数理解析研究所講究録 1304 巻 2003 年 1-28

Variations of Hechler's theorem

嘉田 勝 (Masaru Kada)*†

北見工業大学 (Kitami Institute of Technology)

概要

Hechler の定理とは, 「任意の $\aleph_1$-directed な順序集合は, countable chain condition を満たす強制法によって, 順序構造 $(\omega^\omega, \leq^*)$ の中に cofinal に埋め込むことができる」という主張である. 本稿では, $(\omega^\omega, \leq^*)$ の代わりに, 実数直線上の第一類集合 (meager sets) およびルベーグ零集合 (null sets) のなすイデアルにおける集合の包含関係 $(\subseteq)$ を考え, これらのイデアルについても, Hechler の定理と同様の「順序構造の埋め込み定理」が成り立つことを証明する.

1 はじめに

ω から ω への関数 f, g に対して, $f \leq^* g$ とは, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $f(n) \leq g(n)$ であることを表す. 実数直線上の第一類集合 (meager sets) およびルベーグ零集合 (null sets) のなすイデアルを, それぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ で表す.

Hechler の定理 [8] とは, 次に示す主張である*1.

定理 1.1 (Hechler の定理). $(Q, \leq)$ を, 順序集合で, 特に, すべての可算部分集合が strict upper bound をもつ (すなわち, すべての可算集合 $A \subseteq Q$ に対して, $b \in Q$ で, すべての $a \in A$ について $a < b$ であるものが存在する) ものとする*2. このとき, countable

---

* 日本学術振興会 科学研究費補助金 若手研究 (B) 14740058.

† e-mail: kada@math.cs.kitami-it.ac.jp

*1 Hechler の原論文 [8] による証明はとても長く難解であるが, これは, この論文が forcing の理論の初期に書かれたものであって, 当時は現在のような簡明な forcing の手法 (特に, iterated forcing の概念) が確立していなかったためである. Burke は, この証明を今日流の表現を用いて簡潔な形に書き直したものを発表している [6].

*2 この条件は, 定理が成り立つための明らかな必要条件でもある. なぜなら, strict upper bound をもたない可算集合 $A \subseteq Q$ が存在すれば, すべての $a \in A$ について $f_a \leq^* g$ となる $g \in \omega^\omega$ が存在するが, この g について $g \leq^* f_x$ となる $x \in Q$ は存在しないからである.

chain condition (ccc) を満たす forcing notion $\mathbb{P}$ で, 以下の性質をもつものが存在する: $\mathbb{P}$ による拡大モデルにおいて, $(\omega^\omega, \leq^*)$ は Q と順序同型でかつ cofinal な部分集合 $\{f_a : a \in Q\}$ を含む. すなわち, $\{f_a : a \in Q\}$ について以下が成り立つ.

1. すべての $g \in \omega^\omega$ について, $g \leq^* f_a$ を満たす $a \in Q$ が存在する.
2. $a, b \in Q$ について, $a \leq b$ のとき, かつそのときに限り $f_a \leq^* f_b$ である.

この定理について, Soukup [10] は, 次のような問題を提示した.

問題 1.2. イデアル $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ において集合の包含関係 $(\subseteq)$ を考えた順序構造 $(\mathcal{M}, \subseteq)$, $(\mathcal{N}, \subseteq)$ について, Hechler の定理と同様の「順序構造の埋め込み定理」は成り立つか? すなわち, すべての可算部分集合が strict upper bound をもつ順序集合 Q について, ccc を満たす forcing notion で, その順序構造を $(\mathcal{M}, \subseteq)$ または $(\mathcal{N}, \subseteq)$ に cofinal に埋め込むものは存在するか?

この問題は, $\mathcal{M}$ については, Bartoszyński と嘉田の共同研究 [4] によって完全に解決された. また, $\mathcal{N}$ については, 埋め込む順序構造が well-founded である場合に限って証明されている.

本稿では, これらの結果の証明を与える. まず, Hechler の定理の証明における基本的なアイデアである "well-founded iteration" について, 第 2 節で解説する. そして, 第 4 節と第 7 節において, それぞれ meager ideal と null ideal に関する順序構造の埋め込み定理を証明する. 第 3, 5, 6 節は, 主定理を証明するための準備である.

集合論に関する基本的な定義や記法は [2] に従う[*3]. ω から ω への狭義単調増加関数の全体を $\omega^{\uparrow\omega}$ で表し, ω の元の狭義単調増加な有限列の全体を $\omega^{\uparrow<\omega}$ で表す. $f, g \in \omega^{\uparrow\omega}$ に対し, $f \sqsubseteq g$ とは, 有限個を除くすべての $n < \omega$ に対して, $g(n) \leq f(m) < f(m+1) \leq g(n+1)$ を満たす $m < \omega$ が存在するときにいう[*4]. $\mathcal{S} = \prod_{n<\omega}[\omega]^{\leq n}$ と定義し, $\mathcal{S}$ の各々の元を**スラローム**と呼ぶ. また, $\mathcal{T} = \bigcup_{n<\omega}\prod_{i<n}[\omega]^{\leq i}$ とおく.

第 3 節以降では, "実数" の空間としてカントール空間 2^ω, すなわち, 2 点からなる離散空間 $2 = \{0, 1\}$ の可算個の直積位相空間を考える. また, 各座標における $2 = \{0, 1\}$ の各点に $1/2$ の測度を与え, その直積測度を考えることによって, 2^ω に自然な測度が導入される. これにより, 2^ω 上の第一類集合全体のなすイデアル $\mathcal{M}$ および零集合全体のなすイデアル $\mathcal{N}$ が定義される. 特に, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ のどちらも, ボレル集合から生成されるイデアル

[*3] ただし, forcing に関しては, $p \leq q$ で「p は q より強い condition である」ことを表す.

[*4] 一般には, $f \sqsubseteq g$ は $f \leq^* g$ の必要条件でも十分条件でもない. ただし, $f \sqsubset g$ を「$f \sqsubseteq g$ かつ $g \not\sqsubseteq f$」で定義すると, 「$f \sqsubset g$ ならば $f \leq^* g$」が成り立つ.

であり, かつ, あるボレルコードに対応するボレル集合が $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ に属するか否かは, (そのコードが属するすべてのモデルに関して) 絶対的である. そのため, $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ に属するボレル集合は, しばしば (集合そのものではなく) そのボレルコードとして扱われる.

以下の節では, 順序集合に関する下記の事実を用いる. 証明は [11] を参照されたい.

命題 1.3. 順序集合 $(P, \leq)$ とその元 $c \in P$ を固定したとき, P 上の順序関係 $\leq$ の拡張となる全順序関係 $\leq'$ で, 特に, $\leq$ に関して c と比較不可能なすべての元 $y \in P$ について $c \leq' y$ となるものが存在する.

2 Hechler の方法 — Well-founded iteration

Hechler の定理の証明に用いられている基本的な手法は, "well-founded iteration", すなわち, well-founded であるが必ずしも線形でない順序構造に沿った iteration である.

"well-founded iteration" という用語は Jech [9, Chapter 23] によるものであるが, Dordal [7, Section 1] は, "I-iteration" または "I-indexed finite-support iteration" (I は well-founded な順序集合) と称して, well-founded iteration の一般論を展開している.

$\mathbf{V}$ を ZFC のモデルとする. ω^ω の元 g が, $\mathbf{V}$ に属するすべての ω^ω の元 f に対して $f \leq^* g$ を満たすとき, g は $\mathbf{V}$ 上 **$\leq^*$-dominating** (または, 単に "$\mathbf{V}$ 上 dominating") であるという.

Hechler の定理の証明では, 以下に示す, 基底モデル上 $\leq^*$-dominating な関数を有限近似で付加する forcing notion (いわゆる "Hechler forcing"*5) が用いられている.

定義 2.1. $\mathbb{D}$ を, 以下によって定義される forcing notion とする. $\mathbb{D}$ の condition は $p = (s^p, f^p)$ の形で, $s^p \in \omega^{<\omega}$ かつ $f^p \in \omega^\omega$ を満たすものである (すなわち, 集合としては $\mathbb{D} = \omega^{<\omega} \times \omega^\omega$ である*6). 以下, $\mathbb{D}$ の condition p について, 特に断ることなく p の第 1 成分と第 2 成分をそれぞれ s^p, f^p で表す.

$\mathbb{D}$ の condition p, q に対して, $p \leq q$ とは, 以下が成り立つときにいう.

1. $s^p \supseteq s^q$,
2. すべての $n < \omega$ について $f^p(n) \geq f^q(n)$, かつ,

---

*5 "Hechler forcing" という用語の使い方には注意を要する. 単に Hechler forcing というと, ここで定義している $\mathbb{D}$ を指すことが多いが, 文脈によっては, Hechler の定理の証明で構成された well-founded iteration を指すこともあり得るからである.

*6 $\mathbb{D}$ の定義としては, さらに $s^p \subseteq f^p$ という条件を加えることが多い. しかし, この条件を外しても, forcing notion としては同値になる.

3. $|s^q| \le n < |s^p|$ を満たすすべての n について, $s^p(n) \ge f^q(n)$ である.

以下の命題の証明は容易である.

命題 2.2. $\mathbb{D}$ は σ-centered である. ゆえに, 特に $\mathbb{D}$ は ccc を満たす.

命題 2.3. $\mathbf{V}$ を基底モデルとし, G を $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{D}$-generic なフィルタとする. $\mathbf{V}[G]$ において, $d_G = \bigcup\{s^p : p \in G\}$ と定義する. このとき, $d_G \in \omega^\omega$ となり, かつ, d_G は $\mathbf{V}$ 上 $\le^*$-dominating である.

したがって, 与えられた順序構造 $(Q, \le)$ が well-founded であれば, その順序構造に沿って, $\mathbb{D}$ によって $\le^*$-dominating な関数を次々に付け加えればよい. 具体的には, ある $a \in Q$ に着目し, その位置で「a より小さい部分の forcing」による拡大モデルにおける $\mathbb{D}$ を考えると, その forcing によって, 「a より小さい部分の forcing」による拡大モデルに属する関数をすべて dominate する関数が付加される. これを, Q における rank に関する帰納法で行えばよい.

こうすると, generic に付加される関数の間の $\le^*$ に関する順序関係は, Q における順序関係を保っている. また, Q の任意の可算部分集合が strict upper bound を持つことから, generic に付加される関数の全体が $(\omega^\omega, \le^*)$ において cofinal であることもわかる.

残る問題は, Q において比較不可能な 2 元 a, b のそれぞれの位置で付加される関数 d_a, d_b が, $\le^*$ の意味で比較不可能であることを示すことである. 実は, これは本質的には次の命題の証明と同じである.

命題 2.4. $G = G_1 \times G_2$ は $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$-generic なフィルタとし, かつ, G_1, G_2 はともに $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{D}$-generic なフィルタであるとする. $\mathbf{V}[G_1 \times G_2]$ において, $d_1 = d_{G_1}$, $d_2 = d_{G_2}$ と定義する. このとき, $d_1 \not\le^* d_2$ かつ $d_2 \not\le^* d_1$ である.

証明. 対称性より, $d_1 \not\le^* d_2$ のみ示せば十分である.

$\dot{d}_1$, $\dot{d}_2$ を, それぞれ d_1, d_2 を表す $\mathbb{D}$-name とする. 任意の $(p_1, p_2) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ と $N < \omega$ に対し, $(q_1, q_2) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ と $n < \omega$ で, $(q_1, q_2) \le (p_1, p_2)$, $n > N$ かつ $(q_1, q_2) \Vdash \dot{d}_2(n) < \dot{d}_1(n)$ を満たすものが存在することを示す. これにより, 無限個の $n < \omega$ について $d_2(n) < d_1(n)$, すなわち $d_1 \not\le^* d_2$ であることが示される.

$n = \max\{N, |s^{p_1}|, |s^{p_2}|\} + 1$ とする. $q_2 \le p_2$ を, $|s^{q_2}| \ge n + 1$ となるようにとる. 次に, $q_1 \le p_1$ を, $|s^{q_1}| \ge n + 1$ かつ $s^{q_2}(n) < s^{q_1}(n)$ を満たすように選ぶ. このとき, (q_1, q_2) が求める condition である. $\square$

上述のアイデアを実現するには, 次のようにすればよい. $(Q, \leq)$ を well-founded な順序集合とし, これに Q 自身を最大元として付け加えた順序集合 $Q^* = Q \cup \{Q\}$ を考える. Q^* には自然に rank function が定義できる. 各 $a \in Q^*$ に対して, $Q_a = \{x \in Q : x < a\}$ と定義する.

Q^* 上の rank に関する帰納法によって, 各 $a \in Q^*$ に対して forcing notion $\mathbb{H}_a$ を次のように定義する.

$\mathbb{H}_a$ の condition p は $p = \{(s^p_x, \dot{f}^p_x) : x \in D^p\}$ の形で, 次の条件を満たすものとする.

1. D^p は Q_a の有限部分集合であり,
2. 各 $x \in D^p$ について, $s^p_x \in \omega^{<\omega}$, かつ, $\dot{f}^p_x$ は ω^ω の元を表す $\mathbb{H}_x$-name である[*7].

以下, 特に断ることなく, $\mathbb{H}_a$ の condition p の各成分を s^p_x, $\dot{f}^p_x$, D^p と表記する.

$p \in \mathbb{H}_a$ と $b < a$ に対して, $p \restriction b = \{(s^p_x, \dot{f}^p_x) : x \in D^p \cap Q_b\}$ と定義する. このとき, $p \restriction b$ は $\mathbb{H}_b$ の condition となる.

$\mathbb{H}_a$ の condition p, q について, $p \leq q$ とは, 以下の条件が満たされるときにいう.

1. $D^p \supseteq D^q$,
2. 各 $x \in D^q$ について,
   (a) $s^p_x \supseteq s^q_x$,
   (b) すべての $n < \omega$ について $p \restriction x \Vdash_{\mathbb{H}_x}$ "$\dot{f}^p_x(n) \geq \dot{f}^q_x(n)$", かつ
   (c) $|s^q_x| \leq n < |s^p_x|$ を満たすすべての n について $p \restriction x \Vdash_{\mathbb{H}_x}$ "$s^p_x(n) \geq \dot{f}^q_x(n)$" である.

こうして最終的に得られる $\mathbb{H}_Q$ が, 求める forcing notion である.

この定義を見ると, $(s^p_x, \dot{f}^p_x)$ はちょうど "$\mathbf{V}^{\mathbb{H}_x}$ における $\mathbb{D}$ の condition" に相当することが見てとれる. すなわち, $p \in \mathbb{H}_Q$ および $x \in D^p$ について, $\Vdash_{\mathbb{H}_x}$ "$(s^p_x, \dot{f}^p_x) \in \dot{\mathbb{D}}$" (ただし, $\dot{\mathbb{D}}$ は $\mathbf{V}^{\mathbb{H}_x}$ における forcing notion $\mathbb{D}$ を表す $\mathbb{H}_x$-name) が成り立っている. また, 順序関係についても, $p \leq q$ ならば, すべての $x \in D^q$ について, $p \restriction x \leq_{\mathbb{H}_x} q \restriction x$ かつ $p \restriction x \Vdash_{\mathbb{H}_x}$ "$(s^p_x, \dot{f}^p_x) \leq_{\dot{\mathbb{D}}} (s^q_x, \dot{f}^q_x)$" となっている. したがって, この定義はまさに "Q の順序構造に沿った finite support iteration" と考えることができる. 特に, Q が整列順序集合で, Q の順序型が α の場合は, $\mathbb{H}_Q$ は長さ α の finite support iteration にほかならな

[*7] 正確には, s^p_x も $\mathbb{H}_x$-name として定義すべきかもしれない. しかし, そのように定義したとしても, s^p_x は有限集合を表す name であり, かつ, iteration を finite support で行っているので, すべての s^p_x の値が基底モデルの特定の元に決定されているような condition の全体は dense になる. したがって, s^p_x は基底モデルの元であるとしても, forcing notion としては同等である.

い. この意味で, このような forcing notion の帰納的な構成法を "well-founded iteration" と呼ぶことにする.

$\mathbb{H}_Q$ に関する以下の事実は容易に証明できる. これらの事実から, $\mathbb{H}_Q$ が Q の順序構造を $(\omega^\omega, \leq^*)$ に cofinal に埋め込むことがわかる.

1. $a, b \in Q^*$ について, $a \leq b$ ならば, $\mathbb{H}_a \subseteq \mathbb{H}_b$ であり, かつ, $\mathbb{H}_a$ から $\mathbb{H}_b$ への自然な埋め込みは complete embedding である.
2. $\mathbb{H}_Q$ は ccc を満たす.
3. $\mathbf{V}$ を基底モデル, G を $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{H}_Q$-generic なフィルタとする. $\mathbf{V}[G]$ において, 各 $a \in Q$ に対して, $d_a = \bigcup\{s^p_a : p \in G$ かつ $a \in D^p\}$ と定義する. このとき, $\mathbf{V}[G]$ において以下が成り立つ.
   (a) すべての $a \in Q$ について, $d_a \in \omega^\omega$ である.
   (b) $a \leq b$ ならば $d_a \leq^* d_b$ である.
   (c) 逆に, $a \not\leq b$ ならば $d_a \not\leq^* d_b$ である.
   (d) すべての ω^ω の元 f に対して, $f \leq^* d_a$ となる $a \in Q$ が存在する.

それでは, Q が well-founded でない場合はどうすればよいだろうか.

Hechler の証明のアイデアは次のとおりである. Q の well-founded かつ cofinal な部分集合 R を固定し, $R^* = R \cup \{Q\}$ とおく. R^* の上には自然に rank function が定まるが, $x \in Q \setminus R$ に対して $\mathrm{rank}(x) = \min\{\mathrm{rank}(y) : y \in R^*$ かつ $x < y\}$ と定めることによって, R^* 上の rank function を Q^* 全体に拡張することができる. この拡張された rank に関する帰納法で, forcing notion を定義すればよい.

この際に問題となるのは, Q 全体に拡張された rank に関しては, "rank が同じ元の間に順序関係がある", すなわち, "$x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$" という状況が起こりうることである. Q が最初から well-defined の場合には, このようなことは起こらない.

Q 上の rank に関する帰納法で dominating な関数を付け加えていくので, $x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$ の場合には, x と y の位置で付加される 2 つの関数 d_x, d_y が $d_x \leq^* d_y$ を満たすのは明らかである. また, 付加された関数の全体が cofinal になることは, R が Q の中で cofinal であることから, R に対応する関数の族によって保証される. しかし, $x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ の場合について, $d_x \leq^* d_y$ を保証するためには, forcing notion の定義に変更を加えなければならない.

そこで, well-founded とは限らない順序集合 $(Q, \leq)$ について, $\mathbb{H}_Q$ を次のように定義する. R, R^*, $\mathrm{rank}(x)$ は上述のとおり定義されているとする. $a, b \in Q^*$ について, $a < b$ かつ $\mathrm{rank}(a) < \mathrm{rank}(b)$ であるとき, $a \ll b$ と表す. $a \in Q^*$ について,

$Q_a = \{x \in Q : x \ll a\}$ と定義する.

定義 2.5. Q^* 上の rank に関する帰納法によって, 各 $a \in Q^*$ に対して forcing notion $\mathbb{H}_a$ を次のように定義する.

$\mathbb{H}_a$ の condition p は $p = \{(s^p_x, \dot{f}^p_x) : x \in D^p\}$ の形で, 次の条件を満たすものとする.

1. D^p は Q_a の有限部分集合,
2. 各 $x \in D^p$ について, $s^p_x \in \omega^{<\omega}$, $\dot{f}^p_x$ は ω^ω の元を表す $\mathbb{H}_x$-name であり, かつ,
3. $x, y \in D^p$ について, $x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ ならば, $|s^p_x| \geq |s^p_y|$ である.

以下, 特に断ることなく, $\mathbb{H}_a$ の condition p の各成分を s^p_x, $\dot{f}^p_x$, D^p と表記する.

$p \in \mathbb{H}_a$ と $b < a$ に対して, $p \restriction b = \{(s^p_x, \dot{f}^p_x) : x \in D^p \cap Q_b\}$ と定義する. このとき, $p \restriction b$ は $\mathbb{H}_b$ の condition となる.

$\mathbb{H}_a$ の condition p, q について, $p \leq q$ とは, 以下の条件が満たされるときにいう.

1. $D^p \supseteq D^q$,
2. 各 $x \in D^q$ について,
   (a) $s^p_x \supseteq s^q_x$,
   (b) すべての $n < \omega$ について $p \restriction x \Vdash_{\mathbb{H}_x}$ "$\dot{f}^p_x(n) \geq \dot{f}^q_x(n)$",
   (c) $|s^q_x| \leq n < |s^p_x|$ を満たすすべての n について $p \restriction x \Vdash_{\mathbb{H}_x}$ "$s^p_x(n) \geq \dot{f}^q_x(n)$" であり, かつ,
3. $x, y \in D^p$ について, $x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ ならば, $|s^q_y| \leq n < |s^p_y|$ を満たすすべての n について $s^p_y(n) \geq s^p_x(n)$ である.

$p \in \mathbb{H}_a$ の条件 (3) および $p \leq q$ の条件 (3) が, "$x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ ならば $d_x \leq^* d_y$" を保証するために付け加えられた条件である. 特に, $p \in \mathbb{H}_a$ の条件 (3) によって, $x, y \in D^p$, $x < y$, $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ かつ $s^p_y(n)$ が定義されていれば, 必ず $s^p_x(n)$ は定義されているので, $p \leq q$ の条件 (3) は常に意味を持つ.

こうして最終的に得られる $\mathbb{H}_Q$ が, 求める forcing notion であることは, 以下の補題からわかる. これらの補題の証明は [6] を参照されたい.

補題 2.6. $a, b \in Q^*$ について, $a \ll b$ ならば, $\mathbb{H}_a \subseteq \mathbb{H}_b$ であり, かつ, $\mathbb{H}_a$ から $\mathbb{H}_b$ への自然な埋め込みは complete embedding である.

補題 2.7. $\mathbb{H}_Q$ は ccc を満たす.

定義 2.8. $\mathbf{V}$ を基底モデル, G を $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{H}_Q$-generic なフィルタとする. $\mathbf{V}[G]$ において, 各 $a \in Q$ に対し, $d_a = \bigcup\{s^p_a : p \in G$ かつ $a \in D^p\}$ とおく.

補題 2.9. すべての $a \in Q$ について, $d_a \in \omega^\omega$ である.

補題 2.10. $a, b \in Q$ について, $a \leq b$ ならば $d_a \leq^* d_b$ である.

補題 2.11. $\mathbf{V}[G]$ において, すべての $f \in \omega^\omega$ に対し, $f \leq^* d_a$ を満たす $a \in Q$ が存在する.

補題 2.12. $a, b \in Q$ について, $a \not\leq b$ ならば $d_a \not\leq^* d_b$ である.

補題 2.9 および 2.12 の証明にあたっては, 命題 1.3 が必要となる. なぜなら, t^p_x を拡張しようとする時には, $y \in D^p$, $y < x$ かつ $\mathrm{rank}(y) = \mathrm{rank}(x)$ を満たすすべての y について, 前もって t^p_y を適切に拡張しておく必要があり, そのために, x と同じ rank をもつ D^p の元の間の順序関係 $<$ を全順序に拡張し, その全順序に関する帰納法によって t^p_x を拡張するからである. これと同様の議論は第 4 節で用いられる.

3 Forcing “Cohen then dominating”

Hechler の証明の基本的なアイデアは, 「基底モデル上 $\leq^*$-dominating な関数を付加する forcing $\mathbb{D}$ の, 順序構造 Q に沿った well-founded iteration」であった. $\mathcal{M}$ への順序構造の埋め込み定理を証明するには, “基底モデルでコードされるボレル第一類集合をすべて含む第一類集合を generic に付加する” forcing notion を考え, それを使って well-founded iteration を行えばよい. 本節では, Cohen forcing $\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ の two-step iteration が, その性質を持つことを示す.

Cohen forcing notion としては, $\mathbb{C} = 2^{<\omega}$ を考える.

$\mathbf{V}$ を ZFC のモデルとする. $\omega^{\uparrow\omega}$ の元 g が, $\mathbf{V}$ に属するすべての $\omega^{\uparrow\omega}$ の元 f に対して $f \sqsubseteq g$ を満たすとき, g は **$\mathbf{V}$ 上 $\sqsubseteq$-dominating** であるという. $g \in \omega^{\uparrow\omega}$ について, g が $\mathbf{V}$ 上 $\leq^*$-dominating であることと $\sqsubseteq$-dominating であることは同値ではないが, 基底モデル上 dominating な元の存在に関しては, 次の形で同値となる.

命題 3.1. [5, Theorem 2.10] M, N はともに ZFC のモデルで, $M \subseteq N$ とする. このとき, 以下は同値である.

1. N において, M 上 $\leq^*$-dominating な ω^ω の元 g が存在する.
2. N において, M 上 $\sqsubseteq$-dominating な $\omega^{\uparrow\omega}$ の元 g が存在する.

証明. (2) $\to$ (1): M 上 $\sqsubseteq$-dominating な関数 g は同時に M 上 $\leq^*$-dominating でもあることを示す. $f \in \omega^\omega \cap M$ とする. $f \in \omega^{\uparrow\omega}$ と仮定して一般性を失わない. $\bar{f} \in \omega^{\uparrow\omega} \cap M$ を, $\bar{f}(n) = f(2n)$ で定める. g は M 上 $\sqsubseteq$-dominating であるから, $\bar{f} \sqsubseteq g$ である. このとき, $\sqsubseteq$ の定義から明らかに, ある $m < \omega$ が存在して, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $\bar{f}(n) \leq g(n+m)$ となる. f は単調増加関数であるから, $n \geq m$ ならば $f(n+m) \leq f(2n) = \bar{f}(n)$ である. ゆえに $f \leq^* g$ である.

(1) $\to$ (2): $g \in \omega^\omega \cap N$ は M 上 $\leq^*$-dominating であるとする. $g \in \omega^{\uparrow\omega}$ と仮定して一般性を失わない. $\tilde{g} \in \omega^{\uparrow\omega} \cap N$ を, $\tilde{g}(0) = g(0)$ かつ $\tilde{g}(n+1) = g(\tilde{g}(n))$ で定める. このとき, $\tilde{g}$ が M 上 $\sqsubseteq$-dominating であることを示す.

$f \in \omega^{\uparrow\omega} \cap M$ が与えられたとする. $\hat{f} \in \omega^\omega \cap M$ を, $f(m-1) \leq j < f(m)$ を満たす j について $\hat{f}(j) = f(m+1)$ とおくことにより定義する ($j < f(0)$ に対しては $\hat{f}(j) = 0$ とする). g は M 上 $\leq^*$-dominating であるから, 有限個を除くすべての $j < \omega$ について $\hat{f}(j) \leq g(j)$ である. $\hat{f}$ は非減少関数であるから, 有限個を除くすべての n について, $\tilde{g}(n) \leq \hat{f}(\tilde{g}(n)) \leq g(\tilde{g}(n)) = \tilde{g}(n+1)$ である. ところで, $\hat{f}$ の定義より, $f(m-1) \leq \tilde{g}(n) < f(m)$ を満たす m について, $\hat{f}(\tilde{g}(n)) = f(m+1)$ である. ゆえに, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について, ある m が存在して, $\tilde{g}(n) \leq f(m) < f(m+1) \leq \tilde{g}(n+1)$ が成り立つ. すなわち, $f \sqsubseteq \tilde{g}$ である. $\square$

そこで, $\mathbb{D}$ の定義を変形して, 基底モデル上 $\sqsubseteq$-dominating な関数を付加する forcing notion $\mathbb{D}'$ を定義する*8.

定義 3.2. $\mathbb{D}'$ を, 以下によって定義される forcing notion とする. $\mathbb{D}'$ の condition は $p = (s^p, f^p)$ の形で, $s^p \in \omega^{\uparrow<\omega}$ かつ $f^p \in \omega^{\uparrow\omega}$ を満たすものである (すなわち, 集合としては $\mathbb{D}' = \omega^{\uparrow<\omega} \times \omega^{\uparrow\omega}$ である). 以下, $\mathbb{D}'$ の condition p について, 特に断ることなく p の第 1 成分と第 2 成分をそれぞれ s^p, f^p で表す.

$\mathbb{D}'$ の condition p, q に対して, $p \leq q$ とは, 以下が成り立つときにいう.

1. $s^p \supseteq s^q$,
2. すべての $n < \omega$ について, $f^p(n-1) \leq f^q(m-1) < f^q(m) \leq f^p(n)$ を満たす $m < \omega$ が存在し, かつ,

*8 命題 3.1 から容易に予想できるとおり, $\mathbb{D}'$ は実は $\mathbb{D}$ と同等な forcing notion である. すなわち, $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{D}$-generic なフィルタから $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{D}'$-generic なフィルタを構成することが可能であり, かつ, その逆もまた可能である. この事実の証明は, [2, Theorem 3.5.1] とほとんど同じである.

3. $|s^q| \leq n < |s^p|$ を満たすすべての n について, $s^p(n-1) \leq f^q(m-1) < f^q(m) \leq s^p(n)$ を満たす $m < \omega$ が存在する.

次の 2 つの命題は, 命題 2.2 および 2.3 と同様に, 容易に証明できる.

命題 3.3. $\mathbb{D}'$ は σ-centered である. ゆえに, 特に $\mathbb{D}'$ は ccc を満たす. □

命題 3.4. $\mathbf{V}$ を基底モデルとし, G を $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{D}'$-generic なフィルタとする. $\mathbf{V}[G]$ において, $d_G = \bigcup\{s^p : p \in G\}$ と定義する. このとき, $d_G \in \omega^{\uparrow\omega}$ となり, かつ, d_G は $\mathbf{V}$ 上 $\sqsubseteq$-dominating である. □

以下, Cohen forcing $\mathbb{C}$ と, 本節で定義した $\mathbb{D}'$ の two-step iteration によって, 基底モデルでコードされるボレル第一類集合をすべて含む第一類集合が付加されることを示す.

定義 3.5. $x \in 2^\omega$ と $f \in \omega^{\uparrow\omega}$ に対して, 2^ω の部分集合 $E_{x,f}$ を

$$E_{x,f} = \{z \in 2^\omega : \exists m < \omega \forall n \geq m \, \exists j \in [f(n), f(n+1)) \, (z(j) \neq x(j))\}.$$

と定義する.

明らかに, 任意の $x \in 2^\omega$, $f \in \omega^{\uparrow\omega}$ に対して $E_{x,f} \in \mathcal{M}$ である.

補題 3.6. $x \in 2^\omega$ と $f, g \in \omega^{\uparrow\omega}$ について, $f \sqsubseteq g$ ならば $E_{x,f} \subseteq E_{x,g}$ である.

証明. 明らか. □

補題 3.7. $x, y \in 2^\omega$ と $f, g \in \omega^{\uparrow\omega}$ について, $f \not\sqsubseteq g$ ならば $E_{x,f} \not\subseteq E_{y,g}$ である.

証明. $x, y \in 2^\omega$, $f, g \in \omega^{\uparrow\omega}$ かつ $f \not\sqsubseteq g$ であるとする.

$$A = \{n < \omega : \text{すべての } k < \omega \text{ について } [f(k), f(k+1)) \not\subseteq [g(n), g(n+1))\}$$

とおく. 仮定により, A は ω の無限部分集合である. $z \in 2^\omega$ を次のように定義する.

$$z(j) = \begin{cases} y(j) & \text{ある } n \in A \text{ について } j \in [g(n), g(n+1)) \\ 1 - x(j) & \text{それ以外} \end{cases}$$

このとき, $z \in E_{x,f} \setminus E_{y,g}$ であることが容易に確かめられる. □

補題 3.8. $\mathbf{V}$ を基底モデルとし, $c \in 2^\omega$ を $\mathbf{V}$ 上の Cohen 実数, $d \in \omega^{\uparrow\omega}$ を $\mathbf{V}[c]$ 上 $\sqsubseteq$-dominating な関数とする. このとき, $\mathbf{V}$ でコードされるすべてのボレル第一類集合 $X \subseteq 2^\omega$ について, $X \subseteq E_{c,d}$ である.

証明. X を $\mathbf{V}$ でコードされるボレル第一類集合とし, $x \in X$ を任意にとる. c は $\mathbf{V}$ 上の Cohen 実数であるから, 無限個の $j < \omega$ について $x(j) \neq c(j)$ が成り立つ. そこで, $\mathbf{V}[c]$ において, ω の無限部分集合 D_x を, $D_x = \{j < \omega : x(j) \neq c(j)\}$ と定義する. d は $\mathbf{V}[c]$ 上 $\sqsubseteq$-dominating であるから, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $D_x \cap [d(n), d(n+1)) \neq \emptyset$ が成り立つ. したがって $x \in E_{c,d}$ である. □

4 Meager ideal への順序構造の埋め込み定理

補題 3.8 により, $\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}'$ の two-step iteration によって, 基底モデルでコードされる第一類集合をすべて含む第一類集合が付加されることがわかった. したがって, two-step iteration $\mathbb{C} * \dot{\mathbb{D}}'$ ($\dot{\mathbb{D}}'$ は $\mathbb{D}'$ を表す $\mathbb{C}$-name) をひとつの forcing notion とみて, これの well-founded iteration を構成すれば, meager ideal への順序構造の埋め込み定理が証明できるように思える. 実際, 与えられた順序構造が well-founded の場合には, これでうまくいく [3].

しかし, 与えられた順序構造が well-founded でない場合には, 少々工夫を要する. well-founded でない順序構造 Q に対して, 第 2 節と同様の方法で well-founded iteration を構成しようとすると, $x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ ということが起こりうるが, このときに, x と y のそれぞれの位置で付加される第一類集合 E_x, E_y について, $E_x \subseteq E_y$ であることを保証しなければならない.

$\mathbb{C} * \dot{\mathbb{D}}'$ の Q に沿った well-founded iteration によって x の位置で付加される Cohen 実数と $\sqsubseteq$-dominating な関数をそれぞれ c_x, d_x とし, $E_x = E_{c_x,d_x}$ とおく. $x, y \in Q$ は $x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ を満たすとする. このとき, c_x と c_y は互いに独立であるために, たとえ $d_x \sqsubseteq d_y$ が成り立っていても, $E_x \subseteq E_y$ は一般には成り立たない. したがって, この方法で構成される $\{E_x : x \in Q\}$ は, $(Q, \leq)$ の順序構造を保っていない.

この不具合を解決するには, $x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ を満たす $x, y \in Q$ については, 共通の Cohen 実数 c を用いて, $E_x = E_{c,d_x}$, $E_y = E_{c,d_y}$ とすればよい. すなわち, すべての $x \in Q$ について独立に Cohen 実数を付加するのではなく, ひとつの rank では 1 個だけ Cohen 実数を付加し, 同じ rank をもつ x については, すべて共通の Cohen 実数を参照するのである. こうすれば, forcing の定義の中で $d_x \sqsubseteq d_y$ さえ保証しておけば, 補題 3.6 により, $E_x \subseteq E_y$ が成り立つ.

このことを考えに入れて, well-founded iteration を構成する.

与えられた順序構造 $(Q, \leq)$ に対し, Q^*, R, rank function, $\ll$, Q_a などを第 2 節と同様

に定義する. $D \subseteq Q$ について, $\bar{D} = \mathrm{rank}'' D = \{\mathrm{rank}(x) : x \in D\}$ (rank function による D の像) とおく. さらに, $D \subseteq Q$ と $\xi < \mathrm{rank}(Q)$ に対し, $D_\xi = \{y \in D : \mathrm{rank}(y) = \xi\}$ とおき, $\mathrm{rank}(x) = \xi$ を満たす $x \in Q$ について, $D_{\leq x} = \{y \in D_\xi : y \leq x\}$ と定義する.

定義 4.1. Q^* 上の rank に関する帰納法によって, 各 $a \in Q^*$ に対して forcing notion $\mathbb{M}_a$ を次のように定義する.

$\mathbb{M}_a$ の condition p は $p = (\{s^p_\xi : \xi \in \bar{D}^p\}, \{(t^p_x, \dot{f}^p_x) : x \in D^p\})$ の形で, 次の条件を満たすものとする.

1. D^p は Q_a の有限部分集合,
2. 各 $\xi \in \bar{D}^p$ について $s^p_\xi \in \mathbb{C}\,(= 2^{<\omega})$ であり, かつ
3. 各 $x \in D^p$ について, $t^p_x \in \omega^{<\omega}$, $\dot{f}^p_x$ は $\omega^{\uparrow\omega}$ の元を表す $\mathbb{M}_x * \mathbb{C}$-name である[*9].

以下, 特に断ることなく, $\mathbb{M}_a$ の condition p の各成分を s^p_ξ, t^p_x, $\dot{f}^p_x$, D^p と表記する.

$p \in \mathbb{M}_a$ と $b < a$ に対して, $D' = D^p \cap Q_b$ とし, $p{\restriction}b = (\{s^p_\xi : \xi \in \bar{D}'\}, \{(t^p_x, \dot{f}^p_x) : x \in D'\})$ と定義する. このとき, $p{\restriction}b$ は $\mathbb{M}_b$ の condition となる.

$\mathbb{M}_a$ の condition p, q について, $p \leq q$ とは, 以下の条件が満たされるときにいう.

1. $D^p \supseteq D^q$,
2. 各 $\xi \in \bar{D}^q$ について $s^p_\xi \supseteq s^q_\xi$,
3. 各 $x \in D^q$ について, $t^p_x \supseteq t^q_x$ であり, かつ, $\xi = \mathrm{rank}(x)$ とすると, $\mathbb{M}_x * \mathbb{C}$ の condition $(p{\restriction}x, s^p_\xi)$ は ($\mathbb{M}_x * \mathbb{C}$ による forcing の意味で) 以下の命題を force する:
   (a) すべての $n < \omega$ について, $\dot{f}^p_x(n) \leq \dot{f}^q_x(k) < \dot{f}^q_x(k+1) \leq \dot{f}^p_x(n+1)$ を満たす $k < \omega$ が存在する.
   (b) $|t^q_x| \leq n < |t^p_x|$ を満たすすべての n について, $t^p_x(n-1) \leq \dot{f}^q_x(k) < \dot{f}^q_x(k+1) \leq t^p_x(n)$ を満たす $k < \omega$ が存在する.
4. $x, y \in D^q$ について, $x < y$, かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ ならば, $n \geq 1$ かつ $|t^q_y| \leq n < |t^p_y|$ を満たすすべての n について, $t^p_y(n-1) \leq t^p_x(k-1) < t^p_x(k) \leq t^p_y(n)$ を満たす $k < |t^p_x|$ が存在する.

上の定義は少々複雑に見えるかもしれないが, 大まかに言えば, 各々の rank ξ について,「まず, 1 個だけ共通の Cohen 実数 c_ξ を付加し, その次に, $\mathrm{rank}(x) = \xi$ を満たす $x \in Q$ それぞれについて, $\mathbf{V}^{\mathbb{M}_x * \mathbb{C}}$ 上 $\sqsubseteq$-dominating な関数を付加する」ということを繰り返す

[*9] Cohen forcing notion $\mathbb{C} = 2^{<\omega}$ は絶対的なので, $\mathbb{C}$ を Cohen forcing notion を表す $\mathbb{M}_x$-name と考えても, 基底モデルの Cohen forcing notion と考えても, 同じことである.

のである. あるいは, 「本来ならすべての $x \in Q$ の位置で $\mathbb{C} * \dot{\mathbb{D}}'$ の forcing を行いたいが, (やむを得ず) $\mathbb{C}$ の部分は各 rank ごとにひとつに集約して, $\dot{\mathbb{D}}'$ の部分だけをそれぞれの $x \in Q$ の位置で行っている」と考えることもできる.

以下, $\mathbb{M}_Q$ が求める forcing notion であることを示す. 証明の方針は Burke の論文 [6] とほぼ同じである.

補題 4.2. $a, b \in Q^*$ について, $a \ll b$ ならば, $\mathbb{M}_a \subseteq \mathbb{M}_b$ であり, かつ, $\mathbb{M}_a$ から $\mathbb{M}_b$ への自然な埋め込みは complete embedding である.

証明. $a \ll b$ とする. $p, q \in \mathbb{M}_a$ について, p, q が $\mathbb{M}_a$ で incompatible ならば, $\mathbb{M}_b$ でも incompatible であることは明らか. また, $p \in \mathbb{M}_b$ に対して $p' = p \restriction a \in \mathbb{M}_a$ と定めると, $r \in \mathbb{M}_a$ かつ $r \leq p'$ ならば, r と p' の common extension となる $\mathbb{M}_b$ の condition を容易に構成できる. □

補題 4.3. 任意の $a \in Q$ について, 集合 $A_a = \{p \in \mathbb{M}_Q : a \in D^p\}$ は $\mathbb{M}_Q$ において dense である.

証明. $a \in Q, p \in \mathbb{M}_Q$ かつ $a \notin D^p$ と仮定する. $q \in \mathbb{M}_Q$ を以下のように定義する.

1. $D^q = D^p \cup \{a\}$,
2. $\alpha = \mathrm{rank}(a) \notin \bar{D}^p$ ならば $s^q_\alpha = \emptyset$,
3. $t^q_a = \emptyset$, かつ $\dot{f}^q_a$ は ω^ω の元を表す任意の $\mathbb{M}_a$-name,
4. その他の q の成分は p と同じ.

このとき $q \leq p$ かつ $q \in A_a$ である. □

補題 4.4. 任意の $a \in Q$ と $N < \omega$ について, 集合 $A^N_a = \{p \in \mathbb{M}_Q : a \in D^p$ かつ $|t^p_a| \geq N\}$ は $\mathbb{M}_Q$ において dense である.

証明. $a \in Q$ かつ $\alpha = \mathrm{rank}(a)$ とする. $p \in \mathbb{M}_Q$ を任意にとる. 補題 4.3 により, $a \in D^p$ としても一般性を失わない. この p に対し, $q \in \mathbb{M}_Q$ で, $q \leq p$ かつ $|s^q_a| \geq |s^p_a| + 1$ を満たすものが存在することを示せば十分である.

命題 1.3 を用いて, $D^p_{\leq a}$ 上の順序関係 $<$ を全順序 $<'$ に拡張する. その結果, $D^p_{\leq a} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ かつ $x_1 <' \cdots <' x_n = a$ と表せたとする. $i \leq 2^{n+1} - 1$ に関する帰納法で, condition の下降列 $p = p^0 \geq p^1 \geq \cdots \geq p^{2^{n+1}-1} = q$ を以下の手順で構成する.

ステップ 1: まず, $w \in \mathbb{M}_{x_1}$, $v \in \mathbb{C}$, $h \in \omega^{\uparrow\omega}$ を, 次の条件を満たすように選ぶ.

1. $w \leq p^0 \restriction x_1$,

2. $v \leq s_{\alpha}^{p^0}$,
3. $h(|h|-2) \geq t_{x_1}^{p^0}(|t_{x_1}^{p^0}|-1)$, かつ
4. $(w,v) \Vdash_{\mathbb{M}_{x_1} * \mathbb{C}} h \subseteq \dot{f}_{x_1}^{p^0}$.

これは $\dot{f}_{x_1}^{p^0}$ が狭義単調増加関数の name であることから可能である.

$l = \max(\{t_{x_j}^{p^0}(|t_{x_j}^{p^0}|-1) : 1 \leq j \leq n\} \cup \{h(|h|-1)\}) + 1$ とおき, $p^1 \in \mathbb{M}_Q$ を次のように定義する.

1. $D^{p^1} = D^w \cup D^{p^0}$,
2. 各 $\xi \in \bar{D}^w$ に対し, $s_{\xi}^{p^1} = s_{\xi}^w$,
3. 各 $x \in D^w$ に対し, $t_x^{p^1} = t_x^w$ かつ $\dot{f}_x^{p^1} = \dot{f}_x^w$,
4. $s_{\alpha}^{p^1} = v$,
5. $t_{x_1}^{p^1} = t_{x_1}^{p^0} \frown \langle l \rangle$ かつ $\dot{f}_{x_1}^{p^1} = \dot{f}_{x_1}^{p^0}$,
6. 上記以外の p^1 の各成分は p^0 と同じ.

このとき, $p^1 \leq p^0$ であることは容易にわかる.

ステップ 2: 再び $w \in \mathbb{M}_{x_1}$, $v \in \mathbb{C}$, $h \in \omega^{\uparrow\omega}$ を次の条件を満たすように選ぶ.

1. $w \leq p^1 \restriction x_1$,
2. $v \leq s_{\alpha}^{p^1}$,
3. $h(|h|-2) \geq t_{x_1}^{p^1}(|t_{x_1}^{p^1}|-1)$, かつ
4. $(w,v) \Vdash_{\mathbb{M}_{x_1} * \mathbb{C}} h \subseteq \dot{f}_{x_1}^{p^1}$.

そして, $l = \max\{t_{x_j}^{p^1}(|t_{x_j}^{p^1}|-1), h(|h|-1)\} + 1$ とおき, $p^2 \leq p^1$ をステップ 1 と同様に構成する.

ステップ 3: 次は x_2 に着目する. $w \in \mathbb{M}_{x_2}$, $v \in \mathbb{C}$, $h \in \omega^{\uparrow\omega}$ を次のように選ぶ.

1. $w \leq p^2 \restriction x_2$,
2. $v \leq s_{\alpha}^{p^2}$,
3. $h(|h|-2) \geq t_{x_2}^{p^2}(|t_{x_2}^{p^2}|-1)$, かつ
4. $(w,v) \Vdash_{\mathbb{M}_{x_2} * \mathbb{C}} h \subseteq \dot{f}_{x_2}^{p^2}$.

そして, $l = \max\{t_{x_j}^{p^2}(|t_{x_j}^{p^2}|-1), h(|h|-1)\} + 1$ とおき, 次のように $p^3 \leq p^2$ を定義する.

1. $D^{p^3} = D^w \cup D^{p^2}$,
2. 各 $\xi \in \bar{D}^w$ に対し, $s_{\xi}^{p^3} = s_{\xi}^w$,
3. 各 $x \in D^w$ に対し, $t_x^{p^3} = t_x^w$ かつ $\dot{f}_x^{p^3} = \dot{f}_x^w$,

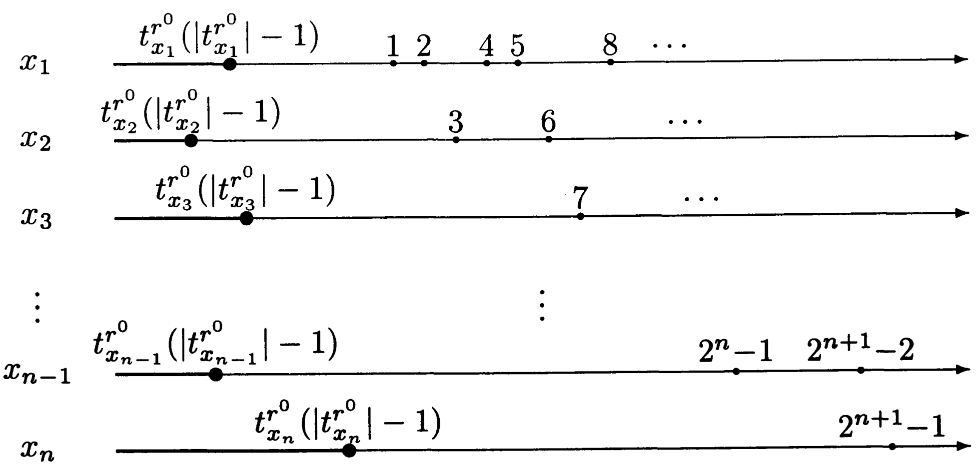

図 1: $x_1,\ldots,x_n$ のそれぞれの位置にある t を延長する順番

4. $s^{p^3}_\alpha = v$,
5. $t^{p^3}_{x_2} = t^{p^2}_{x_2} {}^\frown \langle l \rangle$ かつ $\dot{f}^{p^3}_{x_2} = \dot{f}^{p^2}_{x_2}$,
6. 上記以外の p^3 の各成分は p^2 と同じ.

以下, 同様の手順を図 1 に示す順番で繰り返す. すなわち, 各ステップにおいて, いずれかの x_j に着目して, その位置にある成分 t を長さ 1 だけ延長するのだが, その際,

1. それまでのステップですでに定義された t の値をすべて上回り, かつ,
2. t の末端の 1 区間が, 対応する $\dot{f}$ によって定まる区間を少なくとも 1 つ含む

ように, t の末端の値を選びたい. そこで, (2) の条件を満たすために, $\dot{f}$ の値を, 延長前の t の末端の値より大きい値が 2 つ現れるところまで決定しておいて, その 2 つの値で定まる区間を含むように t を延長するのである. そして, ある j について, x_j における t の値が連続して 2 つ定義されたら, 次に x_{j+1} に着目して, その位置における t を長さ 1 だけ延長する. このとき, 特に t の末端の 1 区間は, 条件 (1) により, x_j における t の末端の区間を含むことになる. こうすることで, $\mathbb{M}_Q$ の condition であることの条件を崩すことなく, $x_1,\ldots,x_n$ のそれぞれの位置における成分 t を順に延長することができる.

この手順を繰り返し行うことにより, $(2^{n+1}-1)$ 番目のステップで x_n の位置の t を長さ 1 だけ延長することができる.

こうして最終的に得られる condition $p^n = q$ が, 証明の最初に示した条件を満たすことは, 容易に確かめられる. □

言うまでもなく, 上の証明がこれほど複雑なのは, $x < y$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ の場合に, t^p_x と t^p_y の間に依存関係があり, t^p_y だけを単独で延長することができないからである. 与えられた順序構造 Q が well-founded の場合には, 上の補題は自明である.

系 4.5. 任意の $N < \omega$ について, 集合 $A^N = \{p \in \mathbb{M}_Q :$ すべての $a \in D^p$ について $|t^p_a| \geq N\}$ は $\mathbb{M}_Q$ において dense である.

証明. 補題 4.4 と同様の証明を, $\max \bar{D}^p$ に関する帰納法で行えばよい. すなわち, 「$\max \bar{D}^p < \alpha$ を満たす condition p については, $q \in A^N$, $q \leq p$ かつ $\max \bar{D}^q < \alpha$ を満たす q が存在する」ことを保証しておいて, $\max \bar{D}^p = \alpha$ を満たす condition について, 補題 4.4 の証明で w を選ぶ場面で, 常に A^N の中から選ぶようにすればよい. □

補題 4.6. $\mathbb{M}_Q$ は ccc を満たす.

証明. A を $\mathbb{M}_Q$ の condition の非可算集合とする. Δ-system lemma により, 非可算集合 $A' \subseteq A$ を, 次の条件を満たすように選ぶことができる.

1. 集合 $\{\bar{D}^p : p \in A'\}$ が ρ を root とする Δ-system をなし,
2. 集合 $\{D^p : p \in A'\}$ が r を root とする Δ-system をなし,
3. 各 $\xi \in r$ について, すべての $p \in A'$ に対する s^p_ρ が同一であり, かつ,
4. 各 $x \in r$ について, すべての $p \in A'$ に対する t^p_x が同一である.

このとき, A' に属する任意の 2 つの condition は, $\mathbb{M}_Q$ において compatible である. □

定義 4.7. $\mathbf{V}$ を基底モデル, G を $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{M}_Q$-generic なフィルタとする. $a \in Q$ に対し, $G \restriction a = G \cap \mathbb{M}_a = \{p \restriction a : p \in G\}$ とおく.

$\mathbf{V}[G]$ において, 各 $\alpha < \mathrm{rank}(Q)$ に対し, $c_\alpha = \bigcup\{s^p_\alpha : p \in G$ かつ $\alpha \in \bar{D}^p\}$ とおき, また, 各 $a \in Q$ に対し, $d_a = \bigcup\{t^p_a : p \in G$ かつ $a \in D^p\}$ とおく.

補題 4.8. $a \in Q$ かつ $\alpha = \mathrm{rank}(a)$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

1. $c_\alpha \in 2^\omega$ であり, かつ, c_α は $\mathbf{V}[G \restriction a]$ 上の Cohen 実数である.
2. $d_a \in \omega^{\uparrow\omega}$ であり, かつ, d_a は $\mathbf{V}[G \restriction a][c_\alpha]$ 上 $\sqsubseteq$-dominating である.

証明. (1) は明らか. (2) は, 補題 4.3, 4.4 および $\mathbb{M}_Q$ の定義から容易にわかる. □

補題 4.9. $a, b \in Q$ について, $a \leq b$ ならば $d_a \sqsubseteq d_b$ である.

証明. $a \ll b$ の場合は, 補題 4.8 より明らか. $a < b$ かつ $\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(b)$ の場合は, $\mathbb{M}_Q$ の定義から直ちにわかる. □

補題 4.10. $a, b \in Q$ について, $a \not\leq b$ ならば $d_a \not\sqsubseteq d_b$ である.

証明. 補題 4.4 の証明の論法を 2 回用いる.

$a \not\leq b$ とし, $\alpha = \mathrm{rank}(a)$, $\beta = \mathrm{rank}(b)$ とおく. $p \in \mathbb{M}_Q$ と $N < \omega$ が与えられたとする. 補題 4.3 により, $a, b \in D^p$ として一般性を失わない. $\dot{d}_a$, $\dot{d}_b$ を, それぞれ d_a, d_b を表す $\mathbb{M}_Q$-name とする. これから, $q \in \mathbb{M}_Q$ および $n < \omega$ で, $q \leq p$, $n > N$ かつ

$$q \Vdash_{\mathbb{M}_Q} \text{“すべての } k < \omega \text{ について } [\dot{d}_a(k), \dot{d}_a(k+1)) \not\subseteq [\dot{d}_b(n-1), \dot{d}_b(n))\text{”}$$

を満たすものが存在することを示す. これにより, $[d_a(k), d_a(k+1)) \subseteq [d_b(n-1), d_b(n))$ を満たす k が存在しないような $n < \omega$ が無限個存在する, すなわち $d_a \not\sqsubseteq d_b$ であることが示される.

$n = \max\{N, |t_b^q|\}$ とおく.

まず, $D^p_{\leq b}$ 上の関係 $<$ を全順序関係 $<'$ に拡張する. その結果, $D^p_{\leq b} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ かつ $x_1 \leq' \cdots \leq' x_m = b$ と表せたとする. $<'$ に関して補題 4.4 と同様の方法を用いて, $p' \leq p$ を, $|t_b^{p'}| = n+2$, $t_a^{p'} = t_a^p$ かつ $t_b^{p'}(n) > t_a^{p'}(|t_a^{p'}| - 1)$ を満たすように構成する. この構成は可能である. なぜなら, 仮定により $a \not\leq b$, すなわち, $1 \leq j \leq m$ を満たすすべての j について $a \notin Q_{x_j}$ であり, したがって, p から p' への拡張のプロセスにおいて t_a^p は一切変更されないからである.

次に, $D^{p'}_{\leq a}$ 上の関係 $<$ を全順序関係 $<''$ に拡張し, その結果, $D^{p'}_{\leq a} = \{y_1, \ldots, y_l\}$ かつ $y_1 \leq'' \cdots \leq'' y_l = a$ と表せたとする. $<''$ に関して補題 4.4 の方法を用いて, $q \leq p'$ を, $|t_a^q| = |t_a^{p'}| + 1$ かつ $t_a^q(|t_a^{p'}|) > t_b^q(n+1) = t_b^{p'}(n+1)$ を満たすように構成する.

このとき, condition q は「区間 $[d_b(n), d_b(n+1))$ は d_a によって定まる区間を含まない」ことを force することが容易に確かめられる. □

定義 4.11. $\mathbf{V}[G]$ において, 各 $a \in Q$ に対し, $\alpha = \mathrm{rank}(a)$ とし, $E_a = E_{c_\alpha, d_a}$ とおく.

補題 4.12. $a \in Q$ とする. $\mathbf{V}[G \restriction a]$ でコードされるすべてのボレル第一類集合 $X \subseteq 2^\omega$ に対し, $X \subseteq E_a$ が成り立つ.

証明. 補題 3.8 および 4.8 から導かれる. □

補題 4.13. $a, b \in Q$ について, $a \leq b$ ならば $E_a \subseteq E_b$ であり, かつ, $a \not\leq b$ ならば $E_a \not\subseteq E_b$ である.

証明. $a \ll b$ ならば, 補題 4.12 より明らかに $E_a \subseteq E_b$ である. $a < b$ かつ $\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(b)$ ならば, 補題 3.6 および 4.9 より, $E_a \subseteq E_b$ が成り立つ. $a \not\leq b$ のときは, 補題 3.7 および 4.10 より, $E_a \not\subseteq E_b$ となる. □

補題 4.14. $\mathbf{V}[G]$ において, すべての 2^ω の第一類集合 X に対して, $X \subseteq E_a$ を満たす $a \in Q$ が存在する.

証明. X はボレル集合として一般性を失わない. Q に関する仮定により, Q の任意の可算部分集合は strict upper bound をもつので, X のボレルコードはある $a \in Q$ に関する $\mathbf{V}[G \restriction a]$ に属する. このとき, 補題 4.12 により, $X \subseteq E_a$ が成り立つ. □

以上により, 下記の主定理が証明された.

定理 4.15 (Meager ideal への順序構造の埋め込み定理). $(Q, \leq)$ を, 順序集合で, 特に, すべての可算部分集合が strict upper bound をもつ (すなわち, すべての可算集合 $A \subseteq Q$ について, ある $b \in Q$ が存在して, すべての $a \in A$ について $a < b$ となる) ものとする. このとき, $\mathbb{M}_Q$ による拡大モデルにおいて, $(\mathcal{M}, \subseteq)$ は Q と順序同型でかつ cofinal な部分集合 $\{E_a : a \in Q\}$ を含む. すなわち, $\{E_a : a \in Q\}$ について以下が成り立つ.

1. すべての $X \in \mathcal{M}$ について, $X \subseteq E_a$ を満たす $a \in Q$ が存在する.
2. $a, b \in Q$ について, $a \leq b$ のとき, かつそのときに限り $E_a \subseteq E_b$ である.

5 Null ideal と自然数上の組合せ論

この節からは, null ideal への順序構造の埋め込み定理に移る.

$\mathcal{N}$ への順序構造の埋め込み定理を示すためには, 基底モデルでコードされるすべての零集合を含む零集合を付加する forcing notion を考え, その well-founded iteration を構成すればよい. そのための forcing notion の候補としては, amoeba forcing $\mathbb{A}$ と, localization forcing $\mathbb{LOC}$ があるが, 本稿では localization forcing を用いる.

本節では, localization forcing を導入するための準備として, [1] で述べられている, ボレル零集合と ω^ω における組合せ論的性質との関係について説明する.

$h \in \omega^{\uparrow\omega}$ を, $1 \leq n < \omega$ ならば $2^{h(n)-h(n-1)} \geq n+1$ となるように選ぶ*10 (たとえば, $h(n) = n^2$ はこの条件を満たす). 各 $n < \omega$ について, $\{C^n_i : i < \omega\}$ を, 2^ω の閉かつ開の

*10 [1] では $h(n) = n$ として定義されている. しかし, そのままでは, 定義 5.5 以降の議論がうまくいかないため, ここでは $2^{h(n)-h(n-1)} \geq n+1$ という条件を付け加えている.

(clopen) 集合で測度が $2^{-h(n)}$ のものをすべて並べたものとする. 以降の節では, このような h および C_i^n は, すべて「あらかじめ選ばれていて, 議論の間ずっと固定されている」ものとする[*11].

定義 5.1. $f \in \omega^\omega$ に対し, $H_f \subseteq 2^\omega$ を,

$$H_f = \bigcap_N \bigcup_{n>N} C^n_{f(n)} = \{z \in 2^\omega : \text{無限個の } n < \omega \text{ について } z \in C^n_{f(n)}\}$$

と定義する.

このとき, H_f は G_δ-集合で, かつ測度零である. 次の命題は, $\{H_f : f \in \omega^\omega\}$ が $\mathcal{N}$ の cofinal な部分集合になっていることを示している. この意味で, $\mathcal{N}$ の元はある $f \in \omega^\omega$ でコードされていると考えることができる.

命題 5.2. 任意の零集合 $X \subseteq 2^\omega$ について, $X \subseteq H_f$ となる $f \in \omega^\omega$ が存在する.

証明. $\{J_n : n < \omega\}$ を, 互いに交わらない ω の無限部分集合の族とする. 各 $n < \omega$ に対し, $\varepsilon_n = \sum_{i \in J_n} 2^{-h(i)}$ とおく. X は零集合であるから, 各 $n < \omega$ に対し, 開集合 O_n を, $X \subseteq O_n$ かつ $\mu(O_n) < \varepsilon_n$ を満たすようにとれる. さらに, 各 O_n に対し, J_n から ω への関数 f_n を, $O_n \subseteq \bigcup_{i \in J_n} C^i_{f_n(i)}$ を満たすように選ぶ. $f \in \omega^\omega$ を, すべての $n < \omega$ について $f \restriction J_n = f_n$ となるように定義する. このとき, すべての $x \in X$ について, $x \in C^i_{f(i)}$ を満たす $i < \omega$ が無限個存在する. したがって, $X \subseteq H_f$ である. □

定義 5.1 と同様に, スラローム (定義は第 1 節参照) に対しても, 次のように零集合を対応させる.

定義 5.3. $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, $H_\varphi \subseteq 2^\omega$ を

$$H_\varphi = \bigcap_N \bigcup_{n>N} \bigcup_{i \in \varphi(n)} C_i^n = \{z \in 2^\omega : \text{無限個の } n < \omega \text{ について } z \in \bigcup_{i \in \varphi(n)} C_i^n\}$$

と定義する.

このとき, H_φ はやはり G_δ-集合で測度零であり, さらに, 次が成り立つ.

命題 5.4. 1. $f \in \omega^\omega$ と $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $f(n) \in \varphi(n)$ ならば, $H_f \subseteq H_\varphi$ である.

[*11] 2^ω の閉かつ開の集合は, 基本開集合の有限和で表せる (かつ, 2^ω の基本開集合は $2^{<\omega}$ の元と 1 対 1 に対応する) ため, 絶対的な概念である. ゆえに, ここで選んだ C_i^n は, 任意のモデルにおいて有効である.

2. $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ に対し, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $\psi(n) \subseteq \varphi(n)$ ならば, $H_\psi \subseteq H_\varphi$ である.

明らかに, これらの命題の逆は成り立たない. 特に, $\varphi \in \mathcal{S}$ に対する H_φ の形で表される集合もやはり零集合なので, 適当な $f \in \omega^\omega$ を選ぶと $H_\varphi \subseteq H_f$ となっている.

ここで, H_φ の形で表される零集合に対して, H_φ と交わらない閉集合を具体的に構成するアルゴリズムを定義する. このアルゴリズムは, 以下の節で重要な役割を果たす.

定義 5.5. スラローム $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して, 関数 $r_\varphi \in \omega^\omega$ を, $n < \omega$ に関する帰納法で次のように定義する. $r_\varphi(0) = 0$ とし, $1 \leq n < \omega$ に対しては,

$$r_\varphi(n) = \min\{i < \omega : C_i^n \subseteq C_{r_\varphi(n-1)}^{n-1} \setminus \bigcup_{j \in \varphi(n)} C_j^n\}.$$

と定める.

関数 h は $2^{h(n)-h(n-1)} \geq n+1$ を満たすように定められているので, $j, k < \omega$ に対して $\mu(C_j^{n-1}) \geq (n+1) \cdot \mu(C_k^n)$ が成り立つ. したがって, $C_i^n \subseteq C_{r_\varphi(n-1)}^{n-1} \setminus \bigcup_{j \in \varphi(n)} C_j^n$ を満たす $i < \omega$ は常に存在する. ゆえに, 上述の r_φ の定義は妥当である.

定義 5.6. $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, $R_\varphi = \bigcap_{n<\omega} C_{r_\varphi(n)}^n$ と定義する.

命題 5.7. 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ について, R_φ は空でない閉集合である.

証明. 定義から明らかに, R_φ は空でない閉集合の ($\subseteq$ に関する) 減少列の共通部分である. また, カントール空間 2^ω はコンパクトである. □

命題 5.8. 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ について, $R_\varphi \cap H_\varphi = \emptyset$ である.

証明. $A_\varphi = \bigcup_{n<\omega} \bigcup_{i \in \varphi(n)} C_i^n$ とおく. すると, 明らかに $H_\varphi \subseteq A_\varphi$ である. また, r_φ の作り方より, $R_\varphi \cap A_\varphi = \emptyset$ が成り立つ. したがって, $R_\varphi \cap H_\varphi = \emptyset$ である. □

命題 5.9. $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ について, 無限個の $n < \omega$ について $r_\varphi(n) \in \psi(n)$ であれば, $H_\psi \not\subseteq H_\varphi$ である.

証明. 仮定より, $R_\varphi \subseteq H_\psi$ が成り立つことは明らかである. このことと, 命題 5.7 および 5.8 より, $H_\psi \not\subseteq H_\varphi$ であることがわかる. □

命題 5.9 を使うと, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ について, H_ψ が H_φ の部分集合でないことの証明を, 自然数上の組合せ論的性質によって行うことができる. このことは, 第 7 節における, イデアル $\mathcal{N}$ への順序構造の埋め込み定理の証明で重要な役割を果たす.

注意すべき点は, 命題 5.9 に現れる φ, ψ, r_φ はすべて自然数上の組合せ論の言葉で表される概念であるにもかかわらず, φ と r_φ の対応関係は h と C_i^n の選び方に強く依存していることである. これは, H_f, H_φ を定義することにより, 零集合を関数やスラロームを使ってコードすることはできたが, r_φ を使って議論するときには, コードとしての関数やスラロームそのものの情報だけではなく, コード化のスキームにまで立ち戻らなければならないことを意味する. すべての議論に先立って h および C_i^n を選んで固定しなければならない最大の理由は, まさにこの点にある.

6 Localization forcing

この節では, [2, Section 3.1] で導入されている localization forcing の定義と性質について述べる.

定義 6.1. Localization forcing $\mathbb{LOC}$ は, 次のように定義される*12. $\mathbb{LOC}$ の condition p は $p = (s^p, F^p)$ の形であって, $s^p \in \mathcal{T}$, F^p は ω^ω の有限部分集合で, かつ, $|s^p| \geq |F^p|$ を満たすものである. 以下, $\mathbb{LOC}$ の condition p について, 特に断ることなく p の第 1 成分と第 2 成分をそれぞれ s^p, F^p で表す.

$\mathbb{LOC}$ の condition p, q に対して, $p \leq q$ とは, 以下が成り立つときにいう.

1. $s^p \supseteq s^q$,
2. $F^p \supseteq F^q$, かつ,
3. $|s^q| \leq n < |s^p|$ を満たすすべての n と, すべての $f \in F^q$ について, $f(n) \in s^p(n)$ である.

次の命題は, $\mathbb{LOC}$ の定義から明らかであろう.

命題 6.2. $\mathbf{V}$ を基底モデルとし, G を $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{LOC}$-generic なフィルタとする. $\mathbf{V}[G]$ において, $\varphi_G = \bigcup\{s^p : p \in G\}$ と定義する. このとき, $\varphi_G \in \mathcal{S}$ となり, かつ, $\mathbf{V}$ に属するすべての ω^ω の元 f について, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $f(n) \in \varphi_G(n)$ が成り立つ.

次の命題により, $\mathbb{LOC}$ は基底モデルでコードされるすべてのボレル零集合を含む零集合を付加することがわかる.

*12 ここで述べる $\mathbb{LOC}$ の定義は [2, Section 3.1] による定義とは異なるが, 表現が違うだけで実体は同じである. 本稿で定義を変えているのは, well-founded iteration の定義を簡潔にするためである.

命題 6.3. $\mathbf{V}$ を基底モデル, G を $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{LOC}$-generic なフィルタとし. $H_G = H_{\varphi_G}$ とおく. このとき, $\mathbf{V}[G]$ において, $\mathbf{V}$ でコードされるすべての 2^ω のボレル零集合 X について $X \subseteq H_G$ が成り立つ.

証明. 命題 5.4 および 6.2 より直ちに導かれる. □

命題 6.4. $\mathbb{LOC}$ は σ-linked である. ゆえに, 特に $\mathbb{LOC}$ は ccc を満たす.

証明. 集合 $L = \{p \in \mathbb{LOC} : |s^p| \geq 2 \cdot |F^p|\}$ が $\mathbb{LOC}$ において dense であることは容易にわかる. L が可算個の linked な集合の和で表せることを示せば十分である.

各 $t \in \mathcal{T}$ に対し, $L_t = \{p \in L : s^p = t\}$. とおく. このとき, 明らかに $L = \bigcup\{L_t : t \in \mathcal{T}\}$ が成り立つ. また, $t \in \mathcal{T}$ と $p, q \in L_t$ に対して, $(t, F^p \cup F^q)$ は $\mathbb{LOC}$ の condition であり, かつ p, q の common extension である. したがって, すべての t について, L_t に属する condition はどの 2 つも $\mathbb{LOC}$ において compatible である. □

第 5 節で定義したとおり, $\mathbf{V}[G]$ において, φ_G をもとに r_{φ_G} および R_{φ_G} を定義することができる[*13]. r_φ の定義から明らかに, $r_\varphi(n)$ の値は, φ の先頭部分 $\varphi\restriction(n+1) \in \mathcal{T}$ によって決定されている. したがって, r_{φ_G} を表す $\mathbb{LOC}$-name $\dot{r}$ を, 特に, 「$p \in \mathbb{LOC}$ に対し, $|s^p| = n$ ならば p は $\dot{r}\restriction n$ の値を決定する」という性質を満たすように構成することができる.

本節の残りの部分で述べる結果は, 第 7 節では直接的には用いられない. しかし, 以下に示すアイデアは, 主定理の証明の中で有効に活かされている.

Localization forcing の product $\mathbb{LOC} \times \mathbb{LOC}$ を考える. $\mathbb{LOC} \times \mathbb{LOC}$ による拡大モデルにおいて, generic に付加される 2 つの零集合は, 互いに他を含まない (すなわち, $\subseteq$ に関して比較不可能である) ことを示す.

命題 6.5. $G = G_1 \times G_2$ は $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{LOC} \times \mathbb{LOC}$-generic なフィルタで, G_1 と G_2 はどちらも $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{LOC}$-generic であるとする. $\mathbf{V}[G]$ において, $i = 1, 2$ について $\varphi_i = \varphi_{G_i}$ および $H_i = H_{\varphi_i}$ とおく. このとき, $H_1 \not\subseteq H_2$ および $H_2 \not\subseteq H_1$ である. .

証明. 対称性より, $H_1 \not\subseteq H_2$ のみを示せば十分である. $r_2 = r_{\varphi_2}$, $R_2 = R_{\varphi_2}$ とおく. $R_2 \neq \emptyset$ であり, かつ, $R_2 \cap H_2 = \emptyset$ は常に成り立つから, $R_2 \subseteq H_1$ を示せばよい.

[*13] 特に, この文脈においては, R_{φ_G} は $\mathbf{V}$ 上の random 実数からなる集合になっている. なぜなら, 命題 6.2 により, $\mathbf{V}$ でコードされるボレル零集合はすべて H_{φ_G} に含まれ, かつ, R_{φ_G} は H_{φ_G} の外側にあるからである.

$\dot{r}_2$ を, r_2 を表す $\mathbb{LOC}$-name で, 特に, $|s^p| = n$ ならば p が $\dot{r}_2 \restriction n$ の値を決定するようなものとする. $(p_1, p_2) \in \mathbb{LOC} \times \mathbb{LOC}$ および $N < \omega$ を任意にとる. これから, $(q_1, q_2) \in \mathbb{LOC} \times \mathbb{LOC}$ と $n < \omega$ で, $(q_1, q_2) \leq (p_1, p_2)$, $n > N$ かつ $(q_1, q_2) \Vdash \dot{r}_2(n) \in s^{q_1}(n)$ を満たすものが存在することを示す. これにより, 無限個の $n < \omega$ について $r_2(n) \in \varphi_1(n)$ が成り立つ, すなわち, $R_2 \subseteq H_1$ であることがわかる.

$n = \max\{N, |s^{p_1}|, |s^{p_2}|\} + 1$ とする. $q_2 \leq p_2$ を, $|s^{q_2}| \geq n + 1$ となるようにとる. すると, condition q_2 は $\dot{r}_2(n)$ の値を決定しているので, 特に $q_2 \Vdash \dot{r}_2(n) = k$ とする. ここで, $q_1 \leq p_1$ を, $|s^{q_1}| \geq n + 1$ かつ $k \in s^{q_1}(n)$ を満たすように選ぶことができる. このとき, (q_1, q_2) が求める condition であることが容易に確かめられる. □

7 Null ideal への順序構造の埋め込み定理

この節では, 第 6 節で導入した localization forcing の well-founded iteration を定義し, それを用いて Null ideal への順序構造の埋め込み定理を証明する. ただし, 本節では, 埋め込まれる順序構造 Q は **well-founded であることを仮定する**.

$(Q, \leq)$ を well-founded な順序構造とする. Q^*, rank function, Q_a などの定義は第 2 節と同一とする.

定義 7.1. Q^* 上の rank に関する帰納法によって, 各 $a \in Q^*$ に対して forcing notion $\mathbb{N}_a$ を次のように定義する.

$\mathbb{N}_a$ の condition p は $p = \{(s^p_x, F^p_x) : x \in D^p\}$ の形で, 次の条件を満たすものとする.

1. D^p は Q_a の有限部分集合,
2. 各 $x \in D^p$ について, $s^p_x \in \mathcal{T}$, F^p_x は ω^ω の元を表す $\mathbb{N}_x$-name の有限集合であり[*14], かつ,
3. 各 $x \in D^p$ について, $|s^p_x| \geq |F^p_x|$ が成り立つ.

以下, 特に断ることなく, $\mathbb{N}_a$ の condition p の各成分を s^p_x, F^p_x, D^p と表記する.

[*14] 正確には, F^p_x は「ω^ω の有限部分集合を表す $\mathbb{N}_x$-name」として定義すべきであろう. しかし, そのように定義したとしても, F^p_x の濃度がすべて決定されているような condition の全体は dense であり, さらに, 濃度が n に決定されていれば, 「濃度 n の集合の name」と「n 個の name の集合」は自然に同一視できるので, F^p_x は name の集合としても, forcing notion としては同等である. もっとも, その意味では, F^p_x はドットをつけて $\dot{F}^p_x$ と書くべきかもしれないが, ここでは「F^p_x は name の集合であって, それ自体は name ではない」という立場をとり, ドットをつけないことにする.

$p \in \mathbb{N}_a$ と $b < a$ に対して, $D' = D^p \cap Q_b$ とし, $p \restriction b = \{(s^p_x, F^p_x) : x \in D'\}$ と定義する. このとき, $p \restriction b$ は $\mathbb{N}_b$ の condition となる.

$\mathbb{N}_a$ の condition p, q について, $p \leq q$ とは, 以下の条件が満たされるときにいう.

1. $D^p \supseteq D^q$,
2. 各 $x \in D^q$ について, $s^p_x \supseteq s^q_x$, $F^p_x \supseteq F^q_x$, かつ, $|s^q_x| \leq n < |s^p_x|$ を満たすすべての $n < \omega$ とすべての $\dot{f} \in F$ について $p \restriction x \Vdash_{\mathbb{N}_x} \dot{f}(n) \in s^p_x(n)$ である.

補題 7.2. $a, b \in Q^*$ について, $a \ll b$ ならば, $\mathbb{N}_a$ から $\mathbb{N}_b$ への自然な埋め込みは complete embedding である.

証明. 補題 4.2 と同様. □

補題 7.3. 任意の $a \in Q$ について, 集合 $B_a = \{p \in \mathbb{N}_Q : a \in D^p\}$ は $\mathbb{N}_Q$ において dense である.

証明. $p \in \mathbb{N}_Q$ かつ $a \notin D^p$ とする. $q \in \mathbb{N}_Q$ を次のように定義する.

1. $D^q = D^p \cup \{a\}$,
2. $s^q_a = \emptyset$, $F^q_a = \emptyset$, かつ
3. q の残りの成分は p と同じ.

このとき, $q \leq p$ かつ $q \in B_a$ である. □

補題 7.4. 任意の $a \in Q$ と $N < \omega$ について, 集合 $B^N_a = \{p \in \mathbb{N}_Q : a \in D^p$ かつ $|s^p_a| \geq N\}$ は $\mathbb{N}_Q$ において dense である.

証明. $p \in \mathbb{N}_Q$, $a \in Q$ かつ $N < \omega$ とする. 補題 7.3 により, $a \in D^p$ と仮定して一般性を失わない.

$|s^p_a| < N$ と仮定する. $r \in \mathbb{N}_a$ を, $r \leq p$ かつ, すべての $\dot{f} \in F^p_a$ について r が $\dot{f} \restriction N$ の値を決定するように選ぶ. $|s^p_a| \leq n < N$ を満たす各々の n について, $K_n = \{k < \omega : r \Vdash_{\mathbb{N}_a}$ ある $\dot{f} \in F^p_a$ について $\dot{f}(n) = k\}$ とおく. q を次のように定義する.

1. $D^q = D^q \cup D^r$;
2. 各 $x \in D^r$ について, $s^q_x = s^r_x$ かつ $F^q_x = F^r_x$;
3. s^q_a は, 以下の条件によって定まる $\mathcal{T}$ の元とする: $|s^q_a| = N$, $s^q_a \supseteq s^p_a$ かつ, $|s^p_a| \leq n < N$ を満たす各々の n について $s^q_a(n) = K_n$;

4. q のその他の成分は p と同じ.

この q について, $q \leq p$ かつ $q \in B_a^N$ が成り立つことは容易に確かめられる. $\square$

補題 7.5. 任意の $a \in Q$ と ω^ω の元を表す $\mathbb{N}_a$-name $\dot{f}$ について, 集合 $B_a^{\dot{f}} = \{p \in \mathbb{N}_Q : a \in D^p$ かつ $\dot{f} \in F_a^p\}$ は $\mathbb{N}_Q$ において dense である.

証明. $p \in \mathbb{N}_Q$, $a \in Q$ かつ, $\dot{f}$ を ω^ω の元を表す $\mathbb{N}_a$-name とする. 補題 7.3 により, $a \in D^p$ と仮定して一般性を失わない.

補題 7.4 を用いて, $q \leq p$ を, $|s_a^q| \geq |s_a^p| + 1$ を満たすように選ぶ[*15]. そのうえで, $r \in \mathbb{N}_Q$ を

1. $F_a^r = F_a^q \cup \{\dot{f}\}$, かつ
2. r の残りの成分は q と同じ

とおくことにより定める. このとき, $r \leq q$ かつ $r \in B_a^{\dot{f}}$ となる. $\square$

補題 7.6. 集合 $L = \{p \in \mathbb{N}_Q :$ すべての $x \in D^p$ について $|s_x^p| \geq 2 \cdot |F_x^p|\}$ は $\mathbb{N}_Q$ において dense である.

証明. 補題 7.4 の証明と同様の議論を, $\max \bar{D}^p$ に関する帰納法で行えばよい. (系 4.5 の証明を参照せよ.) $\square$

補題 7.7. $\mathbb{N}_Q$ は ccc を満たす.

証明. 補題 7.6 に示されている $\mathbb{N}_Q$ の dense な部分集合 L が ccc を満たすことを示せば十分である.

A を L の非可算部分集合とする. Δ-system lemma により, 非可算集合 A' を,

1. 集合 $\{D^p : p \in A'\}$ が r を root とする Δ-system をなし, かつ,
2. 各 $x \in r$ について, すべての $p \in A'$ に対する s_x^p が同一である

ようにとることができる. このとき, A' に属する任意の 2 つの condition は $\mathbb{N}_Q$ において compatible である. $\square$

---

*15 この下準備が必要となる理由は, F_a^q に name を付け加えて r を構成したときに, r が LOC の condition であるための条件 (3) (定義 7.1) を満たすようにするためである.

定義 7.8. $\mathbf{V}$ を基底モデル, G を $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{N}_Q$-generic なフィルタとする. $\mathbf{V}[G]$ において, 各 $a \in Q$ に対し, $\varphi_a = \bigcup\{s^p_a : p \in G$ かつ $a \in D^p\}$ と定義する. また, $a \in Q$ に対し, $G{\restriction}a = G \cap \mathbb{N}_a = \{p{\restriction}a : p \in G\}$ とおく.

補題 7.3 および 7.4 より, すべての $a \in Q$ について φ_a は定義され, かつ, $\varphi_a \in \mathcal{S}$ となる.

補題 7.9. $\mathbf{V}[G]$ において, 任意の $a \in Q$ と $f \in \omega^\omega \cap \mathbf{V}[G{\restriction}a]$ に対し, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $f(n) \in \varphi_a(n)$ が成り立つ.

証明. 補題 7.5 および $\mathbb{N}_Q$ の定義から導かれる. □

定義 7.10. 各 $a \in Q$ に対し, $H_a = H_{\varphi_a}$ とおく.

このとき, すべての $a \in Q$ について $H_a \in \mathcal{N}$ である. 集合 $\{H_a : a \in Q\}$ が $\subseteq$ に関して $(Q, \leq)$ と順序同型で, かつ $\mathcal{N}$ において cofinal であることを示せば, 証明が完結する.

補題 7.11. $a \in Q$ とする. $\mathbf{V}[G{\restriction}a]$ でコードされるすべてのボレル零集合 $X \subseteq 2^\omega$ に対し, $X \subseteq H_a$ が成り立つ.

証明. 補題 7.9 および命題 5.4 から導かれる. □

補題 7.12. $\mathbf{V}[G]$ において, すべての 2^ω の零集合 X に対して, $X \subseteq H_a$ を満たす $a \in Q$ が存在する.

証明. 補題 4.14 と同様. □

補題 7.13. $a, b \in Q$ について, $a \leq b$ ならば $H_a \subseteq H_b$ である.

証明. 補題 7.11 より明らか. □

第 5 節と同じように, $a \in Q$ に対し, $r_a = r_{\varphi_a}$ および $R_a = R_{\varphi_a}$ を考える. このとき, 第 6 節で述べたとおり, r_a を表す $\mathbb{N}_a$-name $\dot{r}_a$ を, 特に「$p \in \mathbb{N}_Q$ に対し, $a \in D^p$ かつ $|s^p_a| = n$ ならば, p は $\dot{r}_a{\restriction}n$ の値を決定する」という性質を満たすように構成することができる.

補題 7.14. $a, b \in Q$ について, $a \not\leq b$ ならば $H_a \not\subseteq H_b$ である.

証明. $a \not\leq b$ とする. $R_b \neq \emptyset$ であり, かつ, $R_b \cap H_b = \emptyset$ は常に成り立つから, $R_b \subseteq H_a$ を示せば十分である.

$p \in \mathbb{N}_Q$ かつ $N < \omega$ とする. 補題 7.3 により, $a, b \in D^p$ と仮定して一般性を失わない. これから, $q \leq p$ および $n > N$ を, $q \Vdash_{\mathbb{N}_Q}$ "$\dot{r}_b(n) \in s^q_a(n)$" を満たすように選ぶ. このことから, 無限個の $n < \omega$ について $r_b(n) \in \varphi_a(n)$, すなわち $R_b \subseteq H_a$ が成り立つことが示される.

$n = \max\{N, |s^p_a|, |s^p_b|\} + 1$ とおく.

補題 4.4 により, $p' \leq p$ を, $|s^{p'}_b| \geq n + 1$ となるようにとる. ここで, 仮定により $a \not\leq b$ であるから, 補題 4.4 の構成法より, 特に, $s^{p'}_a = s^p_a$ かつ $F^{p'}_a = F^p_a$ が成り立つように p' を構成することができる.

この condition p' は, $\dot{r}_b(n)$ の値を決定している. そこで, 特に $p' \Vdash_{\mathbb{N}_Q} \dot{r}_b(n) = k$ とする.

次に, $|F^{p'}_a| \leq |s^{p'}_a| \leq n$ であることから, 補題 4.4 と同様の構成法により, $q \leq p'$ を, $|s^q_a| \geq n + 1$ かつ $k \in s^q_a(n)$ を満たすように選ぶことができる.

この q が求めるものであることは, 容易に確かめられる. □

以上により, 下記の主定理が証明された.

定理 7.15 (Null ideal への順序構造の埋め込み定理). $(Q, \leq)$ を, well-founded な順序集合で, 特に, すべての可算部分集合が strict upper bound をもつ (すなわち, すべての可算集合 $A \subseteq Q$ について, ある $b \in Q$ が存在して, すべての $a \in A$ について $a < b$ となる) ものとする. このとき, $\mathbb{N}_Q$ による拡大モデルにおいて, $(\mathcal{N}, \subseteq)$ は Q と順序同型でかつ cofinal な部分集合 $\{H_a : a \in Q\}$ を含む. すなわち, $\{H_a : a \in Q\}$ について以下が成り立つ.

1. すべての $X \in \mathcal{N}$ について, $X \subseteq H_a$ を満たす $a \in Q$ が存在する.
2. $a, b \in Q$ について, $a \leq b$ のとき, かつそのときに限り $H_a \subseteq H_b$ である.

問題 7.16. 順序集合 $(Q, \leq)$ が well-founded とは限らない場合に, null ideal への順序構造の埋め込み定理は証明できるか?

謝辞

本研究に関して多くの有益なご助言をくださった Tomek Bartoszyński, Jörg Brendle, 加茂静夫の各氏に, また, 本稿の第一稿を注意深くお読みになり, 証明の誤りを指摘してくださった宮元忠敏氏に, お礼申し上げます.

参考文献

[1] T. Bartoszyński. Invariants of measure and category. Handbook of Set Theory (in preparation).

[2] T. Bartoszyński and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line.* A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[3] T. Bartoszyński and M. Kada. Embedding a σ-directed partially ordered set cofinally into the meager ideal. unpublished.

[4] T. Bartoszyński and M. Kada. Hechler's theorem for the meager ideal. submitted.

[5] A. Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. Handbook of Set Theory (in preparation).

[6] M. R. Burke. A proof of Hechler's theorem on embedding $\aleph_1$-directed sets cofinally into $(\omega^\omega, <^*)$. *Arch. Math. Logic*, Vol. 36, pp. 399–403, 1997.

[7] P. L. Dordal. Towers in $[\omega]^\omega$ and ${}^\omega\omega$. *Ann. Pure Appl. Logic*, Vol. 45, pp. 247–276, 1989.

[8] S. H. Hechler. On the existence of certain cofinal subsets of ${}^\omega\omega$. In T. Jech, editor, *Axiomatic Set Theory*, Proc. Symp. Pure Math., pp. 155–173. Amer. Math. Soc., 1974.

[9] T. Jech. *Multiple forcing*, Vol. 88 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge Univ. Press, 1986.

[10] L. Soukup. Pcf theory and cardinal invariants of the reals, 2001. unpublished notes.

[11] E. Szpilrajn. Sur l'extension de l'ordre partiel. *Fund. Math.*, Vol. 16, pp. 386–389, 1930.