数理解析研究所講究録 1306 巻 2003 年 142-151

基本セルオートマトンが生成する時空間パターン
- Sierpinski Gasket -

大鑄 史男 (Fumio Ohi)
名古屋工業大学
〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町
Nagoya Institute of Technology
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466-8555, Japan
E-mail:ohi@system.nitech.ac.jp

序

$S=\{0,1\}$ と S^3 から S への写像 g との組 (S,g) を基本セルオートマトン (Elementary Cellular Automata, ECA) と呼ぶ. $2^8=256$ 通りの ECA (S,g) が存在し, それぞれの ECA (S,g) には次のようにして定まるルール番号 RN(S,g) が与えられる.

$$\mathrm{RN}(S,g)=\sum_{a,b,c} g(a,b,c)2^{a2^2+b2+c}.$$

ECA (S,g) が与えられたとき, 次のようにして $\boldsymbol{g}: S^{\mathbf{Z}} \to S^{\mathbf{Z}}$ を定義できる.

$$\forall \boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}},\ \forall i \in \mathbf{Z},\ (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))_i = g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

$S^{\mathbf{Z}}$ の要素を configuration と呼ぶ. ここで $\mathbf{Z}$ は, 整数全体の集合である. 特に $(\dots,0,0,1,0,0,\dots)$ を single seed configuration と呼ぶ.

ECA (S,g) の g を local rule, g から定められる $\boldsymbol{g}: S^{\mathbf{Z}} \to S^{\mathbf{Z}}$ を global rule と呼び, g の bold face $\boldsymbol{g}$ で書き表すことにする. $\boldsymbol{g}$ は, $S^{\mathbf{Z}}$ 上の dynamics を定める.

$$\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}},\quad \boldsymbol{g}^0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{g}^{t+1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})),\ t \geq 0.$$

$\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ を initial configuration としたとき, dynamics $\boldsymbol{g}$ が定める時空間パターンとは, $\{(t,\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})), t \geq 0\}$ のことである. 一般的に我々が問題にするのは, ECA (S,g) が定める $S^{\mathbf{Z}}$ 上の dynamics $\boldsymbol{g}$ の解析及び時空間パターン $\{(t,\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})), t \geq 0\}$, $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ の特性である.

二つの ECA's (S,f) と (S,g) は次の条件を満たすとき, 対称であると呼ばれる.

$$\forall a,b,c \in S,\quad f(a,b,c) = g(a,b,c).$$

このとき, $\boldsymbol{f}$ が定める dynamics と $\boldsymbol{g}$ が定める dynamics とは同値である.

S.Wolfram(1983) は, 詳細な計算機シュミレーションによって基本セルオートマトンを分類したが, それらは必ずしも厳密なものではない. これに対して G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchni and C.Quaranta Vogliotti(1995) は, 明確な判定基準による分類を行い, 0-quiescent local rule (定義はこの後で提示する) を持つ基本セルオートマトンを以下のような C_1, C_2, C_3 の三つのクラスに分類した. また, それぞれのセルオートマトンがどのクラスに属するかの判定を行うアルゴリズム的な手法を提示している.

$$C_1:\quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{F},\quad \lim_{t\to\infty} l(\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})) = 0,$$

$$C_2:\quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{F},\quad \sup_{t\in\mathbf{N}} l(\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})) < \infty,$$

$$C_3:\quad \exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{F},\quad \sup_{t\in\mathbf{N}} l(\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})) = \infty.$$

本稿で問題にするのは C_3 クラスに属する local rule の内，特に Sierpinski class と呼ばれるクラスに属する g によって定まる dynamics $\boldsymbol{g}$ がどのような growth of time-space pattern を示すかについて議論することである.

S 上には離散位相が定義されていて，その直積位相が $S^{\mathbf{Z}}$ 上に定義されているとする．また left shift transformation $\sigma_L : S^{\mathbf{Z}} \to S^{\mathbf{Z}}$ および right shift transformation $\sigma_R : S^{\mathbf{Z}} \to S^{\mathbf{Z}}$ は次のように定義される；$\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して

$$(\sigma_L(\boldsymbol{x}))_i = x_{i+1}, \quad (\sigma_R(\boldsymbol{x}))_i = x_{i-1}, \quad i \in \mathbf{Z}.$$

ECA (S,g) は，$g(0,0,0)=0$ であるとき 0-quiescent であると呼ばれる.

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}} \mid \exists i \in \mathbf{Z},\ \exists j \in \mathbf{Z},\ i \leq j,\ \boldsymbol{x} = (...,0,0,x_i,...,x_j,0,0,...)\}$$

と書き，$\mathcal{F}$ の要素を 0-finite configuration と呼ぶ．特に $(...,0,0,0,...) \in \mathcal{F}$ であると約束する．g が 0-quiescent であれば，$\boldsymbol{g}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ である．よって $\boldsymbol{g}$ は，$\mathcal{F}$ 上での dynamics を定める.

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ に対して $\boldsymbol{x} = (...,0,0,\overset{i}{\breve{1}},...,\overset{j}{\breve{1}},0,0...)$ であるとき，$l(\boldsymbol{x}) = j - i + 1$ と定め，$\boldsymbol{x}$ の length of pattern と呼ぶ.

以降では，ルール番号を明記する必要がある時，ルール番号 n を持つセルオートマトンの local rule とそれから決まる global rule をそれぞれ g_n 及び $\boldsymbol{g}_n$ と書く．また，shift transformation と $\boldsymbol{g}_n$ との合成関数を $\boldsymbol{h}_{Ln} = \sigma_L \circ \boldsymbol{g}_n$, $\boldsymbol{h}_{Rn} = \sigma_R \circ \boldsymbol{g}_n$ と書くが，ルール番号を明記する必要がないときは，簡単に $\boldsymbol{h}_L = \sigma_L \circ \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}_R = \sigma_R \circ \boldsymbol{g}$ と書くことにする.

混乱を生じることなく，$\boldsymbol{g}$ を以下のように定義される S^{n+2} から S^n への写像であるとみなすことがある.

$$\forall(y_1,...,y_{n+2}) \in S^{n+2}, \quad \boldsymbol{g}(y_1,...,y_{n+2}) \equiv (g(y_1,y_2,y_3), g(y_2,y_3,y_4),...,g(y_n,y_{n+1},y_{n+2})) \in S^n.$$

$\boldsymbol{g}(y_1,...,y_{n+2}) = (x_1,...,x_n)$ であるとき，$(y_1,...,y_{n+2})$ を $(x_1,...,x_n)$ の predecessor であると呼ぶ.

Notations (1) 1 の block とは，1 が 2 個以上並んだもので，例えば $(1,1)$ や $(1,1,1)$ などを指し，長さ n の 1 の block とは，n 個の 1 が並んだものであり，$\mathbf{1}_n = (\underbrace{1,\cdots,1}_{n})$ と書く．同様に長さ n の 0 の block とは，$\mathbf{0}_n = (\underbrace{0,\cdots,0}_{n})$ である．特に断ることなく $\mathbf{0}$ を $(...,0,0)$, $(0,0,...)$, $(...,0,0,0,...)$ 等を表すものとして使うが，混乱は生じない．$\mathbf{1}$ に関しても同様である.

(2) $\boldsymbol{a}^i = (a^i_1,...,a^i_{m_i}) \in S^{m_i}$, $i = 1,...,n$ に対して

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}^1,\cdots,\boldsymbol{a}^n) &= (a^1_1,...,a^1_{m_1},...,a^n_1,...,a^n_{m_n}),\\
(\mathbf{0},\boldsymbol{a}^1) &= (...,0,0,0,a^1_1,...,a^1_{m_1}),\\
(\boldsymbol{a}^1,\mathbf{0}) &= (a^1_1,...,a^1_{m_1},0,0,0,...),\\
(\mathbf{0},\boldsymbol{a}^1,\mathbf{0}) &= (...,0,0,0,a^1_1,...,a^1_m,0,0,0,...)
\end{aligned}$$

と約束する．$\mathbf{0}$ の代わりに $\mathbf{1}$ を入れ替えた場合も同様である.

(3) $\boldsymbol{x} = (...,x_{-1},x_0,x_1,...) \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して，以下のような記法を用いる.

$$\boldsymbol{x}_{i,j} = (x_i,...,x_j),\ i \leq j, \quad \boldsymbol{x}_{-\infty,i} = (...,x_{i-1},x_i), \quad \boldsymbol{x}_{i,\infty} = (x_i,x_{i+1},...).$$

また $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n) \in S^n$ に対して $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_{-\infty,i},\overset{i}{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{x}_{i+1,\infty}) \in S^{\mathbf{Z}}$ は，$x_{i-n+1} = a_1,...,x_i = a_n$ であることを意味する．つまり i は，$\boldsymbol{a}$ の最後の要素が $\boldsymbol{x}$ 中において位置する座標番号を意味する.

(4) $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n) \in S^n$ と $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して

$$\exists i \in \mathbf{Z}, \quad x_i = a_1, ..., x_{i+n-1} = a_n$$

であるとき，$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{x}$ と書くことにする．従って，例えば $\mathbf{1}_n \in \boldsymbol{x}$ は，ある $i \in \mathbf{Z}$ に対して $x_i = \cdots = x_{i+n-1} = 1$ であることを意味する．

1. Sierpinski Gasket を生成するセルオートマトン

$$C_s = \{\boldsymbol{g}_{18}, \boldsymbol{g}_{26}, \boldsymbol{g}_{82}, \boldsymbol{g}_{90}, \boldsymbol{g}_{146}, \boldsymbol{g}_{154}, \boldsymbol{g}_{210}, \boldsymbol{g}_{218}\}$$

と置く．

$$g(0,0,1) = g(1,0,0) = 1, \ g(1,0,1) = g(0,1,0) = g(0,0,0) = 0$$

を満たす local transition function を持つ ECA を集めたものが C_s であり，$\boldsymbol{g}_{26}$ と $\boldsymbol{g}_{82}$，$\boldsymbol{g}_{154}$ と $\boldsymbol{g}_{210}$ はそれぞれ互いに対称の関係にある ECA の組である．これらの rule に従い sigle seed configuration を時間発展させると Sierpinski Gasket が得られる．

σ_L を $S^{\mathbf{Z}}$ 上の shift transformation とする．

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{even} \equiv &\{\boldsymbol{x} | x_{2m} = 0, \ m \in \mathbf{Z}\}, \\ \mathcal{W}_{odd} \equiv &\{\boldsymbol{x} | x_{2m+1} = 0, \ m \in \mathbf{Z}\} \end{aligned}$$

とする．明らかに $(\mathcal{W}_{even} \backslash \{\mathbf{0}\}) \cap (\mathcal{W}_{odd} \backslash \{\mathbf{0}\}) = \phi$ である．また，$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{even} \cap \mathcal{W}_{odd}$ と置く．

Proposition 1.1 (1) $\boldsymbol{g} \in C_s$ とし，$\boldsymbol{h}_L = \sigma_L \circ \boldsymbol{g}$ とする．次のことが成立する．

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{even}, \quad (\boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}))_i = \begin{cases} 0, & i = 2m, \\ x_i \oplus x_{i+2}, & i = 2m+1, \end{cases}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{odd}, \quad (\boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}))_i = \begin{cases} 0, & i = 2m+1, \\ x_i \oplus x_{i+2}, & i = 2m, \end{cases}$$

である．このことから，

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{eve}, \quad \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W}_{even}, \\ &\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{odd}, \quad \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W}_{odd}. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} &\forall t \geq 0, \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{W}_{even}, \quad \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{y}), \\ &\forall t \geq 0, \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{W}_{odd}, \quad \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{g} \in C_s$ とし，$\boldsymbol{h}_R = \sigma_R \circ \boldsymbol{g}$ とする．次のことが成立する．

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{even}, \quad (\boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}))_i = \begin{cases} 0, & i = 2m, \\ x_{i-2} \oplus x_i, & i = 2m+1, \end{cases}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{odd}, \quad (\boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}))_i = \begin{cases} 0, & i = 2m+1, \\ x_{i-2} \oplus x_i, & i = 2m, \end{cases}$$

である．このことから，

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{eve}, \quad \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W}_{even},$$
$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{odd}, \quad \boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W}_{odd}.$$

さらに

$$\forall t \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{W}_{even}, \quad \boldsymbol{h}^t_R(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}^t_R(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{h}^t_R(\boldsymbol{y}),$$
$$\forall t \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{W}_{odd}, \quad \boldsymbol{h}^t_R(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}^t_R(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{h}^t_R(\boldsymbol{y}).$$

Proof　任意の $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して $(\boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}))_i = g(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ であり $g(0,0,1) = g(1,0,0) = 1, g(1,0,1)$ $g(0,1,0) = g(0,0,0) = 0$ であることに注意すれば，Proposition は明らかである　□

Proposition 1.2　$\boldsymbol{g} \in C_s$ に対して，$\boldsymbol{h}_L = \sigma_L \circ \boldsymbol{g}$ とする．$\boldsymbol{x} = (\mathbf{0}, \overset{0}{1}, \mathbf{0}) \in \mathcal{W}_{odd}$ に対して

$$A_0 = (\boldsymbol{x}), \quad A_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{h}^2_L(\boldsymbol{x}) \\ \cdots \\ \boldsymbol{h}^{2^n-1}_L(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \ n \geq 1$$

と置けば，次のことが成立する．

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ \sigma^{2^n}_L A_{n-1} \oplus A_{n-1} \end{pmatrix}, \ n \geq 1,$$
$$\boldsymbol{h}^{2^n-1}_L(\boldsymbol{x}) = (\ldots, 0, 0, 0, \overset{-(2^{n+1}-2)}{1}, 0, 1, 0, \ldots, 0, \overset{0}{1}, 0, 0, 0, \ldots),$$
$$\forall t \geq 0, \quad \left(\boldsymbol{h}^t_L(\boldsymbol{x})\right)_{0,\rightarrow} = (1, \mathbf{0}).$$

C_s に属するルールが single-seed configuration に対して入れ子構造を持つ time-space pattern を生成することを意味している．

Proof　n に関する帰納法で証明する．$\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{h}^t_L(\boldsymbol{x})$, $t \geq 0$ と書き，$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{h}^0_L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ とする．

$$\begin{aligned} A_0 &= (\ldots, 0, 0, 0, \overset{0}{1}, 0, 0, 0, \ldots), \\ \boldsymbol{x}^1 &= \boldsymbol{x}^{2^1-1} \\ &= (\ldots, 0, 0, 0, \overset{-2^1}{1}, 0, \overset{0}{1}, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= (\ldots, 0, 0, 0, \overset{-2^1}{1}, 0, 0, 0, \ldots) \oplus (\ldots, 0, 0, 0, \overset{0}{1}, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= \left(\sigma^{2^1}_L \boldsymbol{x}^0\right) \oplus \boldsymbol{x}^0 \end{aligned}$$

であるから，

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_0 \\ \sigma^{2^1}_L A_0 \oplus A_0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{x}^{2^1-1} = (\ldots, 0, 0, 0, \overset{-(2^{1+1}-1)}{1}, 0, \overset{0}{1}, 0, 0, 0, \ldots)$$

となり，$n = 1$ の場合は成立する．

$n=n$ の場合成立するとして，$n=n+1$ の場合を調べる．

$$A_{n+1}=\begin{pmatrix} A_n \\ \boldsymbol{x}^{2^n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{2^{n+1}-1} \end{pmatrix}$$

であるが，$\boldsymbol{x}^{2^n},\dots,\boldsymbol{x}^{2^{n+1}-1}$ がどのようになるかを調べる．帰納法の仮定より，

$$\boldsymbol{x}^{2^n-1}=(\dots,0,0,0,\overset{-(2^{n+1}-2)}{1},0,1,0,1,\dots,0,\overset{0}{1},0,0,0,\dots) \tag{$*$}$$

であることと，C_s に属するルールの local transition rule g が

$$g(0,1,0)=g(1,0,1)=0,\ g(0,0,1)=g(1,0,0)=1$$

を満たしていることから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{2^n}&=(\dots,0,0,0,\overset{-2^{n+1}}{1},0,0,\dots,0,0,\overset{0}{1},0,0,0,\dots)\\ &=(\dots,0,0,0,\overset{-2^{n+1}}{1},0,0,0,\dots)\oplus(\dots,0,0,0,\overset{0}{1},0,0,0,\dots)\\ &=\left(\sigma_L^{2^{n+1}}\boldsymbol{x}^0\right)\oplus\boldsymbol{x}^0.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\forall t\geq 0,\quad \boldsymbol{x}^{2^n+t}&=\boldsymbol{h}_L^t(\sigma_L^{2^{n+1}}\boldsymbol{x}^0\oplus\boldsymbol{x}^0)\\ &=\left(\sigma_L^{2^{n+1}}\boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x}^0)\right)\oplus\boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x}^0)\end{aligned}$$

となる．ここで $\boldsymbol{h}_L$ が σ_L と可換であり，また Proposition 1.1 による $\oplus$ に関する保存性を用いた．従って，$0\leq t\leq 2^n-1$ を考え，再度帰納法の仮定 $(*)$ を用いると，

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{2^n}\\ \boldsymbol{x}^{2^n+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^{2^{n+1}-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_L^{2^{n+1}}\boldsymbol{x}^0\oplus\boldsymbol{x}^0\\ \sigma_L^{2^{n+1}}\boldsymbol{x}^1\oplus\boldsymbol{x}^1\\ \vdots\\ \sigma_L^{2^{n+1}}\boldsymbol{x}^{2^n-1}\oplus\boldsymbol{x}^{2^n-1}\end{pmatrix}=\left(\sigma_L^{2^{n+1}}A_n\oplus A_n\right),$$

$$\boldsymbol{x}^{2^{n+1}-1}=(\dots,0,0,0,\overset{-(2^{n+1+1}-2)}{1},0,1,0,1,\dots,0,\overset{0}{1},0,0,0,\dots)$$

となり，帰納法での証明が完了する． □

$\boldsymbol{h}_R=\sigma_R\circ\boldsymbol{g}$ $(\boldsymbol{g}\in C_s)$ に対しても Proposition 1.2 と同様のことが成立する．

C_s に属するルールの $\mathcal{W}$ 上での dynamics は同一であり，それはルール 90 と同様である．この dynamics は，よく知られている．次に問題にするのは，$\mathcal{F}\backslash\mathcal{W}$ または $S^{\mathbf{Z}}\backslash\mathcal{W}$ に属する configuration から出発したとき，どのような軌道を描くかである．

$\mathcal{W}$ は，1 が孤立し，1 と 1 との間の 0 の個数が奇数であるような configurations 全体の集合であり，必ずしも $\mathcal{F}$ の部分集合ではないことに注意しておく．

2. ルール 18 と 146

ルール 18 と 146 の local transition function は次の表で与えられているようなものである.

(a,b,c)	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$g_{18}(a,b,c)$	0	0	0	1	0	0	1	0
$g_{146}(a,b,c)$	1	0	0	1	0	0	1	0

$$\mathcal{U}: \text{長さ 3 以上の 1 のブロックを含まない configurations 全体の集合},$$

とする.

ルール 18 に対して，$(1,1,1)$ の predecessor は存在しない．従って，このことから，次の Proposition が成立することが容易にわかる.

Proposition 2.1 (ルール 18)

$$\boldsymbol{h}_{L18}(S^{\mathbf{Z}}) \subset \mathcal{U}, \quad \boldsymbol{h}_{L18}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}.$$

この Proposition から，任意の $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して，$\boldsymbol{h}_{L18}(\boldsymbol{x})$ には，長さが 3 以上の 1 のブロックは含まれず，1 が存在しても，それは孤立しているか，または長さが 2 のブロックでしかないことがわかる.

Lemma 2.2 (ルール 146) (1) ルール番号 146 において $(0,\underbrace{1,\ldots,1}_{n\geq 3},0)$ の predecessor は，$(0,\underbrace{1,\ldots,1}_{n+2},0)$ に限る.

(2) $\boldsymbol{x} = (\ldots,\overset{i}{0},\ldots)$ に対して，

$$\forall t \geq t, \quad \left(\boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x})\right)_{i-1,i+2} \neq (0,1,1,1)$$

である.

Proof (1)

$$\boldsymbol{g}_{146}(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_{n+2},y_{n+3},y_{n+4}) = (0,\underbrace{1,\ldots,1}_{n},0)$$

とする．つまり

$$\begin{aligned}
&g(y_1,y_2,y_3) = 0,\\
&g(y_2,y_3,y_4) = 1, \ \ldots, \ g(y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3}) = 1,\\
&g(y_{n+2},y_{n+3},y_{n+4}) = 0
\end{aligned}$$

である．$g(1,1,0) = g(0,1,1) = g(0,1,0) = 0$ であることと $n \geq 3$ であることから $(y_2,y_3,\ldots,y_{n+2},y_{n+3})$ には 0 が存在しない．また $g(1,1,1) = 1, g(0,1,1) = g(1,1,0) = 0$ であることから $y_1 = y_{n+4} = 0$ である.

(2)

$$\boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x}) = (\ldots, \overset{i-1}{0}, \underbrace{\overset{i}{1},1,1,\ldots,1}_{n\geq 3},0,\ldots)$$

とすれば，Lemma 2.2 より

$$0 \leq \forall m \leq t, \quad \boldsymbol{h}^m_{L146}(\boldsymbol{x}) = (\ldots, \overset{i-1}{0}, \underbrace{\overset{i}{1},1,1,\ldots,1}_{n+(t-m)\cdot 2},0,\ldots)$$

であり，よって $x_i = 1$ でなければならないが，これは $x_i = 0$ に反する． □

この Lemma 2.2 から次の Proposition 2.3 は，明らかである．

Proposition 2.3 (ルール 146) (1) $\boldsymbol{h}_{L146}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$.

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{F},\ \exists t \geq 0,\quad \boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U}$.

(3) $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して，

$$\sup\{n | \mathbf{1}_n \in \boldsymbol{x}\} < \infty \Rightarrow \exists t \geq 0,\ \boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U}.$$

(4) $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して，

$$\sup\{n | \mathbf{1}_n \in \boldsymbol{x}\} = \infty \Rightarrow \begin{cases} \forall t \geq 0, \quad \boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x}) \notin \mathcal{U}, \\ \lim_{t\to\infty} d(\boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x}), \mathcal{U}) = 0. \end{cases}$$

Proof (4) の後半の証明を行っておく．Lemma 2.2 の (1) と (2) のよって，

$$\boldsymbol{x}_{i,j} = (\mathbf{0}_k, \mathbf{1}_l, \mathbf{0}_m), \quad k \geq 1,\ l \geq 1,\ m \geq 1,\ i - j + 1 = k + l + m$$

であるような configuration $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\exists T, \forall t \geq T, \quad \mathbf{1}_3 \notin (\boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x})_{i,j})$$

である．つまり $(\boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x}))_{i,j}$ には，長さ 3 以上の 1 のブロックが含まれない．従って，初期 configuration 中の長さ 3 以上の 1 のブロックが存在していた場所には，十分時間がたつと，長さ 3 以上の 1 のブロックが存在しなくなる． □

$\mathcal{U}$ に属する configuration 中の 1 は，長さ 2 のブロックであるか，または孤立している．従って，local transition function としては，(1,1,1) に対応する値を用いる必要はない．従って，$\mathcal{U}$ 上では，**ルール 146 とルール 18 とは全く同じ力学を描くことになる．**

Proposition 2.4 (ルール 18 と 146)

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{U},\ \forall t \geq 0, \quad \boldsymbol{h}^t_{L18}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}^t_{L146}(\boldsymbol{x}).$$

$\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ であり，$\boldsymbol{h}_{L18}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}, \boldsymbol{h}_{L146}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$ であることから，問題は，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{W}$ から出発したときの軌道がいずれは $\mathcal{W}$ に入るのかどうかである．

3. ルール 154 とルール 210

ルール番号 154 と 210 の local transition function は，次の表で与えられる．これら二つのルールが互いに対称であることがわかる．この節では，ルール 154 のセルオートマトンが生成する時空間パターンについて調べる．

(a,b,c)	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$g_{154}(a,b,c)$	1	0	0	1	1	0	1	0
$g_{210}(a,b,c)$	1	1	0	1	0	0	1	0

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{1}_n | n \geq 0\}, \quad \mathbf{1}_0 \text{ は empty であると約束する},$$
$$\mathcal{W}_f = \{(1, \mathbf{0}_{j_1}, 1, \mathbf{0}_{j_2}, 1, ..., 1, \mathbf{0}_{j_r}, 1) | j_1, ..., j_r : \text{奇数}, \ r \geq 1\} \cup \{(1)\}$$

とする．$\mathbf{1}_0$ と同様に $\mathbf{0}_0$ は empty であると約束する．

Proposition 3.1 $\mathbf{1}_n \in \mathcal{B}$, $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}_f$ に対して，次の関係式が成立する．

$$\forall t \geq 0, \quad \boldsymbol{h}^t_{R154}(\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_n, \boldsymbol{w}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_n, \mathbf{0}) \oplus \boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i}{\mathbf{0}}, \boldsymbol{w}, \mathbf{0}). \tag{**}$$

$(\overset{i}{\mathbf{0}}, \boldsymbol{w}, \mathbf{0}) \in \mathcal{W}$ であるから，Proposition 2.2 より，

$$\forall g \in C_s, \ \forall t \geq 0, \quad \boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i}{\mathbf{0}}, \boldsymbol{w}, \mathbf{0}) = \boldsymbol{h}^t_R(\overset{i}{\mathbf{0}}, \boldsymbol{w}, \mathbf{0})$$

である．ここで $\boldsymbol{h}_R = \sigma_R \circ \boldsymbol{g}$ である．

Proof $g_{154}(0,0,1) = g_{154}(0,1,1) = g_{154}(1,1,1) = 1$ であることから，

$$\left(\boldsymbol{h}_{R154}(\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_n, \boldsymbol{w}, \mathbf{0})\right)_{\leftarrow, i} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}_n).$$

また，$g_{154}(0,0,1) = g_{154}(0,1,1) = g_{154}(1,1,1) = 1$, $g_{154}(1,1,0) = g_{154}(0,1,0) = 0$ であることから

$$\left(\boldsymbol{h}_{R154}(\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_n, \boldsymbol{w}, \mathbf{0})\right)_{i+1, \rightarrow} = \left(\boldsymbol{h}_{R154}(\overset{i}{\mathbf{0}}_n, \boldsymbol{w}, \mathbf{0})\right)_{i+1, \rightarrow}.$$

さらに Propositions 1.1 と 1.2 とから

$$\exists \boldsymbol{w}' \in \mathcal{W}_f, \quad \boldsymbol{h}_{R154}(\overset{i}{\mathbf{0}}, \boldsymbol{w}, \mathbf{0}) = (\overset{i}{\mathbf{0}}, \boldsymbol{w}', \mathbf{0})$$

であるから，この $\boldsymbol{w}'$ を用いて，

$$\boldsymbol{h}_{R154}(\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_n, \boldsymbol{w}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_n, \mathbf{0}) \oplus (\overset{i}{\mathbf{0}}, \boldsymbol{w}', \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_n, \boldsymbol{w}', \mathbf{0})$$

となる．よって t に関する帰納法によって (**) が成立することがわかる． □

$\mathbf{1}_{n_1}, \mathbf{1}_{n_2} \in \mathcal{B}$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathcal{W}_f$ として，$(\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_{n_1}, \boldsymbol{w}_1, \overset{k}{\mathbf{0}}_m, \overset{l}{\mathbf{1}}_{n_2}, \boldsymbol{w}_2, \mathbf{0})$ の $\boldsymbol{h}_{R154}$ による時間発展を考える．m は偶数の場合のみを考えればよく，さらに次の二つの場合を考えればよい．

(1) $\boldsymbol{w}_1 = (1)$ かつ m は 2 以上の偶数，
(2) $\boldsymbol{w}_1 \neq (1)$ かつ m は 0 以上の偶数，

ここで，0 は偶数に含まれるとしている．m が奇数の場合は，上記の二つのいずれかの場合に帰着される．任意の $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して $(\boldsymbol{h}_{R154}(\boldsymbol{x}))_i = g_{154}(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\forall t \geq 0, \quad \left(\boldsymbol{h}^t_{R154}(\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_{n_1}, \boldsymbol{w}_1, \overset{k}{\mathbf{0}}_m, \overset{l}{\mathbf{1}}_{n_2}, \boldsymbol{w}_2, \mathbf{0})\right)_{\leftarrow, k} &= \left(\boldsymbol{h}^t_{R154}(\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_{n_1}, \boldsymbol{w}_1, \mathbf{0})\right)_{\leftarrow, k} \\ &= \left((\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_{n_1}, \mathbf{0}) \oplus \boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i}{\mathbf{0}}, \boldsymbol{w}_1, \mathbf{0})\right)_{\leftarrow, k} \quad \text{by Proposition 3.1}\end{aligned}$$

であるから，m が偶数であることに注意すれば，Proposition 3.2 から

$$\forall t \geq 0, \quad \left(\boldsymbol{h}^t_{R154}(\mathbf{0}, \overset{i}{\mathbf{1}}_{n_1}, \boldsymbol{w}_1, \overset{k}{\mathbf{0}}_m, \overset{l}{\mathbf{1}}_{n_2}, \boldsymbol{w}_2, \mathbf{0})\right)_p = \begin{cases} 0 \text{ or } 1, & p = k, \\ 0, & p = k-1. \end{cases}$$

である．よって，$g(0,0,1)=g(1,0,1)=g(0,1,1)=g(1,1,1)=1$ であるから，

$$\forall t\ge 0,\quad \left(\boldsymbol{h}^t_{R154}(\mathbf{0},\overset{i}{\mathbf{1}}_{n_1},\boldsymbol{w}_1,\overset{k}{\mathbf{0}}_m,\overset{l}{\mathbf{1}}_{n_2},\boldsymbol{w}_2,\mathbf{0})\right)_{k+1,\to}=\left(\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{k}{\mathbf{0}},\overset{l}{\mathbf{1}}_{n_2},\boldsymbol{w}_2,\mathbf{0})\right)_{k+1,\to}.$$

従って Proposition 3.1 より

$$\begin{aligned}\forall t\ge 0,\quad \boldsymbol{h}^t_{R154}(\mathbf{0},\overset{i}{\mathbf{1}}_{n_1},\boldsymbol{w}_1,\overset{k}{\mathbf{0}}_m,\overset{l}{\mathbf{1}}_{n_2},\boldsymbol{w}_2,\mathbf{0})=\Bigg(&\left((\mathbf{0},\overset{i}{\mathbf{1}}_{n_1},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_1,\mathbf{0})\right)_{\leftarrow,k},\\ &\left((\overset{k}{\mathbf{0}},\overset{l}{\mathbf{1}}_{n_2},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{l}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_2,\mathbf{0})\right)_{k+1,\to}\Bigg)\end{aligned}$$

となる．以上の議論を単純に拡張することによって，次の定理が得られる．

Theorem 3.3 $\mathbf{1}_{n_i}\in\mathcal{B}$, $\boldsymbol{w}_i\in\mathcal{W}_f$, $i\in\mathbf{Z}$ とする．$\boldsymbol{w}_i$ と m_i は，上記の (1) または (2) の条件を満たすとする．

(1) $\boldsymbol{x}=(\ldots,\overset{i_{-1}}{\mathbf{1}}_{n_{-1}},\boldsymbol{w}_{-1},\overset{k_{-1}}{\mathbf{0}}_{m_{-1}},\overset{i_0}{\mathbf{1}}_{n_0},\boldsymbol{w}_0,\overset{k_0}{\mathbf{0}}_{m_0},\overset{i_1}{\mathbf{1}}_{n_1},\boldsymbol{w}_1,\overset{k_1}{\mathbf{0}}_{m_1},\ldots)$ に対して，

$$\begin{aligned}\forall t\ge 0,\quad \boldsymbol{h}^t_{R154}(\boldsymbol{x})=\Bigg(\ldots,&\left((\overset{k_{-2}}{\mathbf{0}},\overset{i_{-1}}{\mathbf{1}}_{n_{-1}},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_{-1}}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_{-1},\mathbf{0})\right)_{k_{-2}+1,k_{-1}},\\ &\left((\overset{k_{-1}}{\mathbf{0}},\overset{i_0}{\mathbf{1}}_{n_0},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_0}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_0,\mathbf{0})\right)_{k_{-1}+1,k_0},\\ &\left((\overset{k_0}{\mathbf{0}},\overset{i_1}{\mathbf{1}}_{n_1},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_1}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_1,\mathbf{0})\right)_{k_0+1,k_1},\ldots\Bigg).\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{x}=(\overset{k_{-1}}{\mathbf{0}},\overset{i_0}{\mathbf{1}}_{n_0},\boldsymbol{w}_0,\overset{k_0}{\mathbf{0}}_{m_0},\overset{i_1}{\mathbf{1}}_{n_1},\boldsymbol{w}_1,\overset{k_1}{\mathbf{0}}_{m_1},\ldots)$ に対して，

$$\begin{aligned}\forall t\ge 0,\quad \boldsymbol{h}^t_{R154}(\boldsymbol{x})=\Bigg(\mathbf{0},&\left((\overset{k_{-1}}{\mathbf{0}},\overset{i_0}{\mathbf{1}}_{n_0},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_0}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_0,\mathbf{0})\right)_{k_{-1}+1,k_0},\\ &\left((\overset{k_0}{\mathbf{0}},\overset{i_1}{\mathbf{1}}_{n_1},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_1}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_1,\mathbf{0})\right)_{k_0+1,k_1},\ldots\Bigg).\end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{x}=(\ldots,\overset{i_{-1}}{\mathbf{1}}_{n_{-1}},\boldsymbol{w}_{-1},\overset{k_{-1}}{\mathbf{0}}_{m_{-1}},\overset{i_0}{\mathbf{1}}_{n_0},\boldsymbol{w}_0,\mathbf{0})$ に対して，

$$\begin{aligned}\forall t\ge 0,\quad \boldsymbol{h}^t_{R154}(\boldsymbol{x})=\Bigg(\ldots,&\left((\overset{k_{-2}}{\mathbf{0}},\overset{i_{-1}}{\mathbf{1}}_{n_{-1}},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_{-1}}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_{-1},\mathbf{0})\right)_{k_{-2}+1,k_{-1}},\\ &\left((\overset{k_{-1}}{\mathbf{0}},\overset{i_0}{\mathbf{1}}_{n_0},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_0}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_0,\mathbf{0})\right)_{k_{-1}+1,\to}\Bigg).\end{aligned}$$

(4) $\boldsymbol{x}=(\overset{k_{-1}}{\mathbf{0}},\overset{i_0}{\mathbf{1}}_{n_0},\boldsymbol{w}_0,\overset{k_0}{\mathbf{0}}_{m_0},\overset{i_1}{\mathbf{1}}_{n_1},\boldsymbol{w}_1,\overset{k_1}{\mathbf{0}}_{m_1},\ldots,\overset{i_p}{\mathbf{1}}_{n_p},\boldsymbol{w}_p,\mathbf{0})$ に対して，

$$\begin{aligned}\forall t\ge 0,\quad \boldsymbol{h}^t_{R154}(\boldsymbol{x})=\Bigg(&\left((\overset{k_{-1}}{\mathbf{0}},\overset{i_0}{\mathbf{1}}_{n_0},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_0}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_0,\mathbf{0})\right)_{\leftarrow,k_0},\\ &\left((\overset{k_0}{\mathbf{0}},\overset{i_1}{\mathbf{1}}_{n_1},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_1}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_1,\mathbf{0})\right)_{k_0+1,k_1},\ldots,\\ &\left((\overset{k_{p-1}}{\mathbf{0}},\overset{i_p}{\mathbf{1}}_{n_p},\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{h}^t_{R154}(\overset{i_p}{\mathbf{0}},\boldsymbol{w}_p,\mathbf{0})\right)_{k_{p-1}+1,\to},\ldots\Bigg)\end{aligned}$$

Theorem 3.3 は，ルール番号 154 のセルオートマトンが生成する時空間パターンが，様々な $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$ を初期 configuration とする時空間パターンを切り張りしたものであり，従ってその時空間パターンの生成のありようが完全にわかったことになる．また，$\mathcal{W}$ 上でのルール 154 の dynamics がルール 154 に固有のものではなく，C_s に属するセルオートマトンに共通であることことから，ルール 154 が生成する時空間パターンが基本的にルール 90 によって定まっていると言ってもよいことがわかる．

References

[1] G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchini and C.Quaranta Vogliotti, Pattern growth in elementary cellular automata, Theoretical Computer Science, **145**(1995), 1-26.

[2] G. Cattaneo and L. Margara, Generalized sub-shifts in elementary cellular automata: the "strange case" of chaotic rule 180, Theoretical Computer Science, **201**(1998), 171-187.

[3] M.Gardner, Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", Scietific American, **223**(1970), 120-123.

[4] A. Ilachinski, Cellular Automata - A Discrete Universe, World Scientific, (2001).

[5] C. G. Langton, STUDYING ARTIFICIAL LIFE WITH CELLULAR AUTOMATA, Physica **22D**(1986), 120-149.

[6] C. G. Langton, Life at the Edge of Chaos, ARTIFICIAL LIFE II, PROCEEDINGS OF THE WORKSHOP ON ARTIFICIAL LIFE HELD FEBRUARY, 1990 IN SANTAFE, NEW MEXICO, edited by Christopher G.Langton, Charles Taylor, J.Doyne Farmer and Steen Rasmussen, Addison-Wesley Publishing Company, 41-91.

[7] J. von Neumann, Theory of Self - Reproducing Automata, University of Illinois Press, Urbana and Chicago, (1966).

[8] F. Ohi and Y. Takamatsu, Time-Space Pattern and Periodic Property of Elementary Cellular Automata - Sierpinski Gasket and Partially Sierpinski Gasket -, Journal of Industrial and Applied Mathematics, **18**(2001), 59-73.

[9] F. Ohi and K. Mabuchi, Time-Space Pattern and Dynamics Determined by Elementary Cellular Automata, unde submission.

[10] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, Review of Modern Physics, **55**(1983), 601-644.

[11] S. Wolfram, UNIVERSALITY AND COMPLEXITY IN CELLULAR AUTOMATA, Physica **10D**(1984),1-35.

[12] S. Wolfram, A NEW KINDS OF SCIENCE, Wolfram Media, Inc., (2002).