数理解析研究所講究録 1303 巻 2003 年 1-5

Relative normality and product spaces

筑波大学数学系　保科隆雄 (Takao Hoshina)
筑波大学大学院数学研究科　祖慶良謙 (Ryoken Sokei)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

可算パラコンパクト性と正規性は互いに独立した概念であるが, K. Morita [9], M.E. Rudin and M. Starbird [11] は距離空間との積について, 次の定理を示した.

定理 1 (Morita [9]; Rudin and Starbird [11]). X を距離空間, Y を可算パラコンパクト正規空間とする. $X \times Y$ が正規となるための必要十分条件は, $X \times Y$ が可算パラコンパクトとなることである.

私たちはこの定理をもとにして, 新しく導入する位相空間 X_A に関して以下の結果を得た.

定理 2. X を距離空間, $A \subset X$ とする. Y を可算パラコンパクト正規空間とする. $X_A \times Y$ が正規となるための必要十分条件は, $X_A \times Y$ が可算パラコンパクトとなることである.

以下, この定理に到るまでの関連する事実について述べる.

E. Michael [7] は実数の空間 $\mathbb{R}$ において, 有理数 $\mathbb{Q}$ の各点の近傍は実数の空間 $\mathbb{R}$ の通常の近傍とし, 無理数 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ の各点は孤立点として, $\mathbb{R}$ 上に新しい位相を導入して, Michael 直線 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ を構成した. この構成法を類推して, 位相空間 X とその部分集合 A に対し, 次に定義する位相空間 X_A は, 具体例の構成のときなどにしばしば見られる.

定義 3. X を位相空間, $A \subset X$ とする. $x \in X$ の基本近傍 $N(x)$ を次で定義する.

- $x \in A$ のとき, $N(x)$ は位相空間 X における元の x の近傍,
- $x \in X - A$ のとき, $N(x) = \{x\}$.

この基本近傍系によって集合 X 上に位相を定義し, X_A と書く.

X_A においては, A は X_A 上の閉集合となる.

以下において, X, Y は位相空間, $A \subset X$ とする. X_A の正規性については, 次の概念が有用である.

定義 4 (Arhangel'skiĭ [2]). (1) A が *strongly normal in* X とは, A の任意の互いに素な閉集合 E, F に対して, $E \subset U, F \subset V$ となる X の開集合 U, V が存在することである.
(2) A が, X に *weakly C-embedded* であるとは, X 上の任意の連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して, 次を満たす関数 g が存在することである.

$g|_A = f$
g は A の各点に対して X 上で連続となる.

A.V. Arhangel'skiĭ [2] は X_A の正規性について次を示した.

定理 5 (Arhangel'skiĭ [2]). 次は同値である.

(1) X_A は正規,

(2) A は strongly normal in X,

(3) A は正規, かつ A は X に weakly C-embedded.

weak C-embedding については次の結果がある.

定理 6 (Hoshina-Yamazaki [5]). A が X に weakly C-embedded である必要十分条件は, A における任意の互いに素な 2 つの cozero-set G_0, G_1 対して, 互いに素な X の開集合 H_0, H_1 で, $G_i \subset H_i$ $(i = 0, 1)$ を満たすものが存在することである.

A が X に *z-embedded* であるとは, A の任意の zero-set Z に対して $Z = A \cap Z'$ を満たす X の zero-set Z' が存在することをいう. A が Lindelöf かつ X が Tychonoff 或いは X の cozero-set であるならば, A は X で z-embedded である.

定理 7. (1) **(Costantini-Marcone [4])** A が X で稠密ならば, A は X に weakly C-embedded である.
(2) **([5])** A が z-embedded in X ならば, A は X に weakly C-embedded である.

ゆえに, C^*-embedding $\Rightarrow$ z-embedding $\Rightarrow$ weak C-embedding が成り立つ.

積空間 $X \times Y$ における $A \times Y$ の weak C-embedding については, まず次の場合が知られている.

定理 8 (Kodama [6]). X は正規空間, A は X の閉集合, Y を距離空間とする. $A \times Y$ が可算パラコンパクト正規ならば, $A \times Y$ は $X \times Y$ に z-embedded, 従って, weakly C-embedded である.

$A \times Y$ の正規性を仮定しない場合については, 次の結果を得た:

定理 9. X は遺伝的正規空間, $A \subset X, Y$ を距離空間とすると, $A \times Y$ は $X \times Y$ に weakly C-embedded である.

これらの結果に関連して, weak C-embedding を与える次の例を述べる. (1) はよく知られているが, さらに (2) の例を加える.

例 10. (1) **Michael 直線.** $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ は遺伝的正規. $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ は, Lindelöf であり, あるいは定理 8 により, $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{P}$ において z-embedded であるが, C^*-embedded ではない (K. Morita[10]).

(2) **Vaughan の例 [12].** $D(\omega_1)$ を濃度が ω_1 の離散空間, $\widehat{D}(\omega_1) = (\omega_1 + 1)_{\{\omega_1\}}$ (i.e. 空間 $\omega_1 + 1$ において ω_1 以外をすべて孤立点) とする.

$X = \underset{\omega}{\Box} \widehat{D}(\omega_1)$: $\widehat{D}(\omega_1)$ の可算個のコピーの box product,

$Y = D(\omega_1)^\omega$: $D(\omega_1)$ の可算個のコピーの通常の product,

とおくと, X は遺伝的パラコンパクト, Y は距離空間であるが, $X \times Y$ は正規にならない:

$$A = X - Y, \ \ \Delta(Y) = \{\langle x, x \rangle \mid x \in Y\}$$

とおくと, $A\times Y$ と $\Delta(Y)$ は, 開集合で分離できない互いに素な閉集合である ([12]). ここではさらに次の事実がわかる. まず, (1) とは異なり $A\times Y$ は正規にならないが, 定理 9 により, $A\times Y$ は $X\times Y$ に weakly C-embedded である. また, $Y^2\cong Y$ であり, さらに $\Delta(Y)$ は $X\times Y$ の zero-set であることが示せる. 従って, Morita[10] と同様な議論により, $A\times Y$ は $X\times Y$ において C^*-embedded にならない.

X_A の積に関して, 次の結果がある.

定理 11 ([5]). Y をコンパクト Hausdorff 空間とする. $X_A\times Y$ が正規となるための必要十分条件は, $(X\times Y)_{(A\times Y)}$ が正規となることである.

$X_A\times Y$ と $(X\times Y)_{(A\times Y)}$ は集合としては同じであるが, 位相空間としては異なる. 位相の強弱関係は, $(X\times Y)_{(A\times Y)}\xrightarrow[\text{連続}]{id}X_A\times Y\xrightarrow[\text{連続}]{id}X\times Y$.

定理 11 において, 必要性は Y の仮定なしで常に成立するが, 十分性は Y のコンパクト性は除けない.

Michael 直線 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ と無理数全体の空間 $\mathbb{P}$ との積 $\mathbb{R}_{\mathbf{A}}\times\mathbb{P}$ は正規ではない. ところが $\mathbb{R}\times\mathbb{P}$ は距離空間だから $(\mathbb{R}\times\mathbb{P})_{(\mathbb{Q}\times\mathbb{P})}$ は正規.

私たちは次の結果を得た.

定理 12. Y を位相空間とする. $X_A\times Y$ が正規であるための必要十分条件は, $(X\times Y)_{(A\times Y)}$ が正規でありかつ次の条件 $(*)$

$(*)$ $E\cap(A\times Y)=\emptyset$ となる $X_A\times Y$ の任意の閉集合 E に対して,
$E\subset U,\ \overline{U}\cap(A\times Y)=\emptyset$ となる $X_A\times Y$ の開集合 U が存在する

が成り立つことである。

定理 11 と比較すると, Y のコンパクト性に代わりに $(*)$ の条件が加わった.
Y がコンパクトならば, 射影 $\pi: X_A\times Y\longrightarrow X_A$ は閉写像だから $(*)$ が従う.

また D.K. Burke and R. Pol [3] は次を示した.

定理 13 (Burke-Pol [3]). $A\subset X\subset\mathbb{R}$, Y は距離空間とする. $X_A\times Y$ が正規であるための必要十分条件は, $(*)$ が成り立つことである.

上の定理では, $X\times Y$ は距離空間であるから $(X\times Y)_{(A\times Y)}$ は正規. よって, 定理 12 から直ちに従う.

$A\times Y$ は $X_A\times Y$ の閉集合であるから, $X_A\times Y$ が正規ならば $A\times Y$ は正規となる. これの逆について, 次の結果を得た.

定理 14. X を距離空間, $A\subset X$, Y は可算パラコンパクト正規空間とする. $(X\times Y)_{(A\times Y)}$ が正規となるための必要十分条件は, $A\times Y$ が正規となることである.

定理 15. $X_A\times Y$ が γ-パラコンパクトならば, $(X\times Y)_{(A\times Y)}$ は γ-パラコンパクトである. また, $X_A\times Y$ が $(*)$ は満たせば, 逆が成り立つ.

この定理の逆について, "$X_A \times Y$ が $(*)$ を満たす" は除けない. $(\mathbb{R} \times \mathbb{P})_{(\mathbb{Q} \times \mathbb{P})}$ は遺伝的パラコンパクト. ところが, $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{P}$ は正規ではない. 定理1より, $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{P}$ は可算パラコンパクトではない.

定理 16. X を距離空間, $A \subset X$, Y を γ-パラコンパクト正規空間とする. $(X \times Y)_{(A \times Y)}$ が γ-パラコンパクト正規となるための必要十分条件は, $A \times Y$ が正規となることである.

定理 17. $A \times Y$ は可算パラコンパクト正規空間とする.
(1) $X_A \times Y$ が正規ならば, $X_A \times Y$ は可算パラコンパクト.
(2) X が距離空間とする. $X_A \times Y$ が可算パラコンパクトならば, $X_A \times Y$ は正規.

(2) において, "X が距離空間" は除けない.

例 18. 次を満たすコンパクト空間 X, Y, $A \subset X$ が存在する.
- $A \times Y$ は可算パラコンパクト正規,
- $X_A \times Y$ は可算パラコンパクトであるが, 正規ではない.

定理 2 の証明. 定理1より, $A \times Y$ は可算パラコンパクト正規. ゆえに, 定理17より従う.

参考文献

[1] O.T. Alas, *On a characterization of collectionwize normality*, Canad. Math. Bull., **14** (1971), 13–15.

[2] A.V. Arhangel'skiĭ, *Relative topological properties and relative topological spaces*, Topology Appl., **70** (1996), 87–99.

[3] D.K. Burke and R. Pol, *Products of Michael spaces and completely metrizable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (2000), 1535–1544.

[4] C. Costantini and A. Marcone, *Extensions of functions which preserve the continuity on the original domain*, Topology Appl., **103** (2000), 131–153.

[5] T. Hoshina and K. Yamazaki, *Weak C-embedding and P-embedding, and product spaces*, Topology Appl., **125** (2002), 233–247.

[6] Y. Kodama, *On subset theorems and the dimension of products*, American J. Math., **106** (1969), 486–498.

[7] E. Michael, *The Prodact of a normal space and a metric space need not be normal*, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 375–376.

[8] K. Morita, *Products of normal spaces with metric spaces*, II, Tokyo Kyoiku Daigaku, **8** (1962), 87–92.

[9] K. Morita, See: proof of the implication (3) $\to$ (4) in Theorem 1.3 in: Ishii, T., *On product spaces and product mappings*, J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), 166–181.

[10] K. Morita, *On the dimension of the product of topological spaces*, Tsukuba J. Math., **1** (1977), 1–6.

[11] M.E. Rudin and M. Starbird, *Product with a metric factor*, General Topology Appl., **5** (1975), 235–348.

[12] J.E. Vaughan, *Non-normal products of ω_μ-metrizable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **51** (1975), 203–208.

Institute of Mathematics,
University of Tsukuba,
Tsukuba, Ibaraki 305-8571,
Japan
takaohsn@math.tsukuba.ac.jp
sokei@math.tsukuba.ac.jp