数理解析研究所講究録 1298 巻 2002 年 47-58

Banach 空間における積分作用素の近似法について

琉球大学 理学部　西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)
Faculty of Science, University of the Ryukyus

1. 序

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ とおく. また, $\mathbb{R}$ は実数直線を表す. 有界な数列 $\{s_n\}$ が s に almost convergent(a.c.) であるとは,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=k}^{k+n-1}s_m=s \qquad \text{uniformly in } k\in\mathbb{N}_0$$

が成り立つことである ([5]). $C[0,1]$ 上の Bernstein(多項式) 作用素は

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (f\in C[0,1],\ x\in[0,1])$$

によって定義される. このとき, すべての $f\in C[0,1]$ に対して $\{B_n(f)(x)\}$ は $[0,1]$ 上で一様に $f(x)$ に a.c. である. 同様なことが Fejér 作用素

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x-t)f(t)dt \qquad (f\in C_{2\pi},\ x\in\mathbb{R})$$

但し,

$$F_n(u)=1+2\sum_{j=1}^{n}\Big(1-\frac{j}{n+1}\Big)\cos ju,$$

についても成立する. 即ち, すべての $f\in C_{2\pi}$に対して $\{\sigma_n(f)(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様に $f(x)$ に a.c. である.

これらの結果の鑑み, 次のような近似法を導入する ([cf. [6], [7], [8]): $(E,\|\cdot\|)$ は Banach 空間, (X,d) は距離空間で, $X_0\subseteq X, E_0\subseteq E$とする. Dは有向集合で, Λを添字集合とする. $\mathfrak{T}=\{T(x):x\in X\}$ と $\mathfrak{L}=\{L_{\alpha,\lambda}(x):\alpha\in D,\ \lambda\in\Lambda,\ x\in X\}$ を共に E_0から Eへの写像の族とする. このとき, $\mathfrak{L}$ が E_0上の (同程度一様)$\mathfrak{T}$-近似法 ($\mathfrak{T}$-AP) であるとは,

$$\forall f\in E_0,\ \lim_{\alpha}\|L_{\alpha,\lambda}(x)(f)-T(x)(f)\|=0 \quad \text{uniformly in } \lambda\in\Lambda,\ x\in X_0$$

が成立することである.

ここでは, 次のように定義される E_0上の積分作用素の族 $\mathfrak{L}$ を考える: Yを可分な位相空間とし, μを Y 上の Borel 測度とする. $\mathfrak{T}$ において, 各 $f \in E_0$に対して, 写像 $x \mapsto T(x)(f)$ は X上で強連続で有界とする. $\{\xi_{\alpha,\lambda} : \alpha \in D,\ \lambda \in \Lambda\}$ は Yから Xへの連続写像の族で, $\mathfrak{A} = \{\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot) : \alpha \in D, \lambda \in \Lambda, x \in X\}$ を $L^1(Y,\mu)$ に属する関数の族とする. このとき,

$$L_{\alpha,\lambda}(x)(f) = \int_Y \chi_{\alpha,\lambda}(x;y) T(\xi_{\alpha,\lambda}(y))(f)\, d\mu(y) \qquad (f \in E_0) \tag{3}$$

と定義する. (3) の右辺の積分は, Bochner 積分として常に存在している. より一般的に,

$$K_{\alpha,\lambda}(F)(x) = \int_Y \chi_{\alpha,\lambda}(x;y) F(\xi_{\alpha,\lambda}(y))\, d\mu(y) \qquad (F \in BC(X,E)) \tag{4}$$

によって定義される積分作用素を考える. ここで, $BC(X,E)$ は Xから Eへの有界な連続写像全体の成す Banach 空間を表す.

本講演の目的は, 適当な条件の下で $K_{\alpha,\lambda}(F)(x) \to F(x)$ ($F \in BC(X,E)$ 及び $L_{\alpha,\lambda}(x)(f) \to T(x)(f)$ ($f \in E_0$) の $\Lambda \times X_0$上の一様収束性について考えることである. 更に, これらの結果を補間型作用素, 合成積型作用素, 各種の総和法へ応用する. 詳細な取り扱いについては, [10] を参照 (cf. [9]).

2. 収束定理

X_0はコンパクト集合で, Xのある開集合 O_{X_0}とコンパクト集合 Z_{X_0}が存在して, $X_0 \subseteq O_{X_0} \subseteq Z_{X_0}$ とする. 当然, Xが局所コンパクトならば, これは常に満たされる.

$\mathfrak{A} = \{\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot) : \alpha \in D, \lambda \in \Lambda, x \in X\}$ は $L^1(Y,\mu)$ に属する関数の族とする. $\mathfrak{A}$ が (同程度一様) 近似単位 (核) であるとは, それが次の条件 (5), (6), (7) を満たすことである:

$$\limsup_{\alpha} \Big(\sup_{\lambda \in \Lambda, x \in X_0} \|\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot)\|_1 \Big) < \infty, \tag{5}$$

$$\lim_{\alpha} \int_Y \chi_{\alpha,\lambda}(x;y)\, d\mu(y) = 1 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda,\ x \in X_0, \tag{6}$$

$$\forall\, \delta > 0,\ \lim_{\alpha} \int_{d(x,\xi_{\alpha,\lambda}(y)) \geq \delta} |\chi_{\alpha,\lambda}(x;y)|\, d\mu(y) = 0 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda,\ x \in X_0. \tag{7}$$

$\mathfrak{A}$ が正であるとは, すべての$\alpha \in D, \lambda \in \Lambda, x \in X$に対して$\chi_{\alpha,\lambda}(x;y) \geq 0 \quad (\mu\text{-a.e. } y \in Y)$ となることである. また, $\mathfrak{A}$ が正規であるとは, すべての$\alpha \in D, \lambda \in \Lambda, x \in X$に対して

$$\int_Y \chi_{\alpha,\lambda}(x;y)\, d\mu(y) = 1$$

となることである.

(4) で定義された積分作用素の族 $\mathfrak{K} = \{K_{\alpha,\lambda} : \alpha \in D, \lambda \in \Lambda\}$ が $BC(X,E)$ 上の (同程度一様) 近似法 (AP) であるとは,

$$\forall\, F \in BC(X,E),\ \lim_{\alpha} \|K_{\alpha,\lambda}(F)(x) - F(x)\| = 0 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda,\ x \in X_0$$

が成立することである. 以下において, $\mathfrak{L} = \{L_{\alpha,\lambda}(x) : x \in X\}$ は (3) によって定義された積分作用素の族とする.

定理 1 $\mathfrak{A}$ が近似単位ならば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP である, 従って $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である. 特に, $\mathfrak{A}$ が正で, 且つ (6) と (7) を満たせば $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP であり, 従って $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である.

関数 $\Phi : X_0 \times X \to [0,\infty)$ は, $\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot)\Phi(x,\xi_{\alpha,\lambda}(\cdot)) \in L^1(Y,\mu)$ 及び

$$\forall\, \delta > 0,\ \inf\{\Phi(x,t) : (x,t) \in X_0 \times X,\ d(x,t) \geq \delta\} > 0 \tag{8}$$

を満たすとする. また, $\tau_{\alpha,\lambda}(x;\Phi) = \|\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot)\Phi(x,\xi_{\alpha,\lambda}(\cdot))\|_1$ とおく. 特に, $p > 0,\ x \in X, \chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot)d^p(x,\xi_{\alpha,\lambda}(\cdot)) \in L^1(Y,\mu)$ のとき, $\mu_{\alpha,\lambda}(x;p) = \tau_{\alpha,\lambda}(x;d^p)$ を$\chi_{\alpha,\lambda}$の x における p 次絶対モーメントという.

定理 2 (5) と (6) が成り立ち, 且つ

$$\lim_{\alpha} \tau_{\alpha,\lambda}(x;\Phi) = 0 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda, x \in X_0 \tag{9}$$

ならば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP である, 従って $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である.

系 1 $\mathfrak{A}$ が正で, 且つ (6) と (9) を満たせば $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP であり, 従って $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である.

定理 3 (5) と (6) が成り立ち, 且つある $p > 0$ に対して

$$\lim_{\alpha} \mu_{\alpha,\lambda}(x;p) = 0 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda, x \in X_0 \tag{10}$$

ならば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP である, 従って $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である.

系 2 $\mathfrak{A}$ が正で, 且つ (6) とある $p > 0$ に対して (10) を満たせば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP であり, 従って $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である.

関数 Φは次の形で定義されるものとする:

$$\Phi(x,t)=\sum_{i=1}^{r}u_i(x)w_i(t)\geq 0 \quad (x,t)\in X^2),\quad \Phi(x,x)=0 \quad (x\in X_0).$$

但し, 各関数 u_iは X_0で有界で, 各関数 w_iは Xで連続であり $\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot)w_i(\xi_{\alpha,\lambda}(\cdot))\in L^1(Y,\mu)$ とする.

wは X上の実数値連続関数で, $\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot)w(\xi_{\alpha,\lambda}(\cdot))\in L^1(Y,\mu)$ のとき,

$$\nu_{\alpha,\lambda}(w)(x)=\int_Y \chi_{\alpha,\lambda}(x;y)w(\xi_{\alpha,\lambda}(y))\,d\mu(y)$$

と定義する. また, 1_Xは X上で恒等的に値 1 を取る定数関数を表す. このとき, 次の Korovkin 型の定理を得る (Korovkin 型近似理論とその応用については, [1] を参照 (cf. [4])):

定理 4 $W=\{1_X,w_1,w_2,\ldots,w_r\}$ とおく. (8) が満たされ, 且つ $\mathfrak{A}$ は正とする. このとき,

$$\forall\ w\in W,\ \lim_{\alpha}\nu_{\alpha,\lambda}(w)(x)=w(x) \text{ uniformly in } \lambda\in\Lambda, x\in X_0$$

ならば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP である, 従って $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である.

次に, s を正の偶数とし, $h_1,h_2,\ldots,h_r$は X上の実数値連続関数で $H_s=\{h_i^j:1\leq i\leq r,1\leq j\leq s\}$ とおく. 各 $h\in H_s$ に対して $\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot)h(\xi_{\alpha,\lambda}(\cdot))\in L^1(Y,\mu)$ とする. 更に, $W_s=\{1_X,h_1^s+h_2^s+\cdots+h_r^s\}\cup H_{s-1}$ とおき, 関数

$$\Phi(x,t)=\sum_{i=1}^{r}(h_i(x)-h_i(t))^s \quad ((x,t)\in X^2)$$

は (8) を満たすとする.

定理 5 $\mathfrak{A}$ は正で, すべての $h\in W_s$に対して

$$\lim_{\alpha}\nu_{\alpha,\lambda}(h)(x)=h(x) \quad \text{uniformly in } \lambda\in\Lambda, x\in X_0 \tag{11}$$

ならば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP である, 従って $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である.

定理 6 $\mathfrak{A}$ は正で, $\{h_1,h_2,\ldots,h_r\}\subseteq BC(X,\mathbb{R})$ のとき, 次の各命題は互いに同値である:

(i) $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の AP である.

(ii) すべての $\mathfrak{T}$ に対して, $\mathfrak{L}$ は E_0上の $\mathfrak{T}$-AP である.

(iii) $\{\nu_{\alpha,\lambda}:\alpha\in D,\lambda\in\Lambda\}$ は $BC(X,\mathbb{R})$ 上の AP である.

(iv)　すべての $h \in \{1_X\} \cup H_s$ に対して, (11) が成立する.

(v)　すべての $h \in W_s$ に対して, (11) が成立する.

特に, $p = 2, s = 2$ の場合は, 系 2, 定理 5 及び定理 6 は正の正規核からつくられる各種の積分作用素の近似法へ応用される. また, Y が有限集合の場合は, 積分作用素 $K_{\alpha,\lambda}$, $L_{\alpha,\lambda}$ はそれぞれ

$$K_{\alpha,\lambda}(F)(x) = \sum_{y \in Y} \chi_{\alpha,\lambda}(x;y) F(\xi_{\alpha,\lambda}(y)) \qquad (F \in BC(X,E),\ x \in X),$$

$$L_{\alpha,\lambda}(x)(f) = \sum_{y \in Y} \chi_{\alpha,\lambda}(x;y) T(\xi_{\alpha,\lambda}(y))(f) \qquad (f \in E_0,\ x \in X)$$

となる. これらは補間型作用素と呼ばれる.

3. $\mathcal{A}$-総和法

$\mathcal{A} = \{a_{\alpha,m}^{(\lambda)} : \alpha \in D, m \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{R}$, $\{\chi_m(x;\cdot) : m \in \mathbb{N}_0,\ x \in X\} \subseteq L^1(X,\mu)$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_Y |a_{\alpha,m}^{(\lambda)} \chi_m(x;y)| \, d\mu(y) < \infty,$$

$$\chi_{\alpha,\lambda}(x;\cdot) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)} \chi_m(x;\cdot) \in L^1(Y,\mu)$$

とする. このとき,

$$K_{\alpha,\lambda}(F)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)} \int_Y \chi_m(x;y) F(\xi_{\alpha,\lambda}(y)) \, d\mu(y) \qquad (F \in BC(X,E),\ x \in X),$$

$$L_{\alpha,\lambda}(f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)} \int_Y \chi_m(x;y) T(\xi_{\alpha,\lambda}(y))(f) \, d\mu(y) \qquad (f \in E_0,\ x \in X)$$

が成り立つ.

以下においては, $Y = X, \xi_{\alpha,\lambda}(y) := y$ $(\forall\, y \in Y, \alpha \in D, \lambda \in \Lambda)$ の場合を考える.

$$A_m(F)(x) = \int_X \chi_m(x;y) F(y) \, d\mu(y) \qquad (F \in BC(X,E),\ x \in X),$$

$$T_m(f)(x) = \int_X \chi_m(x;y) T(y)(f) \, d\mu(y) \qquad (f \in E_0,\ x \in X)$$

と定義する. このとき,

$$K_{\alpha,\lambda}(F)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)} A_m(F)(x) \qquad (F \in BC(X,E),\ x \in X),$$

$$L_{\alpha,\lambda}(f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)} T_m(f)(x) \qquad (f \in E_0,\ x \in X)$$

となる.

$\{A_m\}$ が $BC(X,E)$ 上の (同程度一様)$\mathcal{A}$-総和法 ($\mathcal{A}$-SP) であるとは, $\mathfrak{K} = \{K_{\alpha,\lambda} : \alpha \in D, \lambda \in \Lambda\}$ が $BC(X,E)$ 上の AP となることである. また, $\{T_m\}$ が E_0上の (同程度一様)$\mathfrak{T}$-$\mathfrak{A}$-総和法 ($\mathfrak{T}$-$\mathcal{A}$-AP) であるとは, $\mathfrak{L} = \{L_{\alpha,\lambda} : \alpha \in D, \lambda \in \Lambda, x \in X\}$ が E_0上の $\mathfrak{T}$-AP となることである.

以下においては, 無限実行列からなる族 $\mathcal{A} = \{(a_{n,m}^{(\lambda)})_{n,m\in\mathbb{N}_0} : \lambda \in \Lambda\}$ を考える.

$\mathcal{A}$ が正則であるとは, それが次の条件 (A-1), (A-2) 及び (A-3) を満たすことである ([7]):

(A-1) 各 $m \in \mathbb{N}_0$に対して, $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} = 0$ uniformly in $\lambda \in \Lambda$.

(A-2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} = 1$ uniformly in $\lambda \in \Lambda$.

(A-3) 各 $n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda$に対して, $a_n^{(\lambda)} := \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}^{(\lambda)}| < \infty$ で, 且つある $n_0 \in \mathbb{N}_0$ が存在して $\sup\{a_n^{(\lambda)} : n \geq n_0, n \in \mathbb{N}_0,\ \lambda \in \Lambda\} < \infty$.

行列 $(a_{n,m}^{(\lambda)})_{n,m\in\mathbb{N}_0}$が stochastic, 即ち,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} \geq 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} = 1 \quad (n, m \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda)$$

を満たせば, 条件 (A-2) 及び (A-3) は自動的に成り立つ.

Eの要素列 $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$が fに (同程度一様) $\mathcal{A}$-総和可能であるとは,

$$\lim_{n\to\infty} \| \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} f_m - f \| = 0 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda$$

が成り立つことである. 但し, 各 $n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda$に対して, 上の級数は収束するとする.

$\mathcal{A}$ の正則性 $\mathcal{A}$-総和法の間には次の関係が成り立つ ([7, Proposition 5]:

$\mathcal{A}$ は正則である. $\iff$ $\forall\, \{f_m\}, f_m \to f$ ならば, $\{f_m\}$ は fに $\mathcal{A}$-総和可能である.

次に, 応用上重要で且つ興味ある $\mathcal{A} = \{(a_{n,m}^{(\lambda)})_{n,m\in\mathbb{N}_0} : \lambda \in \Lambda\}$ の例を幾つか挙げる (cf. [7], [8]):

(1°) 行列 $A = (a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}_0}$に対して, $a_{n,m}^{(\lambda)} = a_{n,m}$ $(\forall\, \lambda \in \Lambda, n, m \in \mathbb{N}_0)$ とする. このとき, $\mathcal{A}$-総和法は行列 A による通常の総和法である.

(2°) $\Lambda = \mathbb{N}_0$のとき, Petersen [11] (cf. [1]) の総和法である. 特に,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} = \begin{cases} 1/n, & (\lambda \le m \le \lambda + n - 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

のとき, Lorentz [5] の almost convergence (a.c.) method (F-summability) である.

(3°) $Q = \{q^{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\}$, $q^{(\lambda)} = \{q_m^{(\lambda)}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$, $q_m^{(\lambda)} \ge 0$ $(\forall\, m \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda)$,

$$Q_n^{(\lambda)} := q_0^{(\lambda)} + q_1^{(\lambda)} + \cdots + q_n^{(\lambda)} > 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \begin{cases} q_{n-m}^{(\lambda)}/Q_n^{(\lambda)}, & (m \le n), \\ 0 & (m > n) \end{cases}$$

とする. このとき, $\mathcal{A}$-総和法は (N, Q)-総和法と呼ばれる.

特に, $q^{(\lambda)} = \{q_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}, q_m \ge 0, q_0 > 0$ のとき, (N,Q)-総和法はネールンド総和法である. 興味ある特別な場合として, 次のものがある: $\Lambda \subseteq [0, \infty)$, $\beta > 0$, $q_m^{(\lambda)} := C_m^{(\lambda+\beta-1)}$ $(\forall\, \lambda \in \Lambda,\ m \in \mathbb{N}_0)$ とする. 但し,

$$C_m^{(\tau)} = \binom{m+\tau}{m} = \frac{(\tau+1)(\tau+2)\cdots(\tau+m)}{m!} \qquad (\tau > -1).$$

特に, $\Lambda = \{0\}$ のとき, (N,Q)-総和法はβ次のチェザロ総和法である.

(4°) $\Lambda \subseteq (0, \infty)$, $\beta > -1$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \begin{cases} C_{n-m}^{(\lambda-1)} C_m^{(\beta)} / C_n^{(\beta+\lambda)}, & (m \le n), \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

(5°) (Euler-Knopp-Bernstein 型) $\Lambda \subseteq [0, 1]$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \begin{cases} \binom{n}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{n-m}, & m \le n, \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

(6°) (Meyer-König-Vermes-Zeller 型) $\Lambda \subseteq [0, 1)$, $a_{n,m}^{(\lambda)} := \binom{n+m}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{n+1}$.

(7°) (Borel-Szász 型) $\Lambda \subseteq [0, \infty), a_{n,m}^{(\lambda)} := \exp(-n\lambda)(n\lambda)^m/m!$.

(8°) (Baskakov 型) $\Lambda \subseteq [0, \infty)$, $a_{n,m}^{(\lambda)} := \binom{n+m-1}{m} \lambda^m (1+\lambda)^{-n-m}$.

上記の例 (2°)-(8°) で与えられたすべての行列は stochastic である. 従って, 任意の $x \in X, m \in \mathbb{N}_0$に対して,

$$\chi_m(x; y) \ge 0 \ \mu\text{-a.e.} y, \ \int_X \chi_m(x; y) d\mu(y) = 1$$

$$\chi_{n,\lambda}(x;\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} \chi_m(x;\cdot)$$

から成る関数族 $\mathfrak{A}$ は正の正規核である. 更に, 上記の例 4°) – (8°) において, 任意の有限な閉区間 Λ と行列 $(a_{n,m}^{(\lambda)})_{n,m\in\mathbb{N}_0}$ に対して, $\mathfrak{A}$ は正則である.

4. 合成積型作用素の $\mathcal{A}$-総和法

前節の結果は以下で与えられる合成積型作用素の列 $\{A_n\}, \{T_n\}$ の $\mathcal{A}$-総和法へ応用される.

$\mathbb{R}^r$ は通常の距離

$$d(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{r}(x_i - y_i)^2\Big)^{1/2} \qquad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_r), y = (y_1, y_2, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^r)$$

を持つ r 次元の Euclid 空間とする.

$c > 0$ とし, $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ は $[-c,c]$ 上の非負の偶関数列で,

$$\int_{-c}^{c} g_n(t)\,dt = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

を満たすとする.

$$X = Y := \prod_{i=1}^{r}[a_i, b_i], \quad 0 < b_i - a_i \le c, \ \ X_0 := \prod_{i=1}^{r}[a_i+\delta_i, b_i-\delta_i], \quad 0 < \delta_i < \frac{1}{2}(b_i - a_i),$$

$$\chi_n(x;y) = k_n(x,y) := \prod_{i=1}^{r} g_n \circ e_i(x-y) \qquad (x,\ y \in X).$$

とする. 但し, e_i は $\mathbb{R}^r$ 上の第 i 次の座標関数を表す. このとき,

$$A_n(F)(x) = \int_X k_n(x,y)F(y)\,dy \qquad (F \in C(X,E),\ x \in X),$$

$$T_n(f)(x) = \int_X k_n(x,y)T(y)(f)\,dy \qquad (f \in E_0,\ x \in X)$$

となる.

φ は $[-c,c]$ 上の非負の連続な偶関数で, $[0,c]$ 上で
単調減少し, $\varphi(0) = 1, \quad 0 \le \varphi(t) < 1 \qquad (0 < t \le c)$ を満たすとする.

$$g_n(t) = \rho_n \varphi^n(t) \qquad (|t| \le c,\ n \in \mathbb{N}), \quad \rho_n = \Big(\int_{-c}^{c} \varphi^n(t)\,dt\Big)^{-1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

と定義する. このとき,

$$A_n(F)(x) = \rho_n^r \int_X \prod_{i=1}^{r} \varphi^n \circ e_i(x-y) F(y)\, dy \qquad (F \in C(X,E),\ x \in X)$$

で, $r = 1, E = \mathbb{R}$ の場合はKorovkin 作用素となる. また,

$$T_n(f)(x) = \rho_n^r \int_X \prod_{i=1}^{r} \varphi^n \circ e_i(x-y) T(y)(f) dy \qquad (f \in E_0,\ x \in X)$$

である.

ある定数 $p, q > 0$ が存在して

$$\lim_{t \to +0} \frac{1-\varphi(t)}{t^p} = q \tag{12}$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\mu_n(x) = \mu_n(x;2) = \int_X k_n(x;y) d^2(x,y)\, dy \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in X)$$

とおけば

$$\sup_{x \in X} \mu_n(x) = O\Big(\frac{1}{n^{1/p}}\Big) \quad (n \to \infty)$$

が成立する (cf. [2]). (12) を満たす関数 φ の幾つかの例を挙げる:

(1°) (Weierstrass) $\varphi(t) = e^{-t^2}$, $(c > 0,\ p = 2,\ q = 1)$.

(2°) (Picard) $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $(c > 0,\ p = 1,\ q = 1)$.

(3°) (Bui-Federrov-Cervakov) $\varphi(t) = e^{-|t|^{1/s}}$, $(c > 0,\ s > 0,\ p = 1/s,\ q = 1)$.

(4°) (Landau) $\varphi(t) = 1 - t^2$, $(c = 1,\ p = 2,\ q = 1)$.

(5°) (Mamedov) $\varphi(t) = 1 - t^{2s}$, $(c = 1,\ s \in \mathbb{N},\ p = 2s,\ q = 1)$.

(6°) $\nu > 0$, $\varphi(t) = 1 - |t|^\nu$, $(c = 1,\ p = \nu,\ q = 1)$.

(7°) (de la Vallée-Poussin) $\varphi(t) = \cos^2(t/2)$, $(c = \pi,\ p = 2,\ q = 1/4)$.

(8°) $\nu > 0$, $\varphi(t) = (\cos(t/2))^\nu$, $(c = \pi,\ p = 2,\ q = \nu/8)$.

次に, 全空間 $\mathbb{R}^r$ 上の合成積型作用素を考える.

$\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数列で,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n dt = 1, \quad \limsup_{n \to \infty} \|h_n\|_1 < \infty$$

を満たすとし, $X = Y = \mathbb{R}^r$,

$$\chi_n(x;y) = w_n(x,y) := \prod_{i=1}^{r} h_n \circ e_i(x-y)$$

とする. このとき,

$$A_n(F)(x) = \int_{\mathbb{R}^r} w_n(x,y)F(y)\,dy \qquad (F \in BC(\mathbb{R}^r, E))$$

$$T_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^r} w_n(x,y)T(y)(f)\,dy \qquad (f \in E_0)$$

となる. 最後に, 典型的な合成積作用素の近似法の例を挙げる.

(9°) (Fejér 核)

$$h_n(t) := \frac{2}{\pi n}\Big(\frac{\sin nt/2}{t}\Big)^2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

このとき,

$$A_n(F)(x) = \Big(\frac{2}{\pi n}\Big)^r \int_{\mathbb{R}^r} \Big(\prod_{i=1}^r \Big(\frac{\sin n(x_i - y_i)/2}{x_i - y_i}\Big)^2\Big) F(y)dy \qquad (F \in BC(\mathbb{R}^r, E)),$$

$$T_n(f)(x) = \Big(\frac{2}{\pi n}\Big)^r \int_{\mathbb{R}^r} \Big(\prod_{i=1}^r \Big(\frac{\sin n(x_i - y_i)/2}{x_i - y_i}\Big)^2\Big) T(y)(f)dy \qquad (f \in E_0)$$

である.

(10°) (Cauchy-Poisson 核)

$$h_n(t) := \frac{n}{\pi}\,\frac{1}{n^2t^2 + 1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

このとき,

$$A_n(F)(x) = \Big(\frac{n}{\pi}\Big)^r \int_{\mathbb{R}^r} \Big(\prod_{i=1}^r \frac{1}{n^2(x_i - y_i)^2 + 1}\Big) F(y)dy \qquad (F \in BC(\mathbb{R}^r, E)),$$

$$T_n(f)(x) = \Big(\frac{n}{\pi}\Big)^r \int_{\mathbb{R}^r} \Big(\prod_{i=1}^r \frac{1}{n^2(x_i - y_i)^2 + 1}\Big) T(y)(f)dy \qquad (f \in E_0)$$

である.

(11°) (Gauss-Weierstrass 核)

$$h_n(t) := \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\exp\Big(-\frac{n}{4}t^2\Big) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

このとき,

$$A_n(F)(x) = \Big(\frac{n}{4\pi}\Big)^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} \Big(\prod_{i=1}^r \exp\big\{-\frac{n}{4}(x_i - y_i)^2\big\}\Big) F(y)dy \qquad (F \in BC(\mathbb{R}^r, E)),$$

$$T_n(f)(x) = \Big(\frac{n}{4\pi}\Big)^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} \Big(\prod_{i=1}^r \exp\big\{-\frac{n}{4}(x_i - y_i)^2\big\}\Big) T(y)(f)dy \qquad (f \in E_0)$$

参考文献

[1] F. Altomare and M. Campiti, *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1994.

[2] H. Bell, *Order summability and almost convergence*, Proc. Amer. Math. Soc., **38** (1973), 548-552.

[3] R. Bojanic and O. Shisha, *On the precision of uniform approximation of continuous functions by certain linear positive operators of convolution type*, J. Approx. Theory, **8** (1973), 101-113.

[4] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960.

[5] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math., **80** (1948), 167-190.

[6] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **33** (1981), 109-126.

[7] T. Nishishiraho, *Saturation of multiplier operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 23-42.

[8] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on approximation processes of positive linear operators*, Multivariate Approximation Theory II, Proc. Intnernat. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach, (ed. by W. Schempp and K. Zeller), ISNM Vol. **61**, pp. 297-311, Birkhauser-Verlag, Basel/Boston/Stuttgart, 1982.

[9] T. Nishishiraho, *Approximation processes of integral operators in Banach spaces*, to appear.

[10] T. Nishishiraho, *Equi-uniform approximation processes of integral operators in Banach spaces*, preprint.

[11] G. M. Petersen, *Almost convergence and uniformly distributed sequences*, Quart. J. Math., **7** (1956), 188-191.