

STRASSEN'S THEOREM FOR POSITIVE VECTOR MEASURES

JUN KAWABE (河邊 淳)

*Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, Japan*

まず確率測度に対する古典的な Strassen の定理の解説から始める。ここで紹介する Strassen の定理とは“与えられた分布を周辺分布としてもつ確率測度の存在”に関する定理である。この定理は 1965 年の V. Strassen の有名な論文 [17] に端を発しており、その後 Dudley [1; 1968], Hoffmann-Jørgensen [5; 1977], Edwards [3; 1978], Shortt [14; 1983], Kellerer [32; 1984], Tahata [18; 1984], Hansel and Trollic [19; 1986], Skala [16; 1993], Kawabe [7; 1994] などによって次々に拡張されてきたが、彼らを取り扱った測度はすべて確率測度であった（最近、Tahata [19] は実測度の場合に拡張した）。

現在 Strassen の定理として引用されているものには大きく分けて次の 2 つのタイプのものがある。  $S, T$  は完全正則空間で、  $\mathcal{P}(S), \mathcal{P}(T), \mathcal{P}(S \times T)$  はそれぞれ  $S, T, S \times T$  上の Radon 確率測度全体を表すとする。また  $C(S), C(T)$  でそれぞれ  $S, T$  上で定義された実数値有界連続関数全体を表す。

**Strassen の定理 (I)** ([17], [3], [16]).  $S, T$  は完全正則空間で、  $\Lambda \subset \mathcal{P}(S \times T)$  は空でない閉凸集合とする。このとき、与えられた分布  $\mu \in \mathcal{P}(S), \nu \in \mathcal{P}(T)$  を周辺分布にもつ確率測度  $\gamma \in \Lambda$  が存在するための必要十分条件は、任意の  $f \in C(S), g \in C(T)$  に対して

$$\int_S f d\mu + \int_T g d\nu \leq \sup \left\{ \int_{S \times T} (f \oplus g) d\gamma : \gamma \in \Lambda \right\}$$

が成り立つことである。ただし、  $(f \oplus g)(s, t) \equiv f(s) + g(t)$  for all  $(s, t) \in S \times T$  とする。

**Strassen の定理 (II)** ([1]).  $(S, d)$  は完備可分距離空間、  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$  で、  $a \geq 0, b \geq 0$  とする。このとき、次の 2 つの条件は同値である：

(1) 任意の閉集合  $F \subset S$  に対して、  $\mu(F) \leq \nu(F^a) + b$ 。ただし、  $F^a \equiv \{s \in S : d(s, F) \leq a\}$  である。

*2000 Mathematics Subject Classification:* Primary 28B05, 28A33; Secondary 46A40.

*Key words and phrases:* Strassen's theorem, positive vector measure, weak convergence of vector measures, barreled locally convex space, Riesz space.

Research supported by Grant-in-Aid for General Scientific Research No. 13640162, Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

(2)  $\mu, \nu$  を周辺分布にもつ確率測度  $\gamma \in \mathcal{P}(S \times S)$  が存在して

$$\gamma(\{(s, t) \in S \times S : d(s, t) > a\}) \leq b$$

が成り立つ.

Strassen の定理をベクトル測度に拡張する最初の試みは 1994 年に Shortt によってなされた (cf. März & Shortt [10], Hirschberg & Shortt [4]). 彼らの結果を解説するためにまず順序構造をもつベクトル空間について復習する.

ベクトル空間  $X$  は以下の 2 つの条件を満たす半順序  $\leq$  をもつとき順序ベクトル空間 (ordered vector space) と呼ばれる:

- (1)  $x \leq y$  ならば  $x + z \leq y + z$  for all  $x, y, z \in X$ .
- (2)  $x \leq y$  ならば  $\alpha x \leq \alpha y$  for all  $x, y \in X$  and  $\alpha \geq 0$ .

さらに, 次の条件

- (3) 任意の  $x, y \in X$  に対して, 上限  $x \vee y$  と下限  $x \wedge y$  が存在する.

を満たすとき  $(X, \leq)$  は **Riesz 空間** と呼ばれる. 要素  $x \in X$  は  $x \geq 0$  のとき正 (positive) であるといい,  $X^+$  で  $X$  の正の要素の全体から成る錐体 (positive cone) を表す. このとき各  $x \in X$  に対して

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- \equiv (-x) \vee 0, \quad |x| = x \vee (-x)$$

とおくと,  $x^+, x^-$  は正の要素で

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-$$

と表される. ここで,  $x^+, x^-, |x|$  はそれぞれ  $x$  の正部分 (positive part), 負部分 (negative part), 絶対値 (absolute value) と呼ばれる. 特に Banach 空間かつ Riesz 空間であり, そのノルムと順序関係の間に

- (4)  $|x| \leq |y|$  ならば  $\|x\| \leq \|y\|$

なる関係が成り立つものを **Banach 束** (Banach lattice) という.

さて順序ベクトル空間には順序関係が導入されているので, それを用いてベクトル測度の正值性の概念が導入できる.  $S$  は位相空間,  $(X, \leq)$  は順序ベクトル空間かつ局所凸ベクトル空間とする. ベクトル測度  $\mu \in \mathcal{M}(S, X)$  が正であるとは, 任意の  $A \in \mathcal{B}(S)$  に対して  $\mu(A) \geq 0$  となることとする.  $\mathcal{M}^+(S, X)$  で  $S$  上で定義され  $X$  に値をとる正值 Radon ベクトル測度の全体を表す. Shortt は März との共同研究 [10] の中で, 正值ベクトル測度の基本的な性質を調べたのちに, Hirschberg との共著の論

文 [4]において, 2番目のタイプの Strassen の定理を“ある種の”Banach 束に値をとる正值ベクトル測度の場合に拡張することに成功した.

**正值ベクトル測度の Strassen の定理 (II)** ([4]).  $(S, d)$  は完備可分距離空間で,  $(X, \leq)$  は KB-空間とする. また,  $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(S, X)$  で,  $u \in X^+$ ,  $\varepsilon > 0$  とする. このとき次の2つの条件は同値である:

(1) 任意の  $A \in \mathcal{B}(S)$  に対して,  $\mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + u$ . ただし,  $A^\varepsilon \equiv \{s \in S : d(s, A) \leq \varepsilon\}$  である.

(2)  $\mu, \nu$  を周辺測度にもつ  $\gamma \in \mathcal{M}^+(S \times S, X)$  が存在して

$$\gamma(\{(s, t) \in S \times S : d(s, t) > \varepsilon\}) \leq u$$

が成り立つ.

上の定理で **KB-空間** とは任意のノルム有界な単調増加列が収束するような Banach 束のことである. すべての回帰的な Banach 束や, 角谷の抽象 L-空間 (すなわち, 任意の  $x, y \in X^+$  に対して  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  が成り立つ Banach 束) は KB-空間である. また, KB-空間は **順序完備** (order complete), すなわち任意の上の有界な集合が上限をもつ Banach 束になっている. 実際, KB-空間は  $c_0$  と (Banach 空間として) 同型な部分空間を含まないような Banach 束として特徴付けることができる.

$$\left. \begin{array}{l} \text{回帰的 Banach 束} \\ \text{抽象 L-空間} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{KB-空間} \Rightarrow \text{順序完備}$$

実は裏話をすれば, Shortt は論文 [15]において上の定理が一般の順序完備な Banach 束の場合に成り立つことを主張していたが, その証明にはギャップがあり, そのギャップを克服するために KB-空間という概念を持ち出してきたというのが真相である.

さて, 兎にも角にも以上により Strassen の 2番目のタイプの結果は (かなり狭い範囲の空間設定ではあるが) 正值ベクトル測度の場合に拡張することができた. そこで **1番目のタイプの結果はどうであろうか?** この問いに対する解答をかなり一般的な空間設定のもとで得ることができたので以下で報告する. ポイントはもとの空間ではなく, 双対空間に値をとるベクトル測度を考える点にある.

$S$  は完全正則空間で,  $X$  は局所凸空間,  $X^*$  は  $X$  の位相的双対空間で  $\langle x, x^* \rangle$  で  $X$  と  $X^*$  の双対 (duality) を表すとする.  $X_\sigma^*$ ,  $X_\tau^*$ ,  $X_\beta^*$  はそれぞれ  $X^*$  に弱位相  $\sigma(X^*, X)$ , Mackey 位相  $\tau(X^*, X)$ , 強位相  $\beta(X^*, X)$  を導入した空間とする. このとき有名な Orlicz & Pettis の定理 [11] 及びベクトル測度の Radon 性の特徴付けに関する結果 [9] より

$$\mathcal{M}(S, X_\sigma^*) = \mathcal{M}(S, X_\tau^*)$$

が成り立ち、特に  $X$  が半回帰的, i.e.,  $(X_\beta^*)^* = X$  のときは上記の空間は  $\mathcal{M}(S, X_\beta^*)$  と一致する. 言い換えれば,  $X$  が半回帰的であれば  $X$  の双対空間  $X^*$  に値をとるベクトル測度の可算加法性及び Radon 性に関しては,  $X^*$  上の位相  $\sigma(X^*, X)$ ,  $\tau(X^*, X)$ ,  $\beta(X^*, X)$  を区別する必要がないことになる. このことが以下の定理でもとの空間ではなく双対空間に値をとるベクトル測度を考えた一つの理由である.

順序ベクトル空間  $(X, \geq)$  は任意の  $x \in X$  に対して正の要素  $x^+, x^-$  が存在して  $x = x^+ - x^-$  と表されるとき **type (R)** であるという. 明らかに Riesz 空間は type (R) である. また要素  $x^* \in X^*$  はすべての  $x \geq 0$  に対して  $\langle x, x^* \rangle \geq 0$  となるとき **正** であるという. この“正”の概念を用いて, ベクトル測度  $\mu: \mathcal{B}(S) \rightarrow X_\sigma^*$  が **正** であるとは任意の  $A \in \mathcal{B}(S)$  に対して  $\mu(A)$  が  $X^*$  の正の要素となることと定義する.  $\mathcal{M}^+(S, X_\sigma^*)$  で  $S$  上で定義され  $X_\sigma^*$  に値をとる正值 Radon ベクトル測度の全体を表す.

**ベクトル測度の Strassen の定理 (I)** ([8]).  $S, T$  は完全正則空間,  $X$  は局所凸樽型空間かつ type (R) の順序ベクトル空間とする.  $\Gamma$  は  $\mathcal{M}^+(S \times T, X_\sigma^*)$  の空でない有界凸集合で  $\sigma(X^*, X)$  に対するベクトル測度の弱位相に関して閉とする. このとき, 与えられたベクトル測度  $\mu \in \mathcal{M}^+(S, X_\sigma^*)$ ,  $\nu \in \mathcal{M}^+(T, X_\sigma^*)$  を周辺測度としてもつベクトル測度  $\gamma \in \Gamma$  が存在するための必要十分条件は, 任意有限個の  $\{f_k\}_{k=1}^n \subset C(S)$ ,  $\{g_k\}_{k=1}^n \subset C(T)$ ,  $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$  に対して

$$\sum_{k=1}^n \left\langle x_k, \int_S f_k d\mu + \int_T g_k d\nu \right\rangle \leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \left\langle x_k, \int_{S \times T} (f_k \oplus g_k) d\lambda \right\rangle : \lambda \in \Gamma \right\}$$

が成り立つことである.

上の定理で存在するベクトル測度  $\gamma$  は, 一般には  $X^*$  上の弱位相  $\sigma(X^*, X)$  (実際には, Mackey 位相  $\tau(X^*, X)$ ) に関して可算加法的であるに過ぎないが,  $X$  が回帰的な場合には, すでに述べたように強位相  $\beta(X^*, X)$  に関しても可算加法的となる.

最後に “Type (R) の樽型空間” や, “Type (R) であるが Riesz 空間ではない” ような例をあげてこのノートを終えることとする.

**例.** (1) 次の (a)-(g) は Riesz 空間であると同時に局所凸樽型空間である. それゆえ type (R) の空間となる.

(a)  $(\Omega, \mathcal{A}, m)$  は測度空間で,  $1 \leq p \leq \infty$  とする. このとき  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, m)$  は Banach 束である. また, 数列空間  $\ell^p$  も Banach 束である. さらに  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, m)^* = L_q(\Omega, \mathcal{A}, m)$  で  $\ell_p^* = \ell_q$  ( $1 \leq p < \infty, 1/p + 1/q = 1$ ) となる.

(b)  $S$  は Hausdorff 空間とする. このとき  $C(S)$  は Banach 束である. 双対空間については [2] を見よ.

(c)  $(\Omega, \mathcal{A})$  は可測空間とする. このとき  $(\Omega, \mathcal{A})$  上の実数値測度の全体からなる空間  $\mathcal{M}(\Omega)$  は全変動ノルムに関して Banach 束である.

(d)  $S$  は  $\sigma$ -コンパクトかつ局所コンパクトな Hausdorff 空間とする.  $\mathcal{C}(S)$  で  $S$  上の実数値連続関数の全体を表す.  $\mathcal{C}(S)$  にはセミノルム  $p_K(f) = \sup_{s \in K} |f(s)|$  ( $K$  は  $S$  のコンパクト集合を動く) の族によって生成された位相が導入されているとする. このとき  $\mathcal{C}(S)$  は Fréchet 空間かつ Riesz 空間となる.

(e)  $S$  は局所コンパクト Hausdorff 空間とする.  $\mathcal{C}_0(S)$  で  $S$  上で定義されコンパクトな台をもつ実数値連続関数の全体を表す.  $S$  の各コンパクト集合  $K$  に対して,  $C_K$  で台が  $K$  に含まれる  $S$  上の実数値連続関数全体からなる Banach 空間 with 一様ノルムを表す.  $\mathcal{C}_0(S)$  には Banach 空間  $C_K$  によって生成される帰納位相を導入する. このとき  $\mathcal{C}_0(S)$  は局所凸樽型空間かつ Riesz 空間となる.  $\mathcal{C}_0(S)^*$  の双対空間は  $S$  上の実数値 Radon 測度全体と一致する. (Schaefer [12] を見よ).

(f)  $\mathbb{R}^\infty$  は実数列全体からなる空間に単純収束位相を導入して得られる Fréchet-Montel 空間とする.  $\mathbb{R}_0^\infty$  は 0 でない成分が有限個しかない実数列にコンパクト集合上の一様収束位相を導入して得られる Montel 空間とする. これらの空間に通常の “coordinatewise order” を導入する. このときこの両空間はともに Riesz 空間であり,  $(\mathbb{R}^\infty)^* = \mathbb{R}_0^\infty$ ,  $(\mathbb{R}_0^\infty)^* = \mathbb{R}^\infty$  が成り立つ.

(g)  $\Lambda(P)$  で Köthe 集合  $P$  で定まる Köthe 点列空間を表す. このとき  $P$  が可算集合ならば  $\Lambda(P)$  は Fréchet 空間となり, この空間に通常の “coordinatewise order” を導入すれば Riesz 空間となる (Köthe 空間の定義及び性質については Jarchow [6; pages 27, 50, 69 and 497] を見よ). 特に, 急減少数列空間  $(s)$  は Fréchet-Montel 空間かつ Riesz 空間で, 双対空間  $(s)^*$  は緩増加数列空間となる.

(2) 以下では Riesz 空間ではないが type (R) であるような空間の例をあげる.  $H$  は実 Hilbert 空間で, その内積を  $(\cdot, \cdot)$  で表す.  $\mathcal{L}_s(H)$  で  $H$  上の有界自己共役作用素の全体から成る Banach 空間 with 作用素ノルム,  $\mathcal{C}_s(H)$  で  $H$  上の完全連続な自己共役作用素の全体から成る Banach 空間 with 作用素ノルムを表す. また  $\mathcal{T}_s(H)$  と  $\mathcal{S}_s(H)$  でそれぞれ  $H$  上の自己共役なトレースクラス作用素全体から成る Banach 空間 with トレースノルム, 自己共役なヒルベルト-シュミット作用素全体から成る Hilbert 空間 with ヒルベルト-シュミットノルムを表す. これらの空間に “ $A \leq B \Leftrightarrow (Ax, x) \leq (Bx, x)$  for all  $x \in H$ ” によって定義された順序関係を導入する. 各  $A \in \mathcal{L}_s(H)$  に対して  $|A| = (A^2)^{1/2}$ ,  $A^+ = (|A| + A)/2$ ,  $A^- = (|A| - A)/2$  とおく. このときこれらは  $H$  上の正の作用素であり,  $A$  が  $\mathcal{L}_s(H), \mathcal{C}_s(H), \mathcal{T}_s(H), \mathcal{S}_s(H)$  に属すれば,  $|A|, A^+$  and  $A^-$  も同じ空間に属し  $A = A^+ - A^-$  が成り立つ. それゆえ, 上記の順序ベクトル空間はすべて type (R) であり,  $\mathcal{C}_s(H)^* = \mathcal{T}_s(H)$ ,  $\mathcal{T}_s(H)^* = \mathcal{L}_s(H)$ ,  $\mathcal{S}_s(H)^* = \mathcal{S}_s(H)$  が成り立つ. 詳しくは, Schatten [13] を見よ.

## 参考文献

- [1] R. M. Dudley, *Distances of probability measures and random variables*, Ann. Math. Statist. **39** (1968), 1563–1572.
- [2] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part 1: General Theory, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [3] D. A. Edwards, *On the existence of probability measures with given marginals*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), 53–78.
- [4] A. Hirshberg and R. M. Shortt, *A version of Strassen's theorem for vector-valued measures*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 1669–1671.
- [5] J. Hoffmann-Jørgensen, *Probability in Banach spaces*, Lecture Notes in Math. **598**, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [6] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [7] J. Kawabe, *A criterion for weak compactness of measures on product spaces with applications*, Yokohama Math. J. **42** (1994), 159–169.
- [8] ———, *A type of Strassen's theorem for positive vector measures with values in dual spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3291–3300.
- [9] D. R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pacific J. Math. **3** (1970), 157–165.
- [10] M. März and R. M. Shortt, *Weak convergence of vector measures*, Publ. Math. Debrecen **45** (1994), 71–92.
- [11] C. W. McArthur, *On a theorem of Orlicz and Pettis*, Pacific J. Math. **22** (1967), 297–302.
- [12] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [13] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [14] R. M. Shortt, *Strassen's marginal problem in two or more dimensions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **64** (1983), 313–325.
- [15] ———, *Strassen's theorem for vector measures*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 811–820.
- [16] H. J. Skala, *The existence of probability measures with given marginals*, Ann. Probab. **21** (1993), 136–142.
- [17] V. Strassen, *The existence of probability measures with given marginals*, Ann. Math. Statist. **36** (1965), 423–439.
- [18] R. Tahata, *On measures with given marginals on infiniteproduct spaces*, Nihon Univ. **28** (1984), 15–28.
- [19] ———, *On Kellerer-Strassen type marginal measure problem*, Math. Japonica **45** (1997), 441–448.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Shinshu University, Wakasato, Nagano 380, Japan.

e-mail address: jkawabe@gipwc.shinshu-u.ac.jp