数理解析研究所講究録 1304 巻 2003 年 29-46

Iterated forcing indestructibility of MAD families

矢田部俊介 (Shunsuke Yatabe)
神戸大学大学院自然科学研究科

1 序文

この小論では Jörg Brendle 助教授との共同研究 [3] に基づき、MAD 集合族の強制法による非可壊性、壊れなさ (forcing indestructibility) について考察する。

始めに10月の講演以後新しく判明した結果について注記しておく。講演では「Hrušák は Sacks, Cohen をはじめいろいろな強制法に関する保存性を ground model の中で特徴付け、また $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ という基数不変量に関する仮説の元で Sacks 強制法によって壊れない MAD 集合族を構成した」としたが、その後 Hrušák の構成法の間違いが判明した。彼による Sacks 強制法による非可壊性の特徴付けは、G_δ-閉包ではなく閉包をとるものだったが、それでは強すぎ、従ってそれを応用した構成法も完全に間違っていることがわかった。

ここでは、まず Sacks 強制法による非可壊性の正しい特徴付けを行い、そして基数不変量に関する仮説 $(\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c})$ の下で Sacks 非可壊なサイズが連続体の MAD 集合族が構成できることを示す。また、実は同じ条件の下で、Sacks 強制法で 1 回では保存され、2 段階反復では壊れるようなサイズが連続体の MAD 集合族を作ることができることも示す。

1.1 基本的な定義

Definition 1.1
- $2^{<\omega}$ を $0,1$ の有限列全体とする。
- 2^ω を $0,1$ の無限列全体とし、*Cantor space* として $\mathbb{R}$ と同一視する。

Definition 1.2
- 自然数の無限集合の集合族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ が **almost disjoint** *(AD)* とは、$(\forall A, B \in \mathcal{A})$ $A \cap B$ が有限集合 となることをいう。
- *AD* 集合族 $\mathcal{A}$ が *maximal* (**MAD**) とは、任意の自然数の無限集合 $X \in \mathcal{P}(\omega)$ に対して $(\exists A \in \mathcal{A})$ $X \cap A$ が無限集合 であることをいう。

次に Sacks 非可壊性の特徴付けをする上で重要な "G_δ 閉包" を定義する。

Definition 1.3 (G_δ **閉包**) 任意の $A \subseteq 2^{<\omega}$ にたいし、 A の G_δ 閉包 を

$$G_A = \{f \in 2^\omega : (\exists^\infty n \in \omega) f|_n \in A\}$$

もちろん G_A は G_δ 集合である。付け加えると、この G_δ 閉包は、Sacks 強制法で fusion argument の limit をとることに対応している。

以後よく使う結果として以下を証明する。

Lemma 1.4 $\mathcal{A}$ を *MAD* 集合族とする。任意の $f: 2^{<\omega} \to \omega$ *one-to-one* に対し、$\mathcal{F} = \{G_{f^{-1}``D} : D \in \mathcal{A}\}$ は $\mathbb{R}$ の *disjoint* 被覆 となる。

proof $\mathcal{F}$ が 被覆でないと仮定する。つまりある g が存在して $g \in \omega^\omega \setminus (\bigcup_{D\in\mathcal{A}} G_{f^{-1}``D})$ となる。ここで $B = \{f(g|_n) : n \in \omega\}$ を定義すれば、これは任意の $D \in \mathcal{A}$ と almost disjoint になり、maximality に反する。

Disjointness は almost disjointness から明らか。$(\forall D_0, D_1 \in \mathcal{A}) D_0 \cap D_1$ が有限集合 であれば $G_{f^{-1}``D_0} \cap G_{f^{-1}``D_1} = \emptyset$. □

Definition 1.5 *MAD* 集合族 $\mathcal{A}$ が強制法 $\mathbb{P}$ によって**非可壊** であるとは、$\mathcal{A}$ が $\mathbb{P}$-*generic extension* 上でも依然として *maximal* であることをいう。

$\mathfrak{c}$ を連続体濃度とする。ここで MAD 集合族を特徴づける基数不変量として

Definition 1.6 $\mathfrak{a} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ は 無限 *MAD* 集合族 $\}$

を定義する。明らかに $\aleph_1 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ が成り立つ。

また同じく基本的な基数不変量として、実数の集合のイデアル I にたいし、

Definition 1.7 $\mathrm{cov}(I) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq I \wedge \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \mathbb{R}\}$.

を定義する。

2 Sacks 強制法による非可壊性

2.1 Sacks 強制法

次に Sacks 強制法を紹介する。

Definition 2.1 *Sacks* 強制法 $\mathbb{S}$ は $2^{<\omega}$ の中の *perfect tree* 全体の集合で、 包含関係によって *order* がつけられた *partial order* である。

perfect 集合 に関しては、 perfect 集合定理 によって、

Fact 2.2 すべての *Borel* 集合は

- 可算集合であるか、
- もしくは *perfect* 部分集合を含んでいる

ことが *ZFC* によって示される。

これからこの講演では Borel 集合 (それもほとんどは高々 G_δ 集合) ぐらいしか扱わないため、「非可算集合」と "perfect 部分集合を含んでいる" 、(つまり Sacks 強制法の元である) こととは同値であると考えていい。

Definition 2.3 *cntble* を実数の可算集合全体によって生成されたイデアルとする。

つまり Sacks 強制法 $\mathbb{S}$ は $\mathbf{Borel}(2^\omega)/\mathit{cntble}$ の dense subset になり、二つは 強制法 として同値であることになり、今後同一視する。

Fact 2.4 $\mathrm{cov}(\mathit{cntble}) = \mathfrak{c}$

ここで明らかに以下が成立する。

Theorem 2.5 *r_{gen} を $\mathbb{S}$-generic 実数 とする。B を ground model でコードされた Borel 集合とする。このとき*

- *$B \in \mathit{cntble}$ (つまり $\Vdash$ "$r_{gen} \notin B$") となるか、*
- *もしくは $B \notin \mathit{cntble}$ (このとき $B \Vdash$ "$r_{gen} \in B$").*

最後に、イデアルの性質として homegeneous というものを定義する。

Definition 2.6 *I を $\mathcal{P}(2^\omega)$ 上のイデアルとする。*
I が homogeneous であるとは、任意の I-positive Borel 集合 B に対して以下を満たすような function $f : \mathbb{R} \to B$ が存在することである。

$$(\forall X \subseteq B) X \in I \to f^{-1}{}'' X \in I$$

cntble も homogeneous である。これらの定義は Zapletal [7] による。

2.2 $\mathbb{S}$-非可壊性の特徴付け

Theorem 2.7 *MAD 集合族 $\mathcal{A}$ に関し、以下は同値である。*

(1) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{S}$-非可壊

(2) $\forall A \subseteq 2^{<\omega}$ such that $G_A \notin \mathit{cntble}$, $\forall f : A \to \omega$, $\exists B \in \mathcal{A}$ such that $G_{f^{-1}{}''B} \notin \mathit{cntble}$.

(3) $\forall A \subseteq 2^{<\omega}$ such that $G_A \notin \mathit{cntble}$, $\forall f : A \to \omega$ one-to-one, $\exists B \in \mathcal{A}$ such that $G_{f^{-1}{}''B} \notin \mathit{cntble}$.

(4) $\forall f : 2^{<\omega} \to \omega$ one-to-one, $\exists B \in \mathcal{A}$ such that $G_{f^{-1}{}''B} \notin \mathit{cntble}$.

proof (1) から (3) を示すために, (3) が成り立たないと仮定する。ある $A \subseteq 2^{<\omega}$ が存在し、$G_A \notin \mathit{cntble}$ かつ $\exists g : A \to \omega$ であり $\forall B \in \mathcal{A}$,

$$G_{g^{-1}{}''B} \in \mathit{cntble}$$

を満たしていると仮定する。このとき $G_A \in \mathbb{S}$ と考えてよい。$\mathbf{G}$ を $G_A \in \mathbf{G}$ となるような任意の $\mathbb{S}$-generic filter とし、r_{gen} を $\mathbf{G}$ によって定義される generic 実数とする。Theorem 2.5 によって、

- $\mathbf{V}[\mathbf{G}] \models$ "$r_{gen} \in G_A$",
- 任意の $B \in \mathcal{A}$ に対し $\mathbf{V}[\mathbf{G}] \models$ "$r_{gen} \notin G_{g^{-1}"B}$".

が示される。

ここで任意の $B \in \mathcal{A}$ に対し $\mathbf{V}[\mathbf{G}] \models$ "$r_{gen} \notin G_{g^{-1}"B}$"とは、どんな $B \in \mathcal{A}$ をとってきても $g^{-1}(n) \subseteq r_{gen}$ となる $n \in B$ が有限個しか存在しないということである。

従って generic extension の中で新しい集合 $D \in \mathcal{P}(\omega)$ を

$$D = \{m \in \omega : (\exists n) m = g(r_{gen}|_n)\}$$

と定義すれば、D は無限集合 (g は one-to-one) であり、D と任意の $B \in \mathcal{A}$ は almost disjoint (任意の $B \in \mathcal{A}$ に対して $r_{gen} \notin G_{g^{-1}"B}$ より $|g^{-1}"B \cap g^{-1}(D)| < \aleph_0$) となる。

(2) から (3) と 、(3) から (4) は自明である。

(4) から (3) は、*cntble* が homogeneous なイデアルであることによる。

(3) から (1) を示すのは、fusion argument による。(3) を仮定する。$T \subseteq 2^{<\omega}$ とし、$\mathbb{S}$-name $\dot{C}$ が $[T] \Vdash$ "$\dot{C} \in [\omega]^{\omega}$" を満たすと仮定する。

(1) を示すためには、ある perfect tree $S \subseteq 2^{<\omega}$ が存在し、$[S] \leq [T]$ かつ、ある $B \in \mathcal{A}$ に対し

$$[S] \Vdash \text{“}|B \cap \dot{C}| = \aleph_0\text{”}$$

つまり $\mathcal{A}$ が依然として MAD であることを示せばよい。

さて、$[T] \Vdash$ "$\dot{C} \in [\omega]^{\omega}$" より、標準的な fusion argument により、$\dot{C}$ の値を決めていく fusion sequence

$$T = T_0 \geq_0 T_1 \geq_1 T_2 \geq_2 \cdots$$

を選ぶことができる。

具体的には、各 n において、T_n を決めるのは T_{n-1} の n-th. splitting node $\{\sigma_i^{n-1} : i < 2^n\}$ を決めていくことである。つまり、任意の $i < 2^n$ において、それぞれ

$$(T_{n-1})_{\sigma_i^n} \Vdash \text{“}m_i^n \in \dot{C}$$

(ただし $m_0^n < m_1^n < \cdots < m_{2^n-1}^n$) と $(T_{n-1})_{\sigma_i^n}$ が $\dot{C}$ の n 番目の値を実際に決めるものである。

ここで、$A = \bigcup_{n \in \omega} \{\sigma_i^n : i < 2^n\}$ とおき、また新しい function $f : A \to \omega$ として

$$f(\sigma_i^n) = m_i^n$$

を定義する。こうすると以下のように書ける。

- $G_A = \bigcap_{n \in \omega} [T_n]$(fusion limit は $G_A \in \mathbb{S}$),
- $(G_A)_\sigma \Vdash$ "$f(\sigma) \in \dot{C}$"

ここで (3) より、ある $B \in \mathcal{A}$ が存在して $G_{f^{-1}"B} \notin$ *cntble* となる (もちろん $G_{f^{-1}"B} \leq G_A \leq [T]$)。このとき $G_{f^{-1}"B}$ は以下を満たす。

$$G_{f^{-1}"B} \Vdash \text{“}|B \cap \dot{C}| = \aleph_0\text{”} \cdots (*)$$

proof of (*) 任意の $k \in \omega$ と perfect tree T' で $[T'] \leq G_{f^{-1}\text{"}B}$ となるものをとってくる。このとき $l > k$ と subtree T'' で、$[T''] \leq [T']$ で $[T''] \Vdash$ "$l \in B \cap \dot{C}$" を満たすものをとってくればよい。

しかし任意の $[T''] \leq [T']$ に対し、$[T''] \subseteq G_{f^{-1}\text{"}B}$ かつ f が one-to-one なので、$l \geq k$ で $l \in B$ なものと、$\sigma \in f^{-1}\text{"}B \cap T''$ で $f(\sigma) = l$ なものを見つけることができる。□

ここで、この定理の系として以下を証明することができる。

Corollary 2.8 $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ と仮定する。このときサイズが $\mathfrak{a}$ の任意の *MAD* 集合族 $\mathcal{A}$ は $\mathbb{S}$-非可壊になる。

proof 任意の function f をえらぶ。$\mathcal{A}$ サイズが $\mathfrak{a}$ の任意の MAD 集合族とする。このとき lemma より $\mathcal{F} = \{G_{f^{-1}\text{"}D} : D \in \mathcal{A}\}$ が $\mathbb{R}$ の disjoint 被覆 となる。つまり $\{G_{f^{-1}\text{"}D} : D \in \mathcal{A}\}$ はサイズが $\mathfrak{c}$ より小さい 被覆 集合族となる。従ってどこかに $B \in \mathcal{A}$ が存在し、$G_{f^{-1}\text{"}B} \notin$*cntble* となるはずである。□

2.3 cov($\mathcal{M}$) = $\mathfrak{c}$ の下での $\mathbb{S}$-非可壊 MAD 集合族の構成

前節で証明した特徴付けにより、$\mathbb{S}$-非可壊な MAD 集合族を構成することができる。

Theorem 2.9 cov($\mathcal{M}$) = $\mathfrak{c}$ を仮定する。このとき $\mathbb{S}$-非可壊な *MAD* 集合族を構成することができる。

proof $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ のとき、サイズが $\mathfrak{a}$ の MAD 集合族はみな $\mathbb{S}$-非可壊となる。

$\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ を仮定する。最初に全ての one-to-one function $2^{<\omega} \to \omega$ を並べ、$\{f_\alpha : 2^{<\omega} \to \omega$ one-to-one; $\alpha < \mathfrak{c}\}$ とする。このときステップが $\mathfrak{c}$ 回の帰納法によって $\mathbb{S}$-indestructibile な MAD 集合族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ を以下を満たすように構成すればよい。任意の $\alpha < \mathfrak{c}$ に対し、

- A_α は任意の A_β（ただし $\beta < \alpha$）と almost disjoint、
- もし任意の $\beta < \alpha$ に対し $G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta}$ が可算集合だったら、$G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\alpha}$ が非可算集合になる

ように作ればよい。
step $\alpha < \mathfrak{c}$ 二つの場合がありうる。

$(\exists\beta < \alpha)G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta}$ が非可算集合 このとき、A_α として任意の A_β（ただし $\beta < \alpha$）と almost disjoint になるような集合を選んでくればよい。($\alpha < \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ より、$\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ は MAD ではないので必ず存在する)。この場合のみが仮定 $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ を必要とする。

それ以外 つまり、$(\forall\beta < \alpha)$ $G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta}$ が可算集合である場合である。このとき、cov(*cntble*) = $\mathfrak{c}$ より $|\bigcup_{\beta<\alpha} G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta}| < \mathfrak{c}$ なので、perfect tree T で以下を満たすようなものがとれるはずである $\cdots$ (*)。

$$(\forall\beta < \alpha)G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta} \cap [T] = \emptyset$$

ただし G_δ-閉包との共通部分が空集合になっても、ある β に対し f_α^{-1}"$A_\beta \cap [T]$ が無限集合になることはあり得る（共通部分が T の中で anti-chain となる場合である）。その場合でも、仮定から以下の lemma を示すことができる。

Lemma 2.10 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ を仮定する。$\alpha < \mathfrak{c}$ を 任意の順序数とする。$\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ を $(\forall\beta < \alpha)\, G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta} \in \mathsf{cntble}$ となる AD 集合族と仮定する。このとき $A \subseteq \omega$ で以下を満たすものをとることができる。

- A は任意の $\beta < \alpha$ に対し A_β と *almost disjoint* になり、
- $G_{g_\alpha^{-1}\text{"}A} \notin \mathsf{cntble}$ である。

そして $A_\alpha = A$ ととればよい。

proof of lemma 2.10 $(\forall\beta < \alpha)\, G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta} \in \mathsf{cntble}$ と仮定する。上記のように、$T \subseteq 2^{<\omega}$ で $\beta < \alpha$ に対し $[T] \cap G_{f_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta} = \emptyset$ となるものを選ぶことができる。ここでは $B \subseteq T$ で $|g_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta \cap B| < \omega$ となるものを構成していく。最終的には $A = f_\alpha\text{"}B$ とすればよい。

注意として、$\{g_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta \cap T : \beta < \alpha\}$ は T の中で off-branch 集合族となる。従って任意の $\beta < \alpha$ に対し、 nodes の集合 $T \setminus g_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta$ は T 内で open dense となる部分集合を持つ。もし open dense な部分集合を持たないと仮定すると、T の branch で $g_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta$ との共通部分が無限集合になるものを作れてしまうからである。ここで D_β をその open dense 集合とする。

次に $\mathbf{V}$ の elementary submodel を考える。ZFC のモデル $\mathbf{M}$ で、$\{A_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathbf{M}$ かつ $\mathbf{V}$ 内で $|\mathbf{M}| = |\alpha| < \mathfrak{c}$ を満たしているものをとる。このとき

Claim 2.11 $\mathbf{M}$ 上の *Cohen* 実数となる $c \in \mathbb{R} \cap \mathbf{V}$ が存在する。

proof of claim 2.11 $\mathbf{V} \models$ "$|\mathbf{M}| = |\alpha| < \mathfrak{c}$" であるため、$\mathbf{V}$ では そのBorel code が $\mathbf{M}$ 内で定義されているような meager 集合は、多くても $|\alpha|$ 個しか存在しないことになる。$\mathbf{V} \models$ "$\alpha < \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$" なので、ある実数 $c \in \mathbb{R} \cap \mathbf{V}$ で 上記のような meager 集合すべてに含まれないものが存在する。それが $\mathbf{M}$ 上 Cohen な実数になる。□

よく知られている結果として、 Cohen 実数が一個あれば、実は Cohen 実数の perfect 集合を得ることができる。つまり強制法 $\mathbb{P}$ として以下を考えてみると、

- $S \in \mathbb{P}$ iff $S \subseteq T$ は T の有限 subtree であって、全ての top nodes は同じ長さ ($(\exists n)$ もし $t \in S$ が maximal node なら $|t| = n$ であり、この n を S の height と呼ぶ),
- $S_0 \leq S_1$ iff $S_0 \supseteq S_1$ かつ S_0 は S_1 の end-extension である ($S_0 \cap 2^{<m} = S_1$ ただし m は S_1 の height である)。

G を $\mathbb{P}$-generic filter とし、$\mathbf{M}[G]$ 内で考える。明らかに $\mathbb{P}$ はサイズが可算の 強制法であるため、本質的に Cohen 強制法と同じになる。claim 2.11 より $G \in \mathbf{V}$ であり、 $\mathbf{M}[G] \subseteq \mathbf{V}$ だと考えてよいことになる。

Claim 2.12 *1.* $S^G = \bigcup\{S \in \mathbb{P} : S \in G\}$ は T の *perfect subtree* となる。

2. 任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し、 $r \in \mathbf{M}[G] \cap [S^G]$ ならば r は $\mathbf{M}$ 上の *Cohen* 実数となる。

proof of claim 2.12

1. 簡単な density argument から明らかである。任意の $S \in \mathbb{P}$ の任意の node $t \in S$ に対し、$S' \leq S$ で S' は t より上に splitting node を持つようなものをとることができる。

2. genericity から明らか。事実 任意の $f \in [S^G]$ から、$\mathbb{C}$-generic filter G_f を $G_f = \{p \in \mathbb{C} : p \subseteq f\}$ と構成することができる。□

Claim 2.13 $S^G \cap g_\alpha^{-1}{}''A_\beta$ は任意の $\beta < \alpha$ に対して有限集合となる。

proof of claim 2.13 この claim は density argument により証明する。任意の $S \in \mathbb{P}$ を選び、 m をその height とする。任意の $\beta < \alpha$ を選ぶ。$S_0 \leq S$ でその全ての maximal node $\tau \in S_0$ が, 任意の $\sigma \supseteq \tau$ が $\sigma \notin g_\alpha^{-1}{}''A_\beta$ となっているような tree を構成する。このとき明らかに $S_0 \Vdash$ "$|S^G \cap g_\alpha^{-1}{}''A_\beta| < \omega$ となり、証明は終わりである。

D_β は T 内 で open dense 集合であった。S の任意の top-node σ に対し、ある $\tau_\sigma \in D_\beta$ が存在して $\sigma \subseteq \tau_\sigma$ となっているはずである。D_α は open であるため、明らかに τ_σ より上には $g_\alpha^{-1}{}''A_\beta$ の元となるような nodes は存在しない。

だから

$$S_0 = \bigcup\{T_{\tau_\sigma} : \sigma \text{ は } S \text{ の top-node }\} \cap 2^{\leq n}$$

(ただし $n = \max\{|\tau_\sigma| : \sigma$ は S の top-node$\}$) とおけば十分である。□

従って $A_\alpha = g_\alpha{}''S^G$ とおけばよい。□

3 Sacks 反復強制法 による非可壊性

ここでは Sacks 強制法の有限回反復による非可壊性の特徴づけを紹介する。

3.1 2 段階反復の「幾何学的」見方

この節では Zapletal [7] が導入した反復強制法に対する「幾何学的」な枠組みを使って、 2 段階反復の「幾何学的」見方を紹介する。

さきほど $\mathbb{S}$ の元を実数直線上の集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ として考えた。「幾何学的」見方とは、$\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ の元を今度は $X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と実数平面上の集合として考えることである。つまり、$\mathbb{S}$ が $\mathbf{Borel}(\mathbb{R})/\mathit{cntble}$ と強制法として同値であったのと同じように、$\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ に対しても何らかの $\mathbb{R}^2$ 上のイデアル I があって $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ が $\mathbf{Borel}(\mathbb{R}^2)/I$ と強制法 として同値になるようにしたい。

そういうイデアルとして、*cntble* から下で定義する Fubini power をとって、cntble^2 という新しい $\mathbb{R}^2$ 上のイデアルを定義する。

Definition 3.1 (finite Fubini power of ideal) 任意のイデアル $I \subseteq \mathcal{P}(2^\omega)$ に対し、I^2 が $(2^\omega)^2$ での *the Fubini power of* I であるとは

$$X \in (I^2)^+ \Leftrightarrow \{x \in 2^\omega : X_x \in I^+\} \in I^+$$

となることである。ただし $X_x = \{y : (x,y) \in X\}$ であり、X の x 切片と呼ぶ。また $I^+ = \{x : x \notin I\}$ とし、*I-positive sets* と呼ぶ。

解析学で多変数の Lebesgue 積分をするとき Fubini の定理を使うが、この Fubini power はそれを一般のイデアルに拡張したものである。

$$\mu(E) = \int_X \mu_2(E_x) d\mu_1(x)$$

example 3.2 ここで $\mathbf{Borel}(\mathbb{R}^2)/\mathit{cntble}^{\,2}$ を考える。任意の *Borel* 集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ について、

$$X \in \mathbf{Borel}(\mathbb{R}^2)/\mathit{cntble}^{\,2} \Leftrightarrow \{x \in 2^\omega : X \text{ の } x \text{ 切片が非可算集合}\} \text{ は非可算集合}$$

となることになる。

また Sacks 強制法の 2 段階反復 $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ は、$\mathbf{Borel}(\mathbb{R}^2)/\mathit{cntble}^{\,2}$ と強制法 として同値 になることがわかるので、これからは両者を同一視する。任意の $p' = \langle p, \dot{p} \rangle \in \mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ を考え、この p' に対応する $\mathbf{Borel}(\mathbb{R}^2)/\mathit{cntble}^{\,2}$ の元を P と書くことにする。

- $p \in \mathbb{S}$ に対応するのは $\{x \in \mathbb{R} : P_x \notin \mathit{cntble}\} \subseteq \mathbb{R}$、
- x を $\mathbb{S}$-generic 実数としたとき、$\dot{p}[x]$ に対応するのは P_x(P の x 切片)

となる。

Fact 3.3 *1.* $\mathrm{cov}(\mathit{cntble}^{\,2}) = \mathrm{cov}(\mathit{cntble}) = \mathfrak{c}$,

2. $\mathrm{cov}(\mathcal{M}^2) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

ここで single step 強制法の時と同じように、以下を示すことができる。n を任意の自然数とする。

Theorem 3.4 *$\vec{r}_{gen}$ を $\mathbb{S}_n$-generic 実数 とする。また B を ground model 上でコードされた Borel set in $(2^\omega)^n$ とする。このとき*

- *$B \in \mathit{cntble}^{\,n}$ (つまり $\Vdash$ "$\vec{r}_{gen} \notin \dot{B}$") となるか、*
- *または $B \notin \mathit{cntble}^{\,n}$ (この場合 $B \Vdash$ "$\vec{r}_{gen} \in B$") となるかどちらかである。*

3.2 $\mathbb{R}^2$ 上での fusion sequence

前節で導入した $\mathbf{Borel}(\mathbb{R}^2)/\mathit{cntble}^{\,2}$ と、通常の name を使った反復強制法 $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ はどう対応付けられるのだろうか。特に、Sacks 強制法と言えば、 fusion sequence を定義しないわけには行かない。ここでは $\mathbf{Borel}(\mathbb{R}^2)/\mathit{cntble}^{\,2}$ で fusion sequence に対応するものを定義することが目的である。

任意の $p' = \langle p, \dot{p} \rangle \in \mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ を考え、この p' に対応する $\mathbf{Borel}(\mathbb{R}^2)/\mathit{cntble}^{\,2}$ の元を P と書くことにする。fusion argument を $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ で考える際、$\sigma, \tau \in 2^{<\omega}$ が p' の node である、ということを以下のように考えた。

Definition 3.5 任意の $\sigma, \tau \in 2^{<\omega}$ に対し、$\langle \sigma, \tau \rangle \in p'$ は

$$\sigma \in p \land p_\sigma \Vdash \text{“}\tau \in \dot{p}\text{”}$$

これに対応するのは

$$P \cap ([\sigma] \times [\tau]) \notin \mathit{cntble}^2$$

となることである。それぞれの x 座標、y 座標で perfect 集合を perfect tree で考えれば、$p, q \in \mathbb{S}$ について $p \leq_n q$ と、$p', q' \in \mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ について $p' \leq_{F,n} q'$(ただし $F = \{0,1\}$) を定義することができる。したがって $\mathbb{S}$-非可壊性の特徴付けの証明でのように、$\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ の元の fusion sequence があったとき、それに対応する $A \subseteq 2^{<\omega} \times 2^{<\omega}$ で、その G_δ 閉包の G_A が fusion limit にあたるものを作ることができる。

そのため、まずいくつかの表記法を導入する。まず2次元における G_δ 閉包を考える。

Definition 3.6 (G_δ 閉包 in $\mathbb{R}^2$) 任意の $A \subseteq 2^{<\omega} \times 2^{<\omega}$ にたいし、 A の G_δ 閉包 を

$$G_A = \{(f,g) \in (2^\omega)^2 : (\exists^\infty n \in \omega)(\exists (\sigma, \tau) \in A) f|_n = \sigma \land g|_n = \tau\}$$

と定義する。

次に、fusion sequence に対応するものを定義する。

Definition 3.7 *1.* $A \subseteq (2^{<\omega})^2$ が *2D-fusion sequence (2dimensional fusion sequence) indexed by* I_A であるとは、

- $A = \{\sigma_u \in (2^{<\omega})^2 : u \in I_A\}$ であり、また $I_A \subseteq (2^{<\omega})^2$、
- $u(0) \subset v(0)$ かつ $u(1) \subset v(1)$ *iff* $\sigma_u(0) \subset \sigma_v(0)$ かつ $\sigma_u(1) \subset \sigma_v(1)$、
- 任意の $l \in 2$ がもし $u(l) \perp v(l)$ ならば $\sigma_u(l) \perp \sigma_v(l)$ となる、
- もし $u(0) = v(0)$ であれば $\sigma_u(0) = \sigma_v(0)$、

であることをいう。

2. $A \subseteq (2^{<\omega})^2$ が *2D-fusion sequence* とは、 *the index set* I_A *of* A が $G_{I_A} = (2^{<\omega})^2$ であるときをいう。

$G_{I_A} \notin \mathit{cntble}^2$ であれば明らかに $G_A \notin \mathit{cntble}^2$ である。このとき

Lemma 3.8 任意の *2D-fusion sequence* A は

$$G_A \in \mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$$

を満たす。

次に “consistency”を定義する。

Definition 3.9 任意の $B \in \mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ と任意の *2D-fusion sequence* $A \subseteq (2^{<\omega})^2$ *indexed by* I_A に

1. A が B と *consistent* であるとは、任意の $u \in I_A$ に対して、

$$B \cap ([\sigma_u(0)] \times [\sigma_u(1)]) \notin \mathsf{cntble}^2,$$

となることである。

2. $A|_n$ が B と *consistent* であるとは、任意の $|u| < n$ となる $u \in I_A$ に対して

$$B \cap ([\sigma_u(0)] \times [\sigma_u(1)]) \notin \mathsf{cntble}^2.$$

となることである。

上記を使えば、

Lemma 3.10 $B \in \mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$, $\dot{f}$ を *function* の $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$*-name* で、$B \Vdash$ "$\dot{C} \in \omega^\omega$" をみたすと仮定する。このとき *2D-fusion sequence* A で、B と *consistent* であり、任意の $u \in 2^{<\omega}$ に対し、$n = |u(0)|$ を満たすようなある $m_u \in \omega$ が存在し

$$B \cap ([\sigma_u(0)] \times [\sigma_u(1)]) \Vdash \text{“}\dot{f}(n) = m_u\text{”}$$

が成立する。

この証明も、ふつうの fusion argument により示せる。

3.3 $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$-非可壊性の特徴付け

前節の定義を使って 有限回の 反復強制法 による非可壊性 を ground model 中で特徴づけることができる。

Theorem 3.11 以下は同値となる。任意の *MAD* 集合族 $\mathcal{A}$ に対し、

(1) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$-非可壊

(2) $\forall A \subseteq (2^{<\omega})^2$ *such that* $G_A \notin \mathsf{cntble}^2$, $\forall f : A \to \omega$, $\exists B \in \mathcal{A}$ *such that* $G_{f^{-1}\text{''}B} \notin \mathsf{cntble}^2$.

(3) $\forall A \subseteq (2^{<\omega})^2$ *such that* $G_A \notin \mathsf{cntble}^2$, $\forall f : A \to \omega$ *one-to-one*, $\exists B \in \mathcal{A}$ *such that* $G_{f^{-1}\text{''}B} \notin \mathsf{cntble}^2$.

(4) $\forall f : (2^{<\omega})^2 \to \omega$ *one-to-one*, $\exists B \in \mathcal{A}$ *such that* $G_{f^{-1}\text{''}B} \notin \mathsf{cntble}^2$.

先ほど紹介した single step の $\mathbb{S}$-非可壊性の特徴付けと比べると、$\mathbb{R}$ 上のイデアル cntble を、$\mathbb{R}^2$ 上のイデアル cntble^2 に書き換えたものになる。

proof (1) から (2) を示す方法は、$\mathbb{S}$-非可壊性の特徴付けの時とほぼ同じである。(2) が成り立たないと仮定する。$A \subseteq (2^{<\omega})^2$ を $G_A \notin \mathsf{cntble}^2$ かつ $\exists g : A \to \omega$ function, $\forall B \in \mathcal{A}$, $G_{g^{-1}\text{''}B} \in \mathsf{cntble}^2$ となる集合だとする。このとき $G_A \in \mathbb{S}*\dot{\mathbb{S}}$ なので $G_A \in \mathbf{G}$ となる generic filter $\mathbf{G}$ をとれば、その

上で$\mathbb{S}$-非可壊性の時と同じく$\mathcal{A}$の maximality を壊すような集合を新しく定義できる。Theorem 3.4 より、$G_A \Vdash$ "$\vec{r}_{gen} \in G_A$" かつ 任意の$B \in \mathcal{A}$に対し$\vec{r}_{gen} \notin G_{g^{-1}"B}$となる。その generic 実数 を $\vec{r}_{gen} = \langle r_0, r_1 \rangle \in G_A$ とおく。この generic 実数 を使い、新しい集合 $D \in \mathcal{P}(\omega)$ を generic extension 内で以下のように定義する。

$$D = \{m \in \omega : (\exists n)\ g(r_0|_n, r_1|_n) = m\}$$

明らかにこれは任意の $B \in \mathcal{A}$ と almost disjoint になる。

(2) から (3) と (2) から (4) は明らか。

(3) から (1) も $\mathbb{S}$-非可壊性の特徴付けの時と同じく、fusion argument（ただし今度は$\mathbb{R}^2$内で）により示せる。(3) を仮定し、 また $P \in \mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ と $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$-name の $\dot{X}$ で $P \Vdash$ "$\dot{X} \in [\omega]^\omega$" となるものが存在するとする。このとき $P' \leq P$ が存在して、ある $B \in \mathcal{A}$ に対し

$$P' \Vdash \text{"}|B \cap \dot{X}| = \aleph_0\text{"}$$

つまり $\mathcal{A}$ が依然として MAD であることを示せばよい。

このとき、$\mathbb{R}^2$ 上での標準的な fusion argument より、以下の lemma を示すことができる。

Lemma 3.12 (Main lemma for $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$) *$P$ と consistent な 2D-fusion sequence A、$f : A \to \omega$ one-to-one で以下を満たすようなものを見つけることができる。*

$$(\forall \langle \sigma, \tau \rangle \in A) \quad G_A \cap ([\sigma] \times [\tau]) \Vdash \text{"}f(\sigma, \tau) \in \dot{X}\text{"}$$

ここで (3) より、ある $B \in \mathcal{A}$ が存在して $G_{f^{-1}"B} \notin cntble$ となる (もちろん $G_{f^{-1}"B} \leq G_A \leq [T]$)。このとき $G_{f^{-1}"B}$ は $\dot{X}$ の値を決め、さらに

$$G_{f^{-1}"B} \Vdash \text{"}|B \cap \dot{X}| = \aleph_0\text{"}$$

となる。

(4) から (3) は、 $cntble^2$ が homogeneous であることによる。□

proof of lemma 3.12 $P \Vdash$ "$\dot{X} \in [\omega]^\omega$" より、標準的な fusion argument により、$\dot{C}$ の値を決めていく fusion sequence

$$P = (p_0, \dot{p}_0) \geq_0 (p_1, \dot{p}_1) \geq_1 (p_2, \dot{p}_2) \geq_2 \cdots$$

を選ぶことができる。

具体的には、各nにおいて、$(p_n, \dot{p}_n)$を決めるのは$(p_{n-1}, \dot{p}_{n-1})$のn-th. splitting node $\{(\sigma_i^{n-1}, \tau_i^{n-1})$ $i < 2^n\}$ を決めていくことである。つまり、任意の$i < 2^n$ において、それぞれ

- $\sigma_i^{n-1} \in p_{n-1}$, さらに $\{\sigma_i^n : i < 2^n\}$ が p_n の n-th. splitting node となる,
- $(p_{n-1})_{\sigma_i^{n-1}} \Vdash$ "$\tau_i^{n-1} \in \dot{p}_{n-1}$", さらに $(p_n)_{\sigma_i^n} \Vdash$ "τ_i^n が $\dot{p}_n$ の n-th. splitting node" ,
- $((p_{n-1})_{\sigma_i^n}, (\dot{p}_{n-1})_{\tau_i^n}) \Vdash$ "$m_i^n \in \dot{X}$", $((p_{n-1})_{\sigma_i^n}, (\dot{p}_{n-1})_{\tau_i^n})$ が $\dot{X}$ の n 番目の値が m_i^n であると実際に決めるものである。

(ただし m^n

$i < 2^n\}$ とおき、また新しい function $f : A \to \omega$ として

$$f((\sigma_i^n, \tau_i^n)) = m_i^n$$

を定義する。こうすると以下のように書ける。

- $G_A = \bigcap_{n \in \omega} P_n$(fusion limit は $G_A \in \mathbb{S}^2$),
- 任意の $\sigma \in A$ に対し、$(G_A) \cap ([\sigma(0)] \times [\sigma(1)]) \Vdash$ "$f(\sigma) \in \dot{X}$"

さて、実際に前節の定義にのっとり構成をする。P perfect 集合とおく。$u \in (2^{<\omega})^2$ の長さによる 帰納法 により、以下を構成していく。

- P と consistent であるような 2D-fusion sequence $A = \{\langle\sigma_u(0), \sigma_u(1)\rangle : u \in (2^{<\omega})^2\}$,
- $f : A \to \omega$ one-to-one そして
- $[\bigcap_{n \in \omega} P_n] = G_A$ となる $\langle P_n \in \mathbb{S} / \dot{\mathbb{S}} : n \in \omega\rangle$ を、

<u>**stage** $n < \omega$</u> 帰納法の仮定として以下がすでに決まっていると仮定する。

- $P_{n-1} \leq P$,
- $\{\langle\sigma_u(0), \sigma_u(1)\rangle : u \in (2^{n-1})^2\}$ (ただし P_{n-1} と consistent である)
- 任意の $u \in (2^{n-1})^2$ に対し one-to-one に f の値 $f(\langle\sigma_u(0), \sigma_u(1)\rangle) = m_u$ がすでに決まっている

$(2^{n-1})^2$ を辞書的順序で並べる。つまり、2^{n-1} の enumeration $\{s_i : i < 2^{n-1}\}$ をもとに x 座標から先に並べ、$\langle u_j^i : u_j^i(0) = s_i \wedge j < 2^{n-1}\rangle : i < 2^{n-1} \wedge |u_j(0)| = |u_j(1)| = n-1\rangle$ と index をつける。

ここでは

- $P_n \leq P$ と
- $\langle(\sigma_v(0), \sigma_v(1)), m_v\rangle : v \in (2^n)^2\rangle$ を

(ただし $P_n \cap ([\sigma_v(0)] \times [\sigma_v(1)]) \Vdash$ "$m_v \in \dot{X}$" となるようなもの) を $i < 2^{n-1}$ steps の 帰納法 により構成していく。

step 0 $P^0 = P_{n-1}$ とおく。

step $i < 2^{n-1}$ 帰納法の仮定として、ここでは以下がすでに決まっているものとする。

- P^{i-1},

- $\langle\langle(\sigma_v(0),\sigma_v(1)), m_v\rangle : v \in A^j\rangle$ （ただし P^{i-1} と consistent であり、また $A^i = \{u \in (2^n)^2 : (\exists k < i) u(0)|_{n-1} = s_k\}$ (これは明らかに有限集合)
- $f(\sigma_u) = m_u$ だとする）

仮定より、任意の $j < 2^{n-1}$ に対し $\langle\sigma_{u^i_j}(0), \sigma_{u^i_j}(1)\rangle$ は以下を満たす。

$$P^{i-1} \cap ([\sigma_{u^i_j}(0)] \times [\sigma_{u^i_j}(1)]) \Vdash \text{“}\dot{X} \in [\omega]^\omega$$

ここで以下を満たすような $s_0, s_1 \in 2^{<\omega}$ を見つけることができる。

1. $(\forall j < 2^{n-1})\, \sigma_{u^i_j}(0) \subseteq s_0 \cap s_1$,
2. $s_0 \perp s_1$,
3. $(\forall l \in 2)(\forall j < 2^{n-1})\, P^{i-1} \cap ([s_l] \times [\sigma_{u^i_j}(1)] \notin \mathit{cntble}^{\,2}$.

条件 3 によって、任意の $j < 2^{n-1}$ に対し $P^{i-1} \cap ([s_l] \times [\sigma_{u^i_j}(1)]) \Vdash \text{“}\dot{X} \in [\omega]^\omega$ であることが示せる。

従って $P^i \leq P^{i-1}$, $s'_l \supseteq s_l$ と $t^l_0, t^l_1 \supseteq \sigma_{u^i_j}(1)$ で、以下の条件を満たすものを見つけることができる。任意の $l \in 2$ に対し

- $P^i \cap ([s'_l] \times [t^l_k]) \Vdash \text{“}m^l_k \in \dot{X}$ ただし任意の $u \in A^i$ に対し $m^l_k > m_u$,
- $m^0_0 < m^0_1 < m^1_0 < m^1_1$,
- $(\forall u \in (2^{n-1})^2)\ ([\sigma_u(0)] \times [\sigma_u(1)]) \cap P^i \notin \mathit{cntble}$.

ここで以下のようにおく。

- $\sigma_{u^i_j{}^\frown\langle l,k\rangle} = \langle s'_l, t^l_k\rangle$,
- $f(\sigma_{u^i_j{}^\frown\langle l,k\rangle}) = m^l_k$,

step 2^{n-1} ここでは $P_n = \bigcap_{i<2^{n-1}} P^i$ とおく。

stage ω $A = \{\sigma_u : u \in \bigcup_{n\in\omega}(2^n)^2\}$ とおく。今までの構成から、 以下を満たしていることがわかる。

1. $f : A \to \omega$ one-to-one,
2. $G_A \in \mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$ $(G_{\bigcup_{n\in\omega}(2^n)^2} = (2^\omega)^2$ より明らか)。□

同様に、任意の $n \in \omega$ に対しても同じような定理が成立する。

Corollary 3.13 以下は同値となる。

(1) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{S}_n$-非可壊

(2) $\forall A \subseteq (2^{<\omega})^n$ *such that* $G_A \notin \mathit{cntble}^{\,n}$, $\forall f : A \to \omega$, $\exists B \in \mathcal{A}$ *such that* $G_{f^{-1}\text{''}B} \notin \mathit{cntble}^{\,n}$.

(3) $\forall A \subseteq (2^{<\omega})^n$ *such that* $G_A \notin \mathit{cntble}^{\,n}$, $\forall f : A \to \omega$ *one-to-one*, $\exists B \in \mathcal{A}$ *such that* $G_{f^{-1}\text{''}B} \notin \mathit{cntble}^{\,n}$.

(4) $\forall f : (2^{<\omega})^n \to \omega$ *one-to-one*, $\exists B \in \mathcal{A}$ *such that* $G_{f^{-1}\text{''}B} \notin \mathit{cntble}^{\,n}$.

4 $\mathbb{S}$-非可壊で $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$-可壊 な MAD 集合族の構成

この節ではサイズが $\mathfrak{c}$ の $\mathbb{S}$-非可壊 で $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$-可壊でもある MAD 集合族 を構成する。

また、同時にここでの構成法をつかえば、有限ステップの Sacks 反復強制法 は階層をなす（任意の自然数 n に対し、$\mathbb{S}_n$-非可壊だが $\mathbb{S}_{n+1}$-可壊な MAD 集合族も存在する）ことも示せる。

Theorem 4.1 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ を仮定する。*MAD* 集合族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ で、以下を満たすようなものを構成することができる。

1. $\mathcal{A}$ は $\mathbb{S}$-非可壊であり、

2. $\mathcal{A}$ は $\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$-可壊でもある。

proof 任意の bijection $f : 2^{<\omega} \times 2^{<\omega} \to \omega$ を選ぶ。$2^{<\omega} \to \omega$ の one-to-one functions 全体の enumeration を $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ とする。

ここではステップが $\mathfrak{c}$ の帰納法により MAD 集合族 $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ で以下を満たすものを構成していく。

ステップ $\alpha < \mathfrak{c}$ の構成は以下の通り。まず帰納法の仮定として、 a.d. 集合族 $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ で以下を満たすものが存在していると仮定する。つまり任意の $\gamma < \alpha$ に対し、

1. もし $(\forall \beta < \gamma) G_{g_\gamma^{-1}{}''A_\beta} \in \mathit{cntble}$ ならば $G_{g_\gamma^{-1}{}''A_\gamma} \notin \mathit{cntble}$ 、
2. (a) $(\exists x \in 2^\omega) G_{f^{-1}{}''A_\gamma} \subseteq \{x\} \times 2^\omega$
   (b) または $(\forall x \in 2^\omega) |(G_{f^{-1}{}''A_\gamma})_x| \leq 1$ となる。

ということである。このとき g_α に対して下の lemma を証明することができる。

Lemma 4.2 以下を満たす A が存在する。

1. もし $(\forall \beta < \alpha) G_{g_\alpha^{-1}{}''A_\beta} \in \mathit{cntble}$ ならば $G_{g_\alpha^{-1}{}''A} \notin \mathit{cntble}$ 、

2. *(a)* $(\exists x \in 2^\omega) G_{f^{-1}{}''A} \subseteq \{x\} \times 2^\omega$ となるか、
(b) または $(\forall x \in 2^\omega) |(G_{f^{-1}{}''A})_x| \leq 1$ となる。

1 より $\mathbb{S}$-非可壊なのは明らか。2 より、(a)(b) どちらであろうと $G_{f^{-1}{}''A_\alpha} \in \mathit{cntble}$ [2] となるため、$\mathbb{S} * \dot{\mathbb{S}}$-可壊となる。

もちろんこれでは $\{A_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{A\}$ が almost disjoint になるかはわからない。が、theorem 2.9 の証明の時と同じく、仮定より

Lemma 4.3 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ を仮定する。以下を満たす無限集合 $B \subseteq A$ が存在する。

1. B は任意の A_β と *almost disjoint* であり、

2. $G_{f^{-1}{}''B}$ は依然として *perfect* 集合である。

従って $A_\alpha = B$ とおけば、A_α と A_β が almost disjoint となることがわかる。

さらに、(2)(a),(2)(b) どちらの形でも、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 全体を cover するには $\mathfrak{c}$ 個が必要であり、この構成は $\mathfrak{c}$ 回続けられることになる。□

proof of lemma 4.2 ここでは A を二つの場合に分けて構成していく。

case1: $(\exists\beta<\alpha)G_{g_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta}$ **が非可算集合** 帰納法 の仮定と $\alpha<\mathfrak{c}$ より、

$$(\exists x\in 2^\omega)(\forall\beta<\alpha)|G_{f^{-1}\text{"}A_\beta}\cap(\{x\}\times 2^\omega)|\leq 1$$

となる。上式のような $x\in 2^\omega$ と、perfect tree $T\subseteq 2^{<\omega}$ で

- $[T]\subseteq\{x\}\times 2^\omega$,
- $(\forall\beta<\alpha)[T]\cap G_{f^{-1}\text{"}A_\beta}=\emptyset$.

となるものを選ぶ。

cov(*cntble* ^{2}) $=\mathfrak{c}$ より、上のような $\{x\}\times 2^\omega$ で $\mathbb{R}$ を cover するには $\mathfrak{c}$ 個の集合が必要である。$\alpha<\mathfrak{c}$ より、cardinal invariant に関する仮説なしで上のような tree T をとることができる。

最後に $A=f\text{"}T$ とおけばよい。

case2: それ以外 i.e. $(\forall\beta<\alpha)G_{g_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta}\in$ *cntble* .

このとき同様に、perfect tree $T\subseteq 2^{<\omega}$ で、任意の $\beta<\alpha$ に対し $[T]\cap G_{g_\alpha^{-1}\text{"}A_\beta}=\emptyset$ となるものを選ぶことができる。

$B=g_\alpha\text{"}T$ とおく。もし $G_{f^{-1}\text{"}B}$ が前の条件 2 を満たせば、$A=B$ とおいて終わりである。

どちらでもないと仮定する。ここで $f^{-1}\circ g_\alpha$ は T 上で one-to-one だと仮定してよい。$S=f^{-1}\circ g_\alpha\text{"}T$ と書くことにする。

ここでは 部分集合 $A\subseteq T$ と、subtree $T^*\leq T$ で以下を満たすものを T 上の fusion argument により構成していく。

1. $G_A=[T^*]\subseteq[T]$ は perfect subset であり、
2. $(\forall x\in 2^\omega)|(G_{f^{-1}\circ g_\alpha\text{"}A_\alpha})_x|\leq 1$ である。

T_1 を構成するため、以下の二つに場合分けする。

<u>**subcase1:**</u> **x 軸方向で incompatible になるような t が unbounded に存在する場合** i.e. $(\exists\bar{t})(\forall t'\in T_{\bar{t}})(\exists t_0,t_1\in T)$ such that

- $t_0\perp t_1\wedge t_0\cap t_1\supseteq t'$、
- かつ <u>s_0 と s_1 が incompatible</u> ただし $(s_0,s_0')=f^{-1}\circ g_\alpha(t_0)$ かつ $(s_1,s_1')=f^{-1}\circ g_\alpha(t_1)$.

この場合、部分集合 $A \subset T$ で以下を満たすものを、T 上の fusion argument により構成する。

- G_A は perfect 集合であり、
- $(\forall x \in 2^\omega)|(G_{f^{-1}\circ g_\alpha "A})_x| \leq 1$ となる。

具体的には、step ω の帰納法により構成する。step n においては $\{(s_i^n, s_i'^n) : i < 2^n\}$ があるとき、各 s_i^n の上に $(s_{2i}^{n+1}, s_{2i}'^{n+1})$ と $(s_{2i+1}^{n+1}, s_{2i+1}'^{n+1})$ をそれぞれの x 座標 s_{2i}^{n+1} と s_{2i+1}^{n+1} が、すでに定義したものとも、お互いにも incompatible になるように選んでいく。この subcase1 の仮定より選んでいくことが可能である。

unbounded にそのような t は存在するので、この step は無限に続けていくことができ、x 軸方向に重ならないようにとっていけば、最終的な G_δ 閉包は $(\forall x \in 2^\omega)|(G_{f^{-1}\circ g_\alpha "A})_x| \leq 1$ となるはずである。

the 1st level 仮定にあるような $\bar{t} \in T$ を選ぶ。そして以下のようにおく。

- $A_0 = \{\bar{t}\}$,
- $B_0 = \{f^{-1} \circ g_\alpha(\bar{t})\}$.

the $n+1$th level 帰納法の仮定より以下を満たすような $\langle A_i : i \leq n \rangle$ and $\langle B_i : i \leq n \rangle$ が存在する。

任意の $i \leq n$ に対し、

- $A_i = \{t_j^i : j < 2^i\} \subseteq T$ は T 内の antichain であり、
- $B_i = \{(s_j^i, s_j'^i) : j < 2^i\}$ は S 内の antichain であり、
- 任意の $j < 2^i$ に対し $(s_j^i, s_j'^i) = f^{-1} \circ g_\alpha(t_j^i)$ となる

これから $j < 2^n$ 上での帰納法 により、以下の二つ

- $\{t_i^{n+1} : i < 2^{n+1}\}$,
- $\{(s_i^{n+1}, s_i'^{n+1}) : i < 2^{n+1}\}$

を、fusion argument によく似たやり方で、以下の条件を満たすように決めていく。

1. $t_i^n \subseteq t_{2i}^{n+1} \cap t_{2i+1}^{n+1}$ かつ $t_{2i}^{n+1} \perp t_{2i+1}^{n+1}$,
2. $s_i^{n+1} \subseteq s_{2i}^{n+1} \cap s_{2i+1}^{n+1}$ かつ $s_{2i}^{n+1} \perp s_{2i+1}^{n+1}$,
3. $s_i'^{n+1} \subseteq s_{2i}'^{n+1} \cap s_{2i+1}'^{n+1}$.

<u>step $j < 2^n$</u> subcase 1 の仮定から、x 軸方向で incompatible になるような t が unbounded に存在するので、お互いが x 軸方向で incompatible になる $t_0, t_1 \in T$ を見つけることができる。

- $\underline{t_0 \perp t_1}$ かつ $t_0 \cap t_1 \supseteq t_j^n$,

- $\underline{s_0 \perp s_1}$ ただし $(s_0, s'_0) = f^{-1} \circ g_\alpha(t_0)$ かつ $(s_1, s'_1) = f^{-1} \circ g_\alpha(t_1)$,
- $(\forall k < 2^j) s_0 \perp s_k^{n+1}$ かつ $s_1 \perp s_k^{n+1}$.

そこで以下のようにおけばよい。

- $t_{2j}^{n+1} = t_0$ かつ $(s_{2i}^{n+1}, s_{2i}^{\prime n+1}) = (s_0, s'_0)$,
- $t_{2j+1}^{n+1} = t_1$ かつ $(s_{2i+1}^{n+1}, s_{2i+1}^{\prime n+1}) = (s_1, s'_1)$.

x 軸方向に重ならないように $(s_i^{n+1}, s_i^{\prime n+1})$ をとっていけば、最終的な G_δ 閉包は

$$(\forall x \in 2^\omega) |(G_{f^{-1} \circ g_\alpha " A})_x| \leq 1$$

となるはずである。

step 2^n 以下のようにおく。

- $A_{n+1} = \{t_{2j}^{n+1}, t_{2j+1}^{n+1} : j < 2^n\}$,
- $B_{n+1} = \{(s_{2j}^{n+1}, s_{2j}^{\prime n+1}), (s_{2j+1}^{n+1}, s_{2j+1}^{\prime n+1}) : j < 2^n\}$,
- $T_{n+1} = \bigcup_{t \in A_{n+1}} T_t$.

the ω level 以下のようにおく。

- $A^\infty = \bigcup_{n \in \omega} A_n$,
- $B^\infty = \bigcup_{n \in \omega} B_n$,
- $T^* = \bigcap_{n \in \omega} T_n$.

そうすると

- $[T^*] = G_{A^\infty}$, となり、また T^* は fusion argument より perfect tree になる。したがって G_A 非可算となる。
- $B^\infty = f^{-1} \circ g_\alpha " A^\infty$ and G_{B^∞} は可算もしくは空集合になる。

このとき明らかに

$$(\forall x \in 2^\omega) |(G_{B^\infty})_x| \leq 1$$

となる。だから $A = A^\infty$ とおけばよい。

subcase2: **x 軸方向で incompatible となるような t' が bounded にしか存在しない場合** i.e. $(\forall t \in A)(\exists \bar{t} \in T_t)(\forall t_0, t_1 \in T)$

もし $t_0 \perp t_1 \wedge t_0 \cap t_1 \supseteq \bar{t}$ ならば $\underline{s_0 \text{ と } s_1 \text{ は compatible}}$
ただし $(s_0, s'_0) = f^{-1} \circ g_\alpha(t_0)$ and $(s_1, s'_1) = f^{-1} \circ g_\alpha(t_1)$.

このときは subcase1 と同じように inductive に、ただし今度は y 軸方向に構成していけば、$(\exists x \in 2^\omega) G_{f^{-1} \circ g_\alpha " A} \subseteq \{x\} \times 2^\omega$ となる $A \subseteq T$ をとってくることができる。

proof of lemma 4.3 前出のように $\mathrm{cov}(\mathcal{M}^2) = \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ であることを注意しておく。$\mathbb{R}^2$ で仮定 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}^2) = \mathfrak{c}$ より lemma 2.10 と同様に求めることができる。□

また、上の構成法を応用すれば

Corollary 4.4 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ を仮定する。任意の $n \in \omega$ に対し、*MAD* 集合族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ で以下を満たすようなを構成することができる。

1. $\mathcal{A}$ は $\mathbb{S}_n$-非可壊であり、
2. また $\mathcal{A}$ は $\mathbb{S}_{n+1}$-*destructible* でもある。

参考文献

[1] Andreas Blass. "Combinatorial cardinal characteristics of the continuum", to appear in "Handbook of set theory"

[2] Jörg Brendle. "The combinatorial structure of the real line" Lecture note, 1998

[3] Jörg Brendle and Shunsuke Yatabe. "Forcing indestructibility of MAD families" preprint

[4] Michael Hrušák. "Mad families and the rationals" Comment. Math. Univ. Carolin. 42 (2001), no.2, pp345-352

[5] Vladimir Kanovei. "On non-well founded iterations of the perfect set forcing" JSL vol.64 (1999), no.2, pp551-574

[6] Kenneth Kunen. "Set theory" North-Holland (1980)

[7] Jindřich Zapletal. "Cardinal invariants and descriptive set theory" preprint

Shunsuke Yatabe
The Graduate School of Science and Technology, Kobe university
Rokko-dai, Nada, Kobe 657-8501, Japan
E-mail address: yatabe@kobe.email.ne.jp