数理解析研究所講究録 1301 巻 2003 年 79-83

超算術的選択公理HACとその仲間たち

東北大学大学院理学研究科数学専攻
田中 一之 (TANAKA, Kazuyuki)

概 要

公理HACの3つの変種を導入し，それらの論理的な強さを調べる.

１９７０年代半ば，H. フリードマンは，次のような現象を発見した.

> 数学の定理の多くは2階算術の体系 RCA_0 で証明できるか，そうでなければ4つの体系 WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 のどれかと論理的に同値であることが RCA_0 において証明できる.

このような記述をよく見かけるが，じつは当初H. フリードマンはもう一つ公理系を考えていた．それがこの小論のテーマである公理HACによる体系 HAC_0 である.

１９８０年代以降，シンプソンらの努力により，数学の広範な領域に渡って各定理の証明にどれだけの公理が必要かという研究が展開されるが，公理HACが必要となる定理はほとんど発見されていない（文献[1]）．最近，筆者がこの公理に興味を持ったきっかけは，山崎武や坂本伸幸らによる高階逆数学の研究にあり，そこでの重要概念である一様性が，２階算術においては選択公理のバリエーションと見なせるからである．この小論では超算術的選択公理HACのバリエーションだけを扱うが，他の様々な選択公理図式に対しても同様な研究が可能であり，このような研究を通して，２階算術と高階算術の関係を明らかにしていこうというのがこれからの方針である.

公理HACを定義する前に，この分野の言葉をいくつか用意しなければならない．まず，集合に関する量化記号（$\forall X$, $\exists X$）を含まない論理式を算術的といい，算術的な論理式で定義される（自然数の）集合も算術的と呼ぶ．１階のペアノ算術 PA（自然数の和積演算に関する公理と算術的論理式に関する帰納法）に，算術的集合の存在公理を加えた公理系を ACA_0 と呼ぶ．ここでは，ACA_0 より弱い体系（RCA_0，WKL_0）は扱わない．算術的集合をもとに算術的定義を有限回繰り返しても算術的な集合しか作れないが，この定義を超限回繰り返すと超算術的集合と呼ばれる集合族が作ら

れる．超算術的集合の生成原理を ACA_0 に加えた体系が ATR_0 である．φ を算術的論理式としたとき，$\forall X\varphi$ を Π^1_1 論理式と呼び，Π^1_1（論理式で定義される）集合の存在公理を ACA_0 に加えたものが，Π^1_1-CA_0 である．Π^1_1 論理式の否定を Σ^1_1 論理式と呼ぶが，任意の Σ^1_1 集合 A の存在は Π^1_1-CA_0 で導ける．なぜなら，その補集合 A^c は Π^1_1 集合だから存在が保証されており，集合 A は 集合 A^c から算術的に定義できるからである．

Π^1_1 論理式 $\varphi(n)$ が Σ^1_1 論理式 $\psi(n)$ でも表せるとき，つまり $\forall n(\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n))$ が（議論している体系で）証明できるとき，$\varphi(n)$ を Δ^1_1 論理式と呼ぶ.（ここの議論はやや大雑把であるから，厳密には文献 [1] を参照せよ.）Δ^1_1（論理式で定義される）集合の族が超算術的集合の族と一致するというスースリン=クリーネの定理は ATR_0 で証明できる（文献 [1] 定理 VIII.3.19, p.333）．しかし，Δ^1_1 集合の存在公理を ACA_0 に加えただけの体系 Δ^1_1-CA_0 では，超算術的集合の生成はできず，これは ACA_0 と ATR_0 の中間に位置する体系となる．

以上の準備のもとで，体系 HAC_0 を導入する．

定義　次の公理図式を HAC と呼ぶ：　任意の Δ^1_1 論理式 $\varphi(n, X)$ について，

$$\forall n \exists X \varphi(n, X) \to \exists Z \forall n \varphi(n, Z_n).$$

但し，$Z_n = \{m : 2^m 3^n \in Z\}$ とする．そして，ACA_0 に HAC を加えた体系を HAC_0 と呼ぶ．

公理図式 HAC は，算術的論理式 $\varphi(n, X)$ についての図式に制限しても，逆に Σ^1_1 論理式 $\varphi(n, X)$ の図式に拡張しても，論理的に同等であることが容易にわかる．H. フリードマンがこの公理を重要視した理由は，実数についての次の主張 SL(Sequential limit lemma) がこの公理と同値になるからである：

$$\forall n \exists x \in \mathbb{R}(|x - a| < 1/(n+1) \wedge \varphi(x)) \to \exists \{x_n\} \forall n(|x_n - a| < 1/(n+1) \wedge \varphi(x_n)),$$

但し，φ は (超) 算術的とする．集合論の上で，実関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x = a$ で連続であることを定義するのに，

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

と

$$\forall \{x_n\}(\lim x_n = a \to \lim_n f(x_n) = f(a))$$

の2通りがあり，選択公理を仮定すれば両者は同値になることが知られている．同様なことを2階算術の上で考えようとすると，3階の対象である実関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を自由に扱うことができないから，f を (超) 算術的な関係と捉えて，上の2つの定義の同値性を主張する命題を作ると大体SLになる．

それでは，HACの変種を3つ導入し，それらの強さを調べよう．

定義 次の3つの公理図式において，$\varphi(n,X)$ は任意の Δ^1_1 論理式を表す．

$$\mathrm{WHAC}: \forall n\exists! X\varphi(n,X) \to \exists Z\forall n\varphi(n,Z_n),$$

$$\mathrm{SHAC}: \exists Z\forall n(\exists X\varphi(n,X) \to \varphi(n,Z_n)),$$

$$\mathrm{WSHAC}: \exists Z\forall n(\exists! X\varphi(n,X) \to \varphi(n,Z_n)).$$

ここで，$\exists!$ は唯一つ存在することを表す．そして，ACA_0 に?HAC を加えた体系を?HAC_0 とする（? = W, S, WS).

W は weak を，S は strong を表し，$\mathrm{SHAC}_0 \supseteq \mathrm{HAC}_0 \supseteq \mathrm{WHAC}_0$ は明らかである．WHAC_0 は，文献 [1, p.342] の weak Σ^1_1-AC_0 と同じ形の図式である．文献 [1] の図式は，Σ^1_1 という名を付けながら，算術的論理式のみについての図式であり，WHAC_0 との同値性については未確認である．SHAC は，一般的によく知られている strong DC の変種でもある（文献 [1] の VII.6）．WSHAC は，過去に類似のものがあったかどうか知らないが，文献 [1, p.191] の定理 V.5.2 の条件文2はこれに近い．

これらについて，次のことが証明できる．

定理 1. $\mathrm{WHAC}_0 \equiv \Delta^1_1$-$\mathrm{CA}_0$.

証明 まず，$\mathrm{WHAC}_0 \supseteq \Delta^1_1$-$\mathrm{CA}_0$ を示す．$\varphi(n)$ を任意の Δ^1_1 論理式として，

$$\psi(n,X) \equiv (\varphi(n) \wedge X=\mathbb{N}) \vee (\neg\varphi(n) \wedge X=\varnothing)$$

とおく．すると，$\psi(n,X)$ も Δ^1_1 論理式であり，$\forall n\exists! X\psi(n,X)$ は明らかだから，WHAC より $\forall n\psi(n,Z_n)$ となる Z がある．あとは，ACA_0 から集合 $\{n:0\in Z_n\}$ の存在がいえ，この集合が $\{n:\varphi(n)\}$ に他ならない．よって，Δ^1_1-CA_0 が示された．

次に，$\mathrm{WHAC}_0 \subseteq \Delta^1_1$-$\mathrm{CA}_0$ を示す．$\varphi(n,X)$ を任意の Δ^1_1 論理式として，$\forall n\exists! X\varphi(n,X)$ を仮定する．このとき，任意の m,n について，

$$\exists X(m\in X \wedge \varphi(n,X)) \leftrightarrow \forall X(\neg\varphi(n,X) \vee m\in X)$$

が成り立つ．ここで，$\leftrightarrow$ の両辺は Σ^1_1 論理式と Π^1_1 論理式だから，Δ^1_1-CA_0 より，

$$Z = \{2^m 3^n : \exists X(m \in X \wedge \varphi(n, X))\}$$

の存在がいえ，これが $\forall n\varphi(n, Z_n)$ を満たすことは明らかである． □

文献 [1, p.342] には，Δ^1_1-CA_0 から weak Σ^1_1-AC_0 を示せという Exercise VIII 4.14 がある．逆についての言及はない．

定理 2. $\mathrm{SHAC}_0 \equiv \Pi^1_1$-$\mathrm{CA}_0$.

証明 最初に，$\mathrm{SHAC}_0 \supseteq \Pi^1_1$-$\mathrm{CA}_0$ を示す．SHAC_0 を仮定し，任意の Σ^1_1 論理式 $\varphi(n)$ に対して集合存在公理を示せばよい．ここで，$\varphi(n)$ は，算術的論理式 $\psi(n, X)$ を用いて，$\exists X\psi(n, X)$ と表せる．いま，$\psi(n, X)$ に対する SHAC_0 で存在する集合を Z とすれば，

$$\forall n(\exists X\psi(n, X) \leftrightarrow \psi(n, Z_n))$$

である．ACA_0 から，集合 $\{n : \psi(n, Z_n)\}$ の存在がいえて，この集合が $\{n : \varphi(n)\}$ になる．よって，Π^1_1-CA_0 が示された．

次に，$\mathrm{SHAC}_0 \subseteq \Pi^1_1$-$\mathrm{CA}_0$ を示す．$\varphi(n, X)$ を任意の Δ^1_1 論理式とする．クリーネの基底定理より，P を完全 Π^1_1 として，

$$\exists X\varphi(n, X) \rightarrow \exists X \leq_T P\varphi(n, X)$$

が成り立つ（文献 [1] 補題 VII.1.7, p.247）．すると，P において再帰的な集合をすべて自然数でコードしておけば，$\varphi(n, X)$ となる X のコードを選ぶ選択関数の存在は，ACA_0 でいえる．あとは，コードを集合に復元する操作で，求める Z が構成できる． □

SHAC_0 より強い Strong Σ^1_1-DC_0 が Π^1_1-CA_0 から導けることからも，上の定理の後半は示せる（文献 [1] 定理 VII.6.9, p.300）．

定理 3. $\mathrm{WSHAC}_0 \equiv \mathrm{ATR}_0$.

証明 最初に，$\mathrm{WSHAC}_0 \supseteq \mathrm{ATR}_0$ を示す．WSHAC_0 から，容易に次の主張が導ける：

$$\forall n \exists \text{at most one} X\varphi(n, X) \rightarrow \exists Z\forall n(n \in Z \leftrightarrow \varphi(n, Z_n)).$$

この主張から ATR_0 を導くためには，算術的超限再帰法によって得られる集合がユニークに定まることを見ればよい（文献 [1] 定理 V.5.2, p.191）.

次に，$\mathrm{ATR}_0 \subseteq \mathrm{WSHAC}_0$ を示す．まず，$\exists! X \varphi(n, X)$ となる X が Δ^1_1 集合になることに注目する.

$$n \in X \Leftrightarrow \exists Y(\varphi(n, Y) \wedge n \in Y) \Leftrightarrow \forall Y(n \in Y \rightarrow \varphi(n, Y)).$$

Δ^1_1 集合が超算術的であることは，ATR_0 で証明できる（文献 [1] 定理 VIII.3.19, p.333）．他方，ATR_0 では，ある非標準的な超算術的階層 H の存在がいえ（文献 [1] 補題 V.4.12, p.188），すべての超算術的集合は H において再帰的である．従って，H において再帰的な集合をすべて自然数でコードしておけば，$\varphi(n, X)$ となる X のコードを選ぶ選択関数の存在は ACA_0 でいえる．あとは，コードを集合に復元する操作で，求める Z が構成できる. □

文献

[1] S. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Springer 1999.