

TDGL 方程式を用いた第 2 種超伝導体における 磁束量子のフローダイナミクス

宮本 秀一 (Shuuichi MIYAMOTO)

引原 隆士 (Takashi HIKIHARA)

京都大学大学院 工学研究科 電気工学専攻

Department of Electrical Engineering

Kyoto University

1 はじめに

磁気浮上技術は非接触に物体を支持することができるため、摩擦の問題が少なく、様々な分野に応用されている。その中でも第 2 種超伝導体の磁束ピン止め力を利用した磁気浮上系は、複雑な制御回路を用いずに永久磁石を浮上支持させることができ、電力貯蔵用フライホイールや磁気浮上搬送システムなどへの応用が期待されている [1].

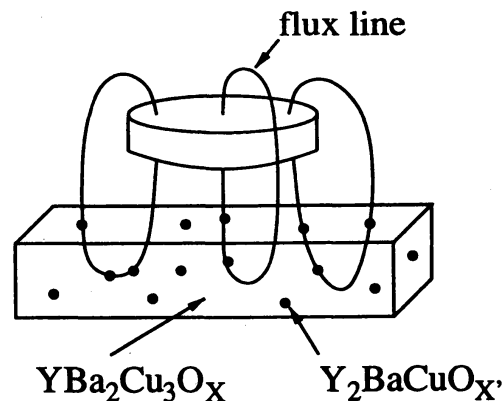


図 1: 磁束ピン止め力を利用した磁気浮上系

しかし図 1 に示すように磁束ピン止め力を用いて永久磁石を浮上支持させる場合、永久磁石の着磁むらや上下運動により超伝導体表面の磁場が変動し、損失やフラックス・クリープが生じて浮上力が減少することが知られている [2][3][4]. これは、ピン止めされた磁束の挙動により定性的には説明されているが、ミクロな視点からのピン止め磁気浮上系の計算例は少なく、このような浮上力の減少を抑える方法も未解明のままとなっている。

本報告では、第 2 種超伝導体における磁束分布が Time-Dependent Ginzburg-Landau 方程式 (TDGL 方程式) に従うとし、磁気浮上系のモデル化を行っている。さらに得られた数式モデルを用い、磁束量子の挙動を数値計算によって検討した結果について述べる。

2 TDGL方程式を用いた磁気浮上系のモデル化

まず、第2種超伝導体を用いた磁気浮上系を図2の2次元モデルで近似する。横 L_x 、縦 L_y の長さをもつ超伝導体に対して外部磁場 H が垂直にかかるものとする。このような2次元モデルによる近似は、超伝導体が薄膜の場合に対応すると考えられる。

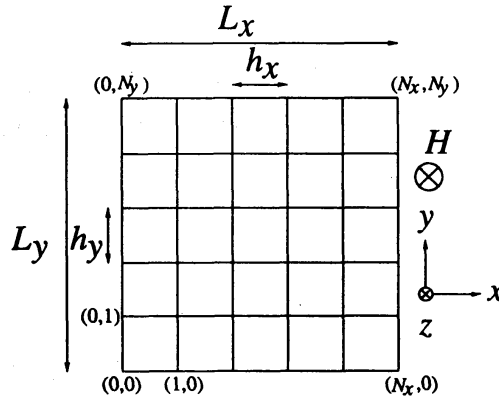


図 2: 系の2次元モデル

このモデルに対し、TDGL方程式を適用する。TDGL方程式は超伝導体内の磁束と外部磁場との関係を表し、磁気ベクトルポテンシャルを A 、電気スカラーポテンシャルを ϕ 、複素オーダーパラメータを ψ 、電流密度を J とすると、次式で表される [5].

$$\frac{\hbar^2}{2m_s D} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie_s}{\hbar} \phi \right) \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m_s} \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e_s}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \text{rot}^2 \mathbf{A} = -\sigma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) + \left[\frac{e_s \hbar}{2m_s i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e_s^2}{m_s c} |\psi|^2 \mathbf{A} \right] \quad (2)$$

ただし、 e_s 、 m_s はそれぞれ超伝導電子の電荷と質量、 α 、 β は温度に依存する定数、 σ と D は常伝導状態での導電率と拡散係数、 c は光速、 ψ^* は ψ の複素共役を表す。また、複素オーダーパラメータ ψ は超伝導電子の波動関数であり、 $|\psi|^2$ が超伝導電子の密度を与える。

また境界条件は、磁場の接線成分が連続であること、電流が超伝導体表面を横切らないことを考慮し、境界の単位法線ベクトル \mathbf{n} を用いて次式で表す。

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} &= \mathbf{H} \times \mathbf{n} \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、次のパラメータを導入する。

$$\begin{aligned} |\psi_0|^2 &= -\frac{\alpha}{\beta}, & H_c &= \left(\frac{4\pi\alpha^2}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \lambda &= \left(-\frac{m_s c^2 \beta}{4\pi e_s^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, & \xi &= \frac{\hbar}{(-2m_s \alpha)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}, \quad \eta = \frac{4\pi\sigma D}{c^2}, \quad \tau = \frac{\xi^2}{D}$$

これらを用い, $x = \xi x'$, $y = \xi y'$, $t = \tau t'$, $\psi = \psi_0 \psi'$, $\mathbf{H} = \sqrt{2}H_c \kappa \mathbf{H}'$, $\mathbf{A} = \sqrt{2}H_c \kappa \xi \mathbf{A}'$ とし無次元化を行うと, 無次元化された TDGL 方程式が次式のように得られる.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -[(|\psi|^2 - 1)\psi + (i\nabla + \mathbf{A})^2 \psi] \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\eta} \left[\frac{i}{2\kappa^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{1}{\kappa^2} |\psi|^2 \mathbf{A} + \text{rot}^2 \mathbf{A} \right] \quad (5)$$

ただし, 「'」は省略する. また, これによって境界条件は次式となる.

$$\begin{aligned} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} &= \mathbf{H} \times \mathbf{n} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

3 数値シミュレーション

本節ではピン止め点が超伝導体内の磁束の振舞いに及ぼす影響を調べるため, 式(4), (5), (6)を用いて数値シミュレーションを行った. 対象とする第2種超伝導体は Nb とし, パラメータの設定値を表1の様に与える.

表 1: パラメータの設定値

κ	1.4355
η	4.0440×10^{-2}
ξ	28.5nm
λ	41.0nm
L_x	1.64 μ m
L_y	1.64 μ m

3.1 シミュレーション方法

シミュレーションを行うにあたり, 偏微分方程式である TDGL 方程式を差分化し, さらにピン止め点に関する仮定を設けている. 本節ではこれらに関して説明する.

3.1.1 偏微分方程式の差分化

まず図2に示すように, xy 平面を $N_x \times N_y$ の格子状に分割する. そして TDGL 方程式の空間に関する微分演算を各格子点上の ψ , \mathbf{A} を用いた差分によって表すと, 時刻 t に

関する連立常微分方程式が得られる．ここでは $N_x = N_y = 90$ として得られた 7921 元連立常微分方程式に対して数値計算を行っている．

3.1.2 ピン止め点に関する仮定

ピン止め力を利用した磁気浮上系では，超伝導体の欠陥や他の組成の結晶粒塊による常伝導部分をピン止め点として磁束線が固定される．その結果，保持力によって負荷の浮上が実現される．次節以降に示す数値計算においてはピン止め点を考慮した数値シミュレーションを行っている．その際，ピン止め点は常伝導部分であるとし，常に $\psi = 0$ と仮定して計算を行うものとする．

3.2 ピン止め点の存在による磁束のヒステリシス挙動

ピン止め点が存在する超伝導体において，磁束が変動磁場下でどのように振舞うかを調べるため，次のシミュレーションを行った．まず，ピン止め点が $(13.3, 13.3)$, $(13.3, 26.7)$, $(26.7, 13.3)$, $(26.7, 26.7)$ の 4 点に存在するものとする．このとき，超伝導体をゼロ磁場冷却した状態から外部磁場を 0 から図 3 のように印加した場合，磁束密度 B の分布は図 4 のように変化した．

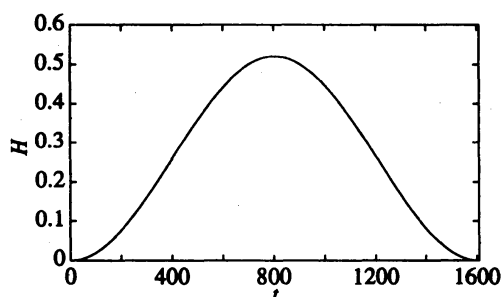


図 3: 外部磁場の与え方

同図 (a) のように磁束密度が超伝導体全域で 0，すなわち磁束が侵入していない状態を初期値とする．ここから外部磁場を増加させるにつれ，同図 (b) のように超伝導体の境界付近に磁束が侵入し始め，さらに磁場を増加させると同図 (c) のように内部にも磁束の侵入が確認できる．

次に外部磁場を減少させてゆくと，同図 (d) に示すように磁束密度の山が多数見られる．また，これらの磁束密度の山のうち，4 つのピン止め点を中心とする山が現れていることも分かる．さらに外部磁場を減少させて 0 に戻すと磁束密度分布は同図 (e) となる．ピン止め点以外における磁束密度の山は周囲の山から互いに反発力を受けて外向きに移動し，やがて境界に達して消滅する．しかし 4 つのピン止め点を中心とした磁束密度の山はピン止め点にとどまり，動かないことが分かる．

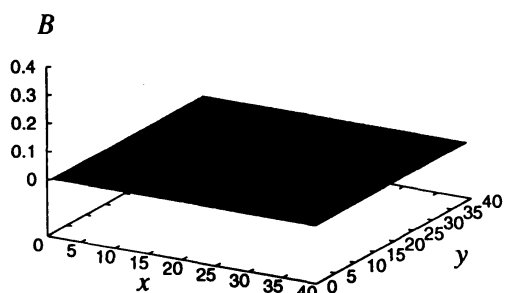
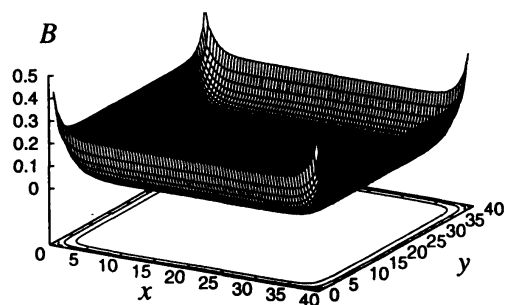
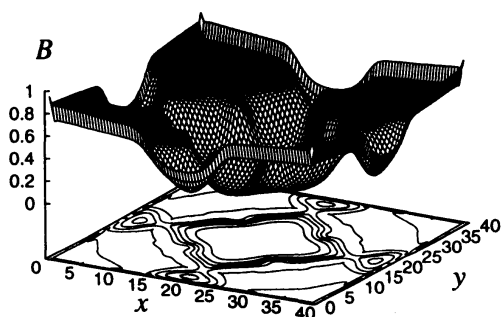
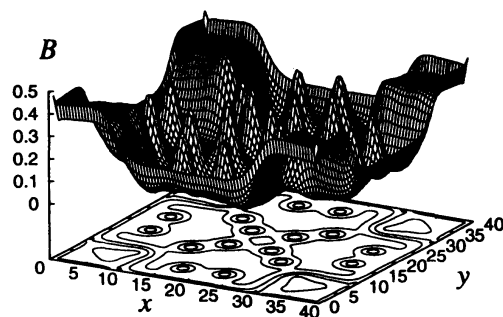
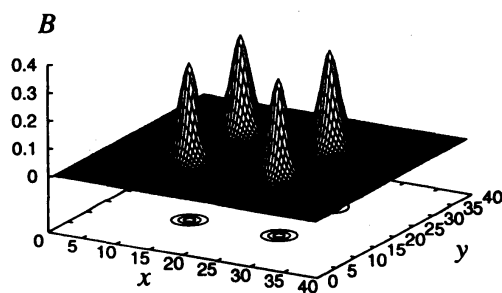
(a) $t = 0, H = 0$ (b) $t = 402, H = 0.26$ (c) $t = 804, H = 0.52$ (d) $t = 1206, H = 0.26$ (e) $t = 1608, H = 0$

図 4: ピン止め点が存在する超伝導体における変動磁場下での磁束密度分布

ここで、図4(e)の磁束密度分布に対して空間に関する面積分を計算すると、ひと山あたりの磁束の大きさは $2.066 \times 10^{-15} \text{Wb}$ となった。一方、磁束の最小単位の理論値 ϕ_0 は $2.068 \times 10^{-15} \text{Wb}$ であり、 ϕ_0 は磁束量子と呼ばれている [6]。数値計算で得られた磁束と磁束量子の理論値との誤差は 0.1% 以下と小さく、数値計算によって得られた磁束密度の山は磁束量子を表していると考えられる。

また、図4(a)と(e)、あるいは同図(b)と(d)を比較すれば明らかなように、同じ外部磁場 H に対しても磁場増加時と減少時で異なった磁束密度分布となっていることが分かる。以上により、磁束量子が変動磁場によってピン止め点に捕捉され、ヒステリシス的な振舞いを示すことが確認された。

また、第2種超伝導体に磁場を印加すると超伝導体が着磁し、永久磁石のように振舞うことが実験的に知られており [7]、数値計算結果はこの性質と定性的に一致する。

3.3 磁束量子の相互作用によるヒステリシス挙動

次に、磁束量子同士の相互作用に関して詳しく調べるために、以下のような数値シミュレーションを行った。

まず外部磁場 H を 0.3 とし、図5に示す超伝導電子密度、磁束密度分布を初期分布として与える。このとき、左右2つの磁束量子はピン止めされており、中央の磁束量子はピン止めされていないものとする。また、この状態では中央の磁束量子が他の2つの磁束量子から受ける反発力と、境界付近に侵入している磁束から受ける反発力が釣り合っている。そのため外部磁場 H を 0.3 のまま変化させない場合には時間が経っても超伝導電子密度と磁束密度の分布は初期分布のまま変化せず、定常状態となる。

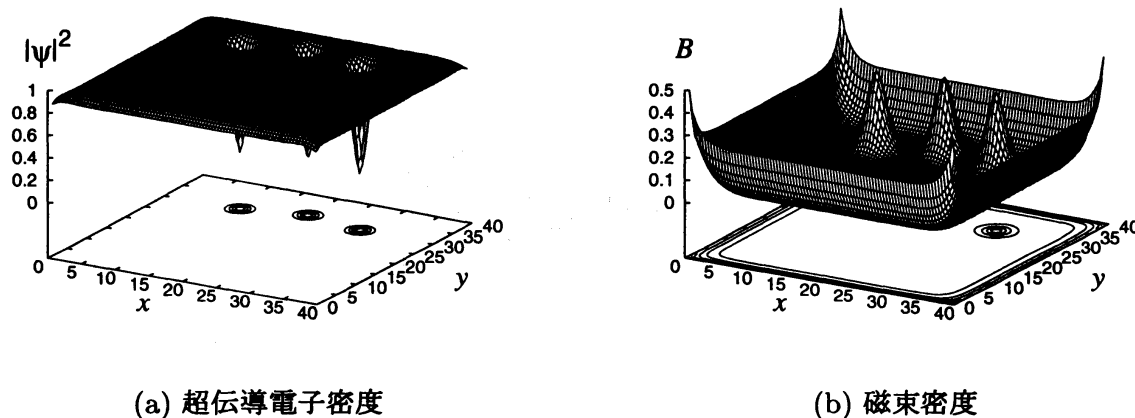


図 5: 超伝導電子密度、磁束密度の初期分布

この状態から外部磁場 H を

$$H = (H_d + 0.3) - H_d \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (7)$$

のように変化させた場合について、磁束密度分布の時間変化を求めた。 H_d は変動磁場分の振幅、 T はその周期を表す。

$H_d = 0.05$, $T = 10240\pi$ の場合における B の変化を図6に、 $H_d = 0.10$, $T = 10240\pi$ の場合を図7にそれぞれ示す。

図6のように変動磁場分の振幅が小さいときには、中央の磁束量子が左右の磁束量子より下へ移動することはなく、また同図(a)と(c)より分かるように、変動磁場による磁束密度分布のヒステリシス的な挙動はほとんど見られなかった。これは、磁場の振幅が小さいときには左右2つの磁束量子が作るポテンシャルの障壁を中央の磁束量子が越えることが出来ないためであると考えられる。

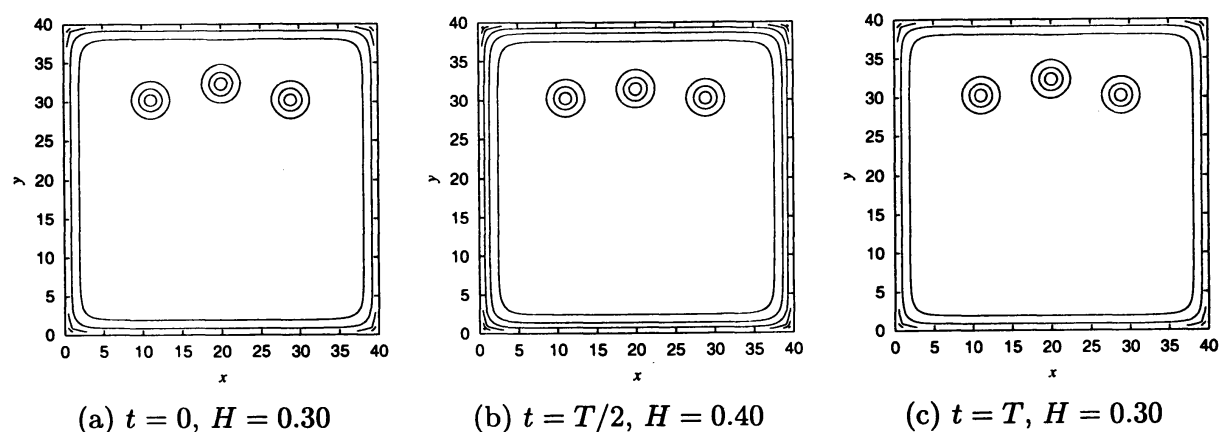


図6: $H_d = 0.05$, $T = 10240\pi$ の場合における B の分布

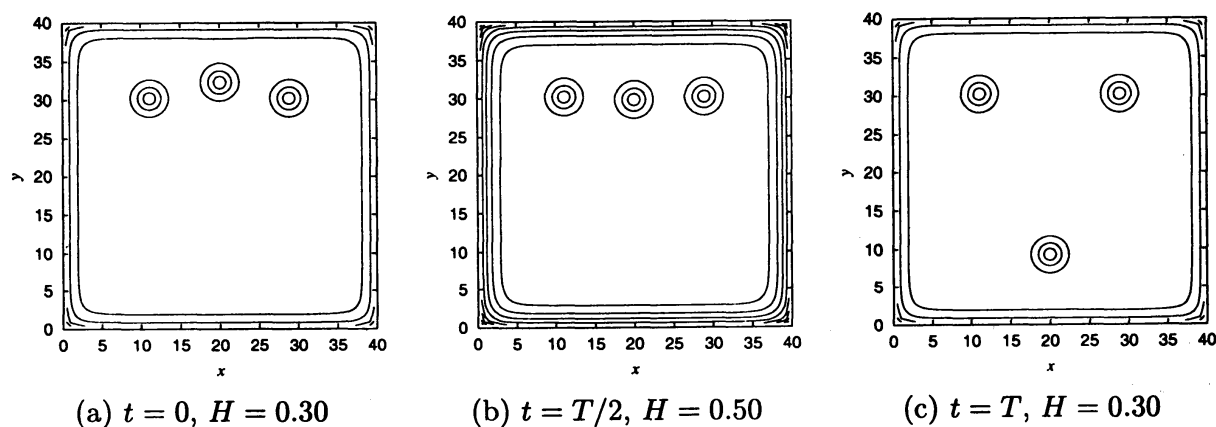


図7: $H_d = 0.10$, $T = 10240\pi$ の場合における B の分布

しかし図7のように変動磁場分の振幅が大きい場合、中央のピン止めされていない磁束量子は外部磁場の増加により左右の磁束量子よりも下へ移動し、外部磁場を元に戻しても初期状態の磁束密度分布には戻らなかった。これは、外部磁場の増加により左右2つの磁束量子が作るポテンシャルの障壁を中央の磁束量子が越えたためであると考えられる。

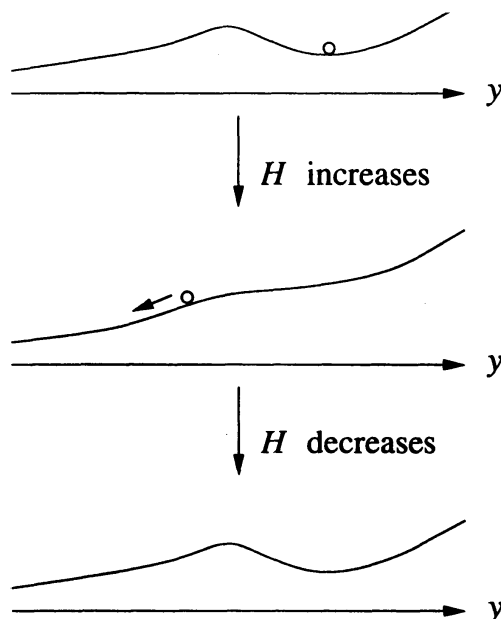


図 8: ポテンシャル障壁を越えて移動する磁束量子の模式図

磁束量子の位置の関数としての相対的なポテンシャルは、模式的には図8のように表されると考えられる。図8において、右側を境界、左側を超伝導体の内部とする。中央の磁束量子は境界へ近づくほど、境界に侵入している磁束からの反発力を大きく受けるので、境界付近にはポテンシャルの障壁があると考えられる。また中央の磁束量子は、他の2つの磁束量子に近づくほど反発力を大きく受けるので、超伝導体内部にもポテンシャルの障壁があると考えられる。この状態から外部磁場を増加させると、磁束量子が境界から受ける反発力が強くなるためにポテンシャル障壁を越え易くなる。一旦ポテンシャルの山を越えると、外部磁場を元に戻しても磁束量子は元の位置には戻らず、別の位置まで流れてゆく。以上のように現象を説明することが出来る。

得られた結果は、変動磁場下において磁束量子がポテンシャルの障壁を越えて流れてゆき、ヒステリシス的な挙動が生じる場合があることを示している。一方、前節でのシミュレーションにおいて確認されたヒステリシス挙動は、超伝導体内部のピン止め点に磁束量子が捕捉されることによるものであり、本節で見られたヒステリシスとは発生機構が異なる。

3.4 ピン止め点の間隔と磁束量子の配置の関係

次に、ピン止め点の間隔と磁束量子の配置との関係を調べるために、以下のシミュレーションを行った。図9に示すように、ピン止め点を正方格子状に配置し、ピン止め点の間隔を d とする。このとき、ゼロ磁場冷却の状態から外部磁場を図10のように変化させた

場合において超伝導電子密度，磁束密度分布を計算した¹。ただし， $H_d = 0.26$ ， $T = 512\pi$ とした。

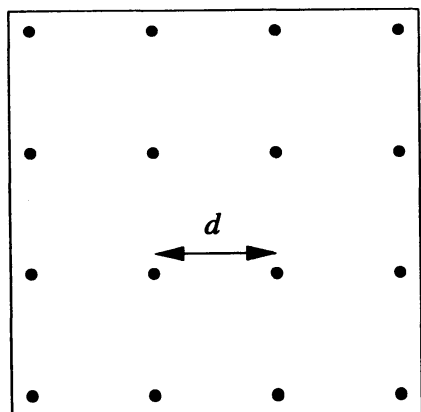


図 9: d の定義

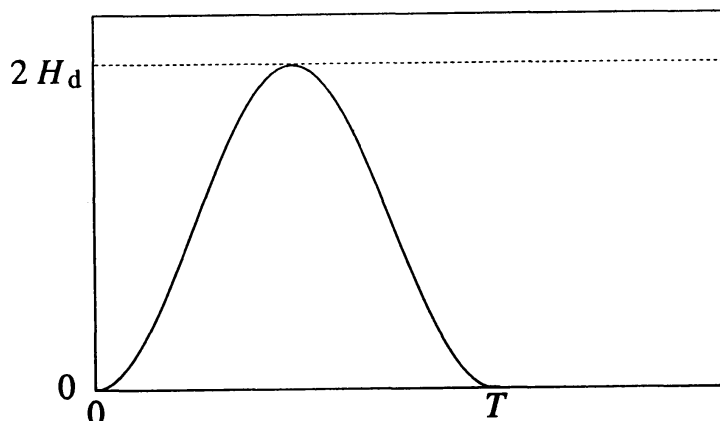


図 10: 外部磁場の変化

d を様々な値に設定した場合について，磁場印加後の定常状態における磁束密度分布を図 11 に示す。まず， $d = 380\text{nm}$ とした場合の超伝導電子密度，磁束密度分布は同図 (a) のようになり，4 つのピン止め点全てに磁束量子が捕捉されている。

次にピン止め点の密度を高くして $d = 177\text{nm}$ とした場合，それぞれの分布は同図 (b) のようになる。ピン止め点の数を増加させたことにより，ピン止め点に捕捉された磁束量子 (以後，ピン止め磁束と呼ぶ) の数は同図 (a) よりも増加している。しかし，磁束量子を捕捉していない余ったピン止め点が境界付近において多数見られる。

さらにピン止め点の密度を高くして $d = 127\text{nm}$ とした場合，それぞれの分布は同図 (c) のようになる。ピン止め点の数を図 (b) よりも増加させたにも関わらず，ピン止め磁束の数は 20 個のまま増加していないことが分かる。すなわちピン止め点の密度を図 (b) の場合より高くしても，磁束量子を捕捉しない余ったピン止め点が増えるだけであり，ピン止め磁束の増加には繋がらないといえる。

この理由としては，以下の事柄が考えられる。ピン止め点に捕捉された磁束量子が多数存在している場合，それらは周りの磁束量子から反発力を受ける。そのためピン止め点の間隔が狭くなってゆくと，周りの磁束量子から受ける反発力が強くなるために，磁束量子はピン止め点にとどまりにくくなると考えられる。よって磁束量子は互いにある程度の距離をおいた方がピン止め点にとどまりやすくなり，その結果図 11(c) のような分布となると考えられる。

¹この数値シミュレーションは，超伝導体に磁場をかけて着磁し，永久磁石として用いるような場合に対応している。実用上はピン止め点に捕捉される磁束量子の数が多ければ強い磁石になるので，好ましい

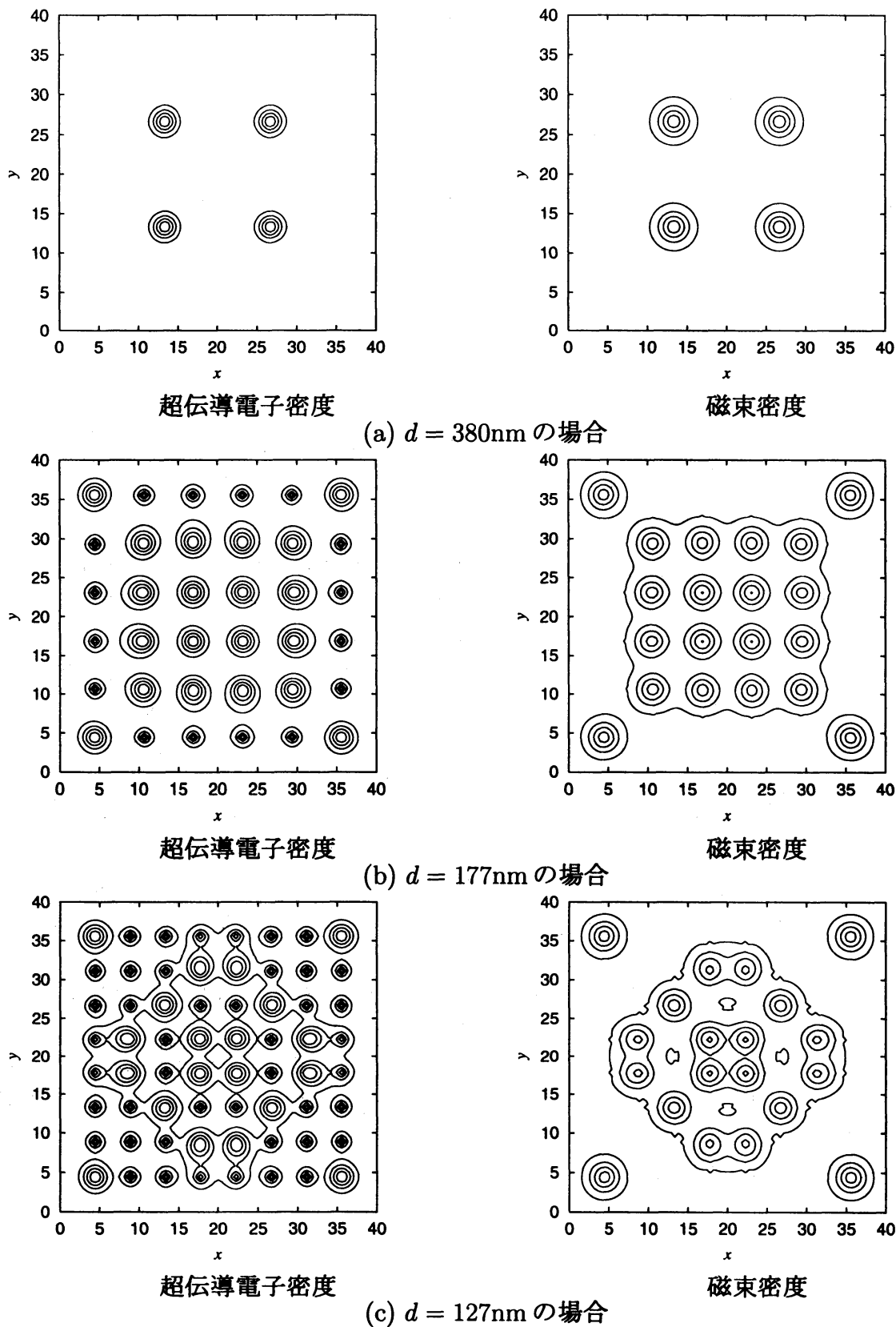


図 11: 磁場印加後の超伝導電子密度, 磁束密度分布

4 まとめ

本報告では第2種超伝導体の磁束ピン止め力を利用した磁気浮上系に関して、TDGL方程式を用いたモデル化を行った。次に磁気浮上系において磁束線を固定するピン止め点の働きに注目して数値シミュレーションを行い、変動磁場下で磁束がヒステリシス的な挙動を示すことがTDGL方程式を用いて表現できることを明らかにした。またヒステリシスの発生機構は、超伝導体内部のピン止め点に磁束量子が捕捉されることによるものと、磁束量子が磁場変動によって他の磁束量子が作るポテンシャル障壁を越えて移動することによるものが存在することを示した。最後に、ピン止め点の数とピン止め磁束の数は必ずしも一致せず、ピン止め点の密度がある程度高い場合には、ピン止め点の増加がピン止め磁束の増加には繋がらないことを示した。

今後、ピン止め磁束の変動磁場下でのクリープなど、マクロな現象との物理的対応を明らかにし、定量的な検証を加えてゆく予定である。

参考文献

- [1] 電気学会 磁気浮上応用技術調査専門委員会 編, 磁気浮上と磁気軸受, (コロナ社, 1993).
- [2] A. N. Terentiev, Disappearance of friction in a levitated $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ superconductor in a variable magnetic field, *Physica C*, 166, 71-74, (1990).
- [3] T. Hikihara and F. C. Monn, Levitation drift of a magnet supported by a high- T_c superconductor under vibration, *Physica C*, 250, 121-127 (1995).
- [4] J. R. Hull, Superconducting bearings, *Supercond. Sxi. Technol.*, 13, R1-R15 (2000).
- [5] L. P. Gor'kov and G. M. Eliashberg, Generalization of the Ginzburg-Landau equations for non-stationary problems in the case of alloys with paramagnetic impurities, *Soviet Phys.-JETP*, 27(2), 328-334 (1968).
- [6] 松下 照男, 磁束ピンニングと電磁現象, (産業図書, 1994), p. 18.
- [7] 上條弘貴, 藤本浩之, バルクマグネットにおける高温超電導バルク体配置による磁界制御, リニアドライブ研究会, 109, 13-18 (2001).