数理解析研究所講究録 1303 巻 2003 年 64-67

積空間の次元と局所連結性

島根大学 総合理工学部
横井 勝弥 (Katsuya Yokoi)

考える空間はすべてコンパクト距離空間とする。次元論における最も興味のある話題のうちのひとつは、積空間の次元を評価することであると思われる。この小論において、正方積の次元の振る舞いと局所連結性の関係について、古典的話題を現代的な視点から考察したい。その前にお決まりの定義を与えておく。

We recall that the (covering) dimension $\dim X$ of a compactum X is the smallest natural number n such that there exists an $(n+1)$-fold covering by arbitrarily fine open sets. The cohomological dimension $\text{c-dim}_G X$ of a compactum X with coefficients in an abelian group G is the largest integer n such that there exists a closed subset A of X with $H^n(X, A; G) \neq 0$, where $H^n(\quad; G)$ means the Čech cohomology with coefficients in G. Clearly, $\dim X \leq n$ implies that $\text{c-dim}_G X \leq n$ for all G.

Throughout this paper, $\mathbb{Z}$ is the additive group of all integers. $\mathbb{Z}_{(P)}$ is the ring of integers localized at a subset P of $\mathcal{P} = \{\text{all prime numbers}\}$. We denote by $\mathbb{Z}/p$ the cyclic group of order p.

それでは、まず一般の空間の積空間の次元についての話題からはじめよう。よく知られているように、常に不等式 $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$ は成り立つが、等式が成立するとは限らない。

Example(Pontryagin [P]**).** There exist 2-dimensinal compacta X and Y such that $\dim X \times Y = 3$.

Example(Boltyanskii [Bol]**).** There exists a 2-dimensinal compactum X such that $\dim X \times X = 3$.

その他、 Borsuk や児玉先生による同種の例が構成されており、その時使われた構成方法は、コホモロジー次元論における resolution の構成や Alexandroff の問題に関しての反例の構成において、本質的に使われている。

一般に正方積の次元については次の定理がよく知られてる。ここでは念のため Bockstein の定理に頼らない、直接証明を与えておく。

Theorem ([Bo_1, Bo_2])**.** *Let X be an n-dimensional compactum. Then the square of X has dimension $2n$, or $2n-1$.*

Remark. There is an n-dimensional metrizable separable space X such that $\dim X^{\aleph_0} = n$.

道具 **1[Künneth formula for Čech cohomology].** *Let (X,A) and (Y,B) be pairs of compacta. Then the following is exact:*

$$0 \to \oplus_{i+j=k} H^i(X,A) \otimes H^j(Y,B) \to H^k((X,A)\times(Y,B)) \to \oplus_{i+j=k+1} H^i(X,A) * H^j(Y,B) \to 0,$$

where $(X,A)\times(Y,B) = (X\times Y, X\times B \cup A\times Y)$.

道具 **2.** *If G is a non-trivial abelian group with $G\otimes G = 0$, then $G * G \neq 0$.*

証明. $\dim X = n$ かつ $\dim X \times X \leq 2n-1$ とする。

$\dim X = n$ であることから、X の閉部分集合 A で $H^n(X,A) \neq 0$ となるものが存在する。ここで $\dim X\times X \leq 2n-1$ により、$H^{2n}((X,A)\times(X,A)) = 0$ となり道具 1($k=2n$) より、$H^n(X,A)\otimes H^n(X,A) = 0$。よって道具 2 より $H^n(X,A) * H^n(X,A) \neq 0$ であるから、再び道具 1($k=2n-1$) より、$H^{2n-1}((X,A)\times(X,A)) \neq 0$ を得る。従って $\dim X\times X \geq 2n-1$ である。これは、題意を示している。 □

Borsuk により「ANR のクラスにおいて次元論を展開する」ことへの動機付けが次の興味深い結果で与えられた。

Theorem (Borsuk [B_1]**).** *Let X be an n-dimensional ANR compactum. Then there exists a prime $p \in \mathcal{P}$ such that* $\text{c-dim}_{\mathbb{Z}/p} X = n$.

これによりコホモロジー次元の基本的性質から次を得る。

Corollary (Borsuk [B_3]**).** *Let X be an n-dimensional ANR compactum. Then the square of X has dimension $2n$.*

一般に複体どうしの積の次元は、それぞれの次元を足したものであるから、ANR は複体のホモトピー型をもつということからも、(上記の性質により) 次の問題は自然である。

Problem (Borsuk [B_3]**).** *Is it true that the equality* $\dim X\times Y = \dim X + \dim Y$ *holds for ANR's X and Y?*

これに関しての部分解として、児玉先生による結果がある。

Theorem (Kodama [Ko]**).** *Let X be a 2-dimensional ANR compactum. Then X is dimension full-valued.*

Here recall that a compactum X is *dimension full-valued*, if

$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$$

for every compactum Y.

ところが、4 次元以上では反例が知られている (3 次元についてはまだ未解決)。

Example (Dranishnikov [Dr]). *For each prime $p \in \mathcal{P}$, there exist a 4-dimensional ANR compactum M_p such that* $\dim M_p \times M_q \leq 7$ *for* $p \neq q$.

以上の定理のうち Borsuk によるものを ANR のクラスから n 次元 $n-1$ 局所連結な空間に拡張してみよう。

Recall that an inverse sequence $\mathcal{G} = (G_n, p_{n,n+1})$ of groups satisfies *the Mittag-Leffler condition* provided for each n there exists $k > n$ such that $\operatorname{Im} p_{n,k} = \operatorname{Im} p_{n,m}$ for all $m > k$. $\mathcal{G}$ is said to be *stable* if it is isomorphic to a group in the category of pro-groups.

Proposition. *Let X be a compactum having* c-$\dim_{\mathbb{Z}} X = n$ *and* $\check{H}^n(X;\mathbb{Z}) \neq 0$. *If* pro-$H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$ *is stable and* pro-$H_n(X;\mathbb{Z})$ *satisfies the Mittag-Leffler condition, then there exists a prime $p \in \mathcal{P}$ such that* c-$\dim_{\mathbb{Z}/p} X = n$.

我々の欲しい定理の証明において、コホモロジーの意味での局所連結性に関する Dydak-Koyama の定理 (Wilder の定理の組版) が必要である。

Definition. A compactum X is *cohomology locally n-connected with respect to $\mathbb{Z}$*, if for each $x \in X$ and neighborhood N of x, there exists a neighborhood M of x in N such that the inclusion-induced homomorphism

$$i^*_{\mathbb{Z}} \colon \widetilde{\check{H}}^k(N;\mathbb{Z}) \to \widetilde{\check{H}}^k(M;\mathbb{Z})$$

is trivial for $k \leq n$, where $\widetilde{\check{H}}^*()$ is the reduced Čech cohomology theory.

Theorem (Dydak-Koyama [D-K, Theorem 2.2]). *Let X be cohomology locally n-connected with respect to $\mathbb{Z}$. If A_1, A_2, B_1 and B_2 are closed subsets of X with* $(B_1, A_1) \subseteq (\operatorname{Int} B_2, \operatorname{Int} A_2)$, *then the image of the inclusion-induced homomorphism*

$$i^*_{\mathbb{Z}} \colon \widetilde{\check{H}}^k(B_2, A_2;\mathbb{Z}) \to \widetilde{\check{H}}^k(B_1, A_1;\mathbb{Z})$$

is finitely generated for $k \leq n$.

以上の現代的な視点からの命題と定理を組み合わせて証明することにより、次を得る。

Theorem. *Let X be a locally $(n-1)$-connected compactum having* c-$\dim_{\mathbb{Z}} X = n$. *Then there exists a prime $p \in \mathcal{P}$ such that* c-$\dim_{\mathbb{Z}/p} X = n$.

また、特に定理の有限次元版と体上のコホモロジー次元の基本的性質により次がわかる。

Corollary. *Let X be an n-dimensional locally $(n-1)$-connected compactum. Then* $\dim X \times X = 2n$.

n 次元 n 局所連結な空間は ANR であるから、局所連結性についての制限を Borsuk のものより少し緩和することができることを意味する。

Remark. Borsuk による次の例により、これらの局所連結性についての仮定をさらにおとすことは、一般にはできない：Borsuk [B_2] constructed a 2-dimensional locally connected compactum with $\dim X \times X = 3$.

References

[Bo$_1$] B. F. Bockstein, *Homological invariants of topological spaces, I*, (English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 11:3 (1050) 173–254), Trudy Moskov. Mat. Obshch. **5** (1956), 3–80. (Russian)

[Bo$_2$] B. F. Bockstein, *Homological invariants of topological spaces, II*, (English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 11:3 (1050) 255–385), Trudy Moskov. Mat. Obshch. **6** (1957), 3–133. (Russian)

[Bol] V. G. Boltyanskii, *An example of a two-dimensional compactum whose topological square is three-dimensional*, Dokl. Acad. Nauk SSSR **67** (1949), 597–599. (Russian)

[B$_1$] K. Borsuk, *Zur Dimensionstheorie der lokal zusammenziehbaren Räume*, Math. Ann. **109** (1934), 376–380.

[B$_2$] K. Borsuk, *Concerning the cartesian product of Cantor-manifolds*, Fund. Math. **37** (1951), 55–72.

[B$_3$] K. Borsuk, *Theory of retracts*, PWN, Warszawa, 1967.

[Dr] A. N. Dranishnikov, *Homological dimension theory*, Russian Math. Surveys **43** **(4)** (1988), 11–63.

[D$_1$] J. Dydak, *On algebraic properties of continua*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **27** (1979), 717–721.

[D$_2$] J. Dydak, *On algebraic properties of continua II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **27** (1979), 723–729.

[D-K] J. Dydak and A. Koyama, *Cohomological dimension of locally connected compacta*, Topology Appl. **113** (2001), 39–50.

[D-Y] J. Dydak and K. Yokoi, *Hereditarily aspherical compacta*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1933–1940.

[Ko] Y. Kodama, *On homotopically stable points and product spaces*, Fund. Math. **44** (1957), 171–185.

[Kz-S] G. Kozlowski and J. Segal, *Local behavior and the Vietoris and Whitehead theorems in shape theory*, Fund. Math. **99** (1978), 213–225.

[P] L.Pontryagin, *Sur une hypothese fondamentale de la theorie de la dimension*, C. R. Acad. Sci. Paris **190** (1930), 1105–1107.

Department of Mathematics, Shimane University, Matsue, 690-8504, Japan
E-mail address: yokoi@math.shimane-u.ac.jp