases} (1/2)\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx & (u \in H_0^1((0,1))) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

の場合を考えよう．そして $\Phi \in C^2([0,1])$ は $\Phi(0), \Phi(1) \le 0$ をみたすものとして，$u \ge \Phi$ という制約条件を課すことにする．このとき変分問題 $\min_{u\in K} J[u]$ の解 u がみたすべき条件は，

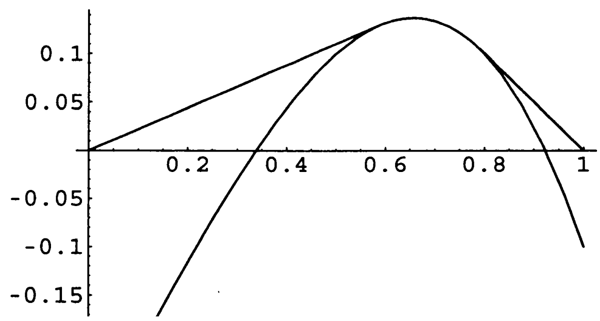
$$\partial(J + I_K)[u] \ni 0, \quad u \in K$$

であるが，$\partial(J+I_K)[u] = \partial J[u] + \partial I_K[u]$ と，$\partial I_K[u] = \{v \in L^2((0,1)) \mid v(x) \ge 0,\ (\Phi - u)(x)v(x) \le 0\,(\text{a.e. } x)\}$ であることから，$u \in H^2((0,1)) \cap H_0^1((0,1))$ かつ

$$u''(x) \le 0,\ u''(x)(\Phi(x) - u(x)) = 0,\ u(x) \ge \Phi(x) \quad (\text{a.e. } x) \tag{2}$$

であることが分かる [1]．[1] ではこのような解の存在も導かれている．

(2) 式は $u(x) > \Phi(x)$ をみたす点では $u''(x) = 0$ であることを示しており，解 u は下図のようになることが分かる．



<u>p-Laplacian の場合</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は原点を含み，有界で滑らかな境界を持つとし，$1 < p < \infty$ を定数とする．また $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ かつ $\Phi|_{\partial\Omega} \leq 0$ とする．このとき Sobolev 空間 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上の汎関数 $J[u] := (1/p) \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx$ の $K(\Phi) := \{ u \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ u \geq \Phi \}$ における最小値の存在が変分法の直接法で示されるが，最小値を与える解 u は

$$u \in K(\Phi) \text{ かつ } \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (v - u) \, dx \geq 0 \quad (\forall v \in K(\Phi)) \tag{3}$$

で特徴付けられる．この条件は次の変分不等式と同値となる．

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \leq 0, \quad u \geq \Phi, \quad \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)(u - \Phi) = 0 \tag{4}$$

2. 一致点集合

$u \geq \Phi$ という制約条件下での $J[u]$ の変分問題 (Obstacle Problem) の解は，$u(x) > \Phi(x)$ をみたす x では制約条件のない Euler–Lagrange 方程式をみたすが，$u(x) = \Phi(x)$ となる点では不等式しか期待できない．Obstacle Problem の解 u について，$\{ x \mid u(x) = \Phi(x) \}$ を（制約関数との）一致点集合というが，これを具体的に求めることは一般に困難である．しかし一致点集合が星形になることがしばしばあり，坂口 [2] は次の結果を示した．

定理 ([2]) Ω, p, J は前節の最後に述べたものとし，特に Ω は凸とする．そして Φ はある非負な斉次凸関数 φ と定数 c によって $\Phi = -\varphi + c$ と表されているとする．このとき (3) の解 u の一致点集合 $\{ x \mid u(x) = \Phi(x) \}$ は原点に関して星形である．

ここでは特に $p = 2$ の場合について，制約関数 Φ に関する条件をある程度緩めても一致点集合の星形性が成り立つことを示す．

以下では次の仮定と記号を使う：

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ，有界な凸領域で，$0 \in \Omega$ であるとする．
- $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ は上に凸で，$\psi(0) > 0$, $\partial\Omega$ 上では $\psi < 0$ をみたす．
- $K_\psi := \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq \psi \text{ a.e. on } \Omega \}$
- $u \in H_0^1(\Omega)$ は $\min_{K_\psi} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ の解で，

$$I_\psi := \{ x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x) \}$$

を制約条件 ψ との一致点集合とする．

3. 坂口氏の議論

坂口氏の議論は，$\psi = c - f$ として，f が s 次同次 $(s > 1)$ な凸関数としたとき，

$$v(x) := x \cdot \nabla(u - \psi)(x) - s(u - \psi)(x) \tag{5}$$

が次の条件を満たすことに依拠している：

$$\triangle v = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus I_\psi; \tag{6a}$$

$$v = 0 \quad \text{on } I_\psi; \tag{6b}$$

$$v \geq 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{6c}$$

(6b) は自明な条件だが，残りの二つの事実の証明は同次関数であることに強く依存している．

ともあれ，これらの性質が証明されれば，v に対して最大値原理を適用することにより $\Omega \setminus I_\psi$ 上で $v \geq 0$ であることが分かり，それから I_ψ が原点に関して星形であることが容易に分かる．

4. 我々の議論

$\psi = c - f$ （f は s 次同次）という場合でなくても，
<u>適当な $s > 0$ を取って</u> (5) と全く同じに

$$v(x) := x \cdot \nabla(u - \psi)(x) - s(u - \psi)(x) \tag{7}$$

と定義して，

$$\triangle v \leq 0 \quad \text{in } \Omega \setminus I_\psi; \tag{8a}$$

$$v \geq 0 \quad \text{on } I_\psi; \tag{8b}$$

$$v \geq 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{8c}$$

が成り立つようにできれば，前と全く同じ理由で I_ψ が原点に関して星形であることが示される．

v がこのような条件を満たすような s が存在するような ψ を完全に特徴付けることは困難であり，われわれはともかく $c - f$ （f は s 次同次）という形以外の ψ でそのようなものが存在することを示すことを目標とする．

<u>**ψ の限定**</u>　次の形の ψ に限定して考える：

$$\psi(x) := c - \sum_{k=1}^{n} a_k |x_k|^{b_k} \tag{9}$$

ただし x_k は x の第 k 成分で，$c > 0$, $a_k > 0$, $b_k > 1$ とする．

条件 (8a) のチェック　Ω を前と同様とし，u を ψ に対する Obstacle Problem の解とする．このとき

$$\triangle v \leq 0 \text{ in } \Omega \setminus I_\psi \Leftrightarrow s \geq \max_k b_k$$

が成り立つ．

条件 (8c) のチェック　この条件のチェックには坂口 [2] と同じく，upper solution による評価を使う．そのために，$y = W_z(x)$ で z における ψ の接平面の方程式を表す：

$$W_z(x) := \nabla\psi(z)\cdot(x-z)+\psi(z).$$

任意の $x_0 \in \partial\Omega$ に対して $z \in \Omega$ で，$W_z(x)$ が $W_z(x_0) = 0$ かつ $W_z \geq 0$ on Ω となるものが一意に存在し，W_z は upper solution なので $W_z \geq u$ が成り立つ．従って，$x_0 \cdot \nabla\psi(x_0) \geq x_0 \cdot \nabla W_z(x_0)$ となり，

$$v(x_0) \geq x_0 \cdot \nabla W_z(x_0) - x_0 \cdot \nabla\psi(x_0) + s\psi(x_0)$$

が成り立つ．従って，上式の右辺が非負，すなわち

$$s \leq \frac{x_0 \cdot \nabla\psi(x_0) - x_0 \cdot \nabla W_z(x_0)}{\psi(x_0)}$$

ならば $v(x_0) \geq 0$ となる．よって

$$s \leq \inf_{x_0 \in \partial\Omega} \frac{x_0 \cdot \nabla\psi(x_0) - x_0 \cdot \nabla W_z(x_0)}{\psi(x_0)} \tag{10}$$

がみたされれば (8c) が成り立つ．

これまでの結果から，(9) の形の ψ に対して，ある $s > 0$ で (8a) ～ (8c) までの条件が成り立つには

$$\max_k b_k \leq \inf_{x_0 \in \partial\Omega} \frac{x_0 \cdot \nabla\psi(x_0) - x_0 \cdot \nabla W_z(x_0)}{\psi(x_0)} \tag{11}$$

であれば十分であり，このとき I_ψ が原点を中心とする星形領域であることが分かる．

5. 具体例での条件 (11) のチェック

(11) は ψ だけに関する条件になっているが，その成立を確認するのは，(9) の形に限定しても一般の領域では困難である．

ここでは Ω を 2 次元空間の原点中心の単位円板，

$$\psi := \frac{1}{2} - (|x|^3 + |y|^4)$$

という場合において確かに条件が満たされることを見る．このチェックについては福間健一氏 (当時東京理科大学大学院) の協力を仰いだことを記し感謝したい．

<u>z の計算</u>　$x_0 = {}^t(a,b) \in \partial\Omega$ とすると（$a, b > 0$ とする），x_0 を通り，Ω 上では Ω の上方にあるような平面の方程式は，ある定数 γ によって

$$z + \gamma(ax + by - 1) = 0$$

と表される．この平面がある $z = {}^t(x_0, y_0) \in \Omega$ における ψ のグラフの接平面になる条件は

$$\left.\begin{aligned} -3x_0^2 &= -\gamma a, \\ -3y_0^2 &= -\gamma b, \\ \frac{1}{2} - x_0^3 - y_0^4 &= \gamma(ax_0 + by_0 - 1) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

となる．これは

$$x_0 = \left(\frac{\gamma a}{3}\right)^{1/2}, \quad y_0 = \left(\frac{\gamma b}{4}\right)^{1/3}$$

かつ

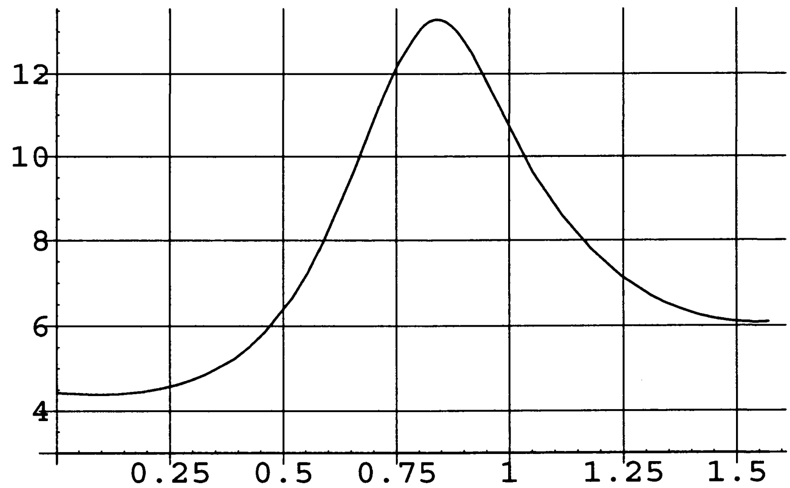
$$\frac{1}{2} - \gamma + \gamma a \left(\frac{\gamma a}{3}\right)^{1/2} + \gamma b \left(\frac{\gamma b}{4}\right)^{1/3} - \left(\frac{\gamma a}{3}\right)^{3/2} - \left(\frac{\gamma b}{4}\right)^{4/3} = 0 \tag{13}$$

と同値である．

よって，(13) の正値解を求めれば z が求まり，それについて (11) の右辺が計算できる．しかし (13) の正値解を a, b の関数として explicit に表示することは無理なので，我々はこの解を簡単な式で表されるもので上下から評価して計算を行った．これによると，$(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と角度で表示した場合，(11) の右辺の

$$\frac{x_0 \cdot \nabla\psi(x_0) - x_0 \cdot \nabla W_z(x_0)}{\psi(x_0)}$$

の値は，θ の関数として次のグラフ以上になり，(11) の成立が示される．



upper solution による評価

$$u_0 \in H^1(\Omega), \quad u_0 \geq \psi, \quad u_0 \geq 0 \text{ on } \partial\Omega$$

とすると，ψ に対する Obstacle problem の解 u に対して $u_0 \geq u$ が成り立つ.

星形性の証明

「障害物」ψ に対する Obstacle Problem の解 u について

$$x \cdot \nabla(u-\psi)(x) - s(u-\psi)(x) \geq 0$$

とする. $x \cdot \nabla(u-\psi)$ が x 方向への方向微分であることに注意すると，任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ を固定して，$\varphi(t) := (u-\psi)(t\xi)$ と置くと，$t > 0$ で

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) - s\frac{\varphi(t)}{t} \geq 0$$

である. $\varphi \geq 0$ なので，これから

$$0 < t_0 < t \Longrightarrow \varphi(t) \geq \varphi(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^s$$

が分かり，$t\xi \in I_\psi$ ならば $0 < t_0 < t$ で $t_0\xi \in I_\psi$ が成り立つ.

参考文献

[1] 高村幸男，小西芳雄,「非線形発展方程式」，岩波基礎数学講座.

[2] Sakaguchi, S., *Coincidence sets in the obstracle problem for the p-harmonic operator*, Proc. A.M.S. **95**(1985), 382–386.