数理解析研究所講究録 1306 巻 2003 年 11-17

ポアソン到着を伴う所有期間最大化最適停止問題について

東京大学・総合文化研究科　　来島愛子 (Aiko Kurushima)
Graduate School of Arts and Sciences,
University of Tokyo
南山大学・情報管理学科　　穴太克則 (Katsunori Ano)
Department of Information Systems and Quantitative Sciences,
Nanzan University

概要

古典的秘書問題の一般化であるポアソン到着問題において採用した相対的ベストの所有期間を最大化することを考える．ポアソン過程の intensity λ がガンマ分布 $G(r,1/a)$，r は自然数，$a>0$ を事前分布としてもつ場合について OLA 停止規則を求めた．また，$r=2$ のとき OLA 停止規則が最適停止規則であることを示す．

1 はじめに

秘書問題の一般化であるポアソン到着問題についてベストを得る確率を最大にすることを目的として，Cowan and Zabczyk (1978)，Bruss (1989)，Kurushima and Ano (2002) の研究がある．

また，ポアソン到着問題においてベストの候補を所有する期間を最大化することを目的とした最適停止問題を考えることができる．これまで所有期間最大化問題については Ferguson, Hardwick, and Tamaki (1992) により有限の n の場合，またポアソン到着問題のパラメータの事前分布が指数分布の場合などが解かれている．今回の発表では，ポアソン到着問題の intensity λ が事前分布としてガンマ分布 $G(r,1/a)$，r は自然数，$a>0$ の場合を考える．この設定で OLA 停止規則を求め，特に $r=2$ の場合については OLA 停止規則の最適性を示す．

2 OLA 停止規則

ある所与の時刻 T までアパートを調べる機会は intensity λ のポアソン過程に従って到着する．調べるごとにすぐに，このアパートに決めるか否かを決めなければならない．時間間隔 $(0,T]$ の間に到着するアパートはランク付け可能であり，最も良いランクのアパートをベストと呼ぶ．現在までに到着しているアパートの中での最も良いランクのアパートを相対的ベストと呼ぶ．言うまでもないが，時刻 T に到着した相対的ベストはベストとなる．時間間隔 $(0,T]$ の間に調べることができるアパートの中からベストのアパートを保持する期間を最大にする最適停止時刻を求めたい．

ポアソン過程の intensity λ が未知で，その事前分布がガンマ分布 $G(r,1/a)$，r は自然数，$a>0$ をもつという問題を考える．ポアソン過程 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ の到着時刻を $\tau_1,\tau_2,\cdots$ とする．また，λ の

密度関数は

$$g(\lambda) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} e^{-a\lambda} \lambda^{r-1} I(\lambda \geq 0). \tag{1}$$

このとき，次の補題により，$\tau_1 = s_1, \cdots, \tau_i = s$ が与えられたときの $N(T)$ の事後分布が与えられる．証明は Ano(2000) を参照されたい．

補題 1 $\tau_1 = s_1, \cdots, \tau_i = s$ が与えられたときの $N(T)$ の事後分布は τ_i と i の値のみに依存し，パラメータ $r+i$, $(s+a)/(T+a)$ の負の二項分布，

$$P(N(T) = n | \tau_1 = s_1, \ldots, \tau_i = s) = \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r+i)(n-i)\,!} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r+i} \left(\frac{T-s}{T+a}\right)^{n-i} \tag{2}$$

になる．

$U_i^{(r)}(s)$ を時刻 $\tau_i = s$ で到着したアパートが相対的ベストアパートであるとき，このアパートを選択したときの真のベストを得る最大確率とする．公式

$$\frac{(n+r-1)\,!}{n} = (r-1)\,! \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(n+j-1)\,!}{j\,!}, r = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

を用いると，ガンマ事前分布 $G(r, 1/a)$ に対する $U_i^{(r)}(s)$ は

$$\begin{aligned} U_i^{(r)}(s) &= E\left(\frac{i}{N(T)} \middle| \tau_i = s\right) \\ &= \sum_{n \geq i} \left(\frac{i}{n}\right) P(N(T) = n | \tau_i = s) \\ &= \frac{i(r-1)\,!}{(i+r-1)\,!} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+j-1)\,!}{j\,!} \theta^{r-j}. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$\theta = (s+a)/(T+a)$.

時刻 $\tau_i = s$ で相対的ベストアパートが到着し，それ以降のはじめての相対的ベストアパートが $i+k$ 番目であり，その到着時刻が $\tau_{i+k} = s+u, (u > 0)$ である推移確率を $p_{(i,s)}^{(k,u)}$ とする．ガンマ事前分布 $G(r, 1/a)$ に対する推移確率 $p_{(i,s)}^{(k,u)}$ はポアソン過程の到着時間間隔分布がガンマ分布であり，$\tau_i = s$ が与えられたときの λ の事後分布 $g(\lambda | \tau_i = s)$ は

$$g(\lambda | \tau_i = s) = \frac{\lambda^{i+r-1} e^{-\lambda(s+a)}}{\int_0^\infty u^{i+r-1} e^{-u(s+a)} du} = \frac{\lambda^{i+r-1} e^{-\lambda(s+a)}}{\Gamma(i+r)/(s+a)^{i+r}} \tag{5}$$

で与えられる．i 番目に相対的ベストが出たときそのあとはじめての相対的ベストが $i+k$ 番目である条件付確率が $i/((i+k-1)(i+k))$ であるから，

$$\begin{aligned} p_{(i,s)}^{(k,u)} &= \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{i}{(i+k-1)(i+k)} \frac{\lambda^{i+r-1} e^{-\lambda(s+a)} (s+a)^{i+r}}{\Gamma(i+r)} d\lambda \\ &= \frac{i(s+a)^{i+r} u^{k-1}}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)(i+k)(i+k-1)} \int_0^\infty \lambda^{i+r+k-1} e^{-\lambda(s+a+u)} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(i+k+r)}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)} \frac{i}{(i+k)(i+k-1)} \frac{s+a}{(s+a+u)^2} \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

時刻 s に相対的ベストが到着したとき，このアパートを採用したときの期待所有期間を $y_i^{(r)}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
y_i^{(r)}(s) &= \int_0^{T-s} u \sum_{k\geq 1} p_{(i,s)}^{(k,u)} du + (T-s)U_i(s) \\
&= \int_0^{T-s} u \sum_{k\geq 1} \frac{\Gamma(i+k+r)}{\Gamma(k)\Gamma(i+r)} \frac{i}{(i+k)(i+k-1)} \frac{s+a}{(s+a+u)^2} \\
&\quad \times \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r-1} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k-1} du \\
&\quad +(T-s)\frac{i(r-1)\,!}{(i+r-1)\,!} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+j-1)\,!}{j\,!} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j}.
\end{aligned}
$$

$$
y_i^{(r)}(s) = \frac{(r-1)\,!\,i\,!}{(i+r-1)\,!} z_i^{(r)}(s)
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
z_i^{(r)}(s) &= \frac{(i+r-1)\,!}{(r-1)\,!\,i\,!} y_i^{(r)}(s) \\
&= \frac{1}{(i-1)\,!(r-1)\,!} \int_0^{T-s} \sum_{k\geq 1} \frac{(i+k+r-1)!}{(k-1)!} \frac{1}{(i+k)(i+k-1)} \\
&\quad \times \left(\frac{s+a}{s+a+u}\right)^{i+r} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k} du \\
&\quad +(T-s) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(i+j-1)\,!}{(i-1)\,!j\,!} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j}.
\end{aligned}
$$

公式 (3) を用いると，右辺第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\text{右辺第 1 項} &= \int_0^{T-s} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{j} \sum_{k\geq 1} \frac{(i+k+l-2)!}{(i-1)!(k-1)!l\,!} \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{i+r} \left(\frac{u}{s+a+u}\right)^{k} du \\
&= \int_0^{T-s} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{j} \binom{i+l-1}{l} \left(\hat{\theta}^{r-l} - \hat{\theta}^{r-l+1}\right) du.
\end{aligned}
$$

ここで，$\hat{\theta} = (s+a)/(s+a+u)$ とする．

さらに計算すると，

$$
\begin{aligned}
z_i^{(r)}(s) &= (s+a)\binom{i+r-2}{r-1} \ln\frac{T+a}{s+a} \\
&\quad +(s+a)\sum_{j=0}^{r-2} \binom{i+j-1}{j} \frac{1}{r-j-1} \left\{1 - \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\}.
\end{aligned}
$$

したがって，期待所有期間 $y_i^{(r)}(s)$ は

$$
\begin{aligned}
y_i^{(r)}(s) &= \frac{i}{i+r-1}(s+a)\ln\frac{T+a}{s+a} \\
&\quad +\frac{i!(r-1)!}{(i+r-1)!}(s+a)\sum_{j=0}^{r-2} \binom{i+j-1}{j} \frac{1}{r-j-1} \left\{1 - \left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\}.
\end{aligned}
$$

時刻 $s_i = s$ に到着した i 番目のアパートが相対的ベストのとき，このアパートを採用せずに，その後はじめて到着した相対的ベストを採用したときの期待所有期間は

$$\int_0^{T-s} p_{(i,s)}^{(k,u)} y_{i+k}^{(r)}(s+u)du \tag{7}$$

と表される．簡単のため，(7) を $z_i^{(r)}(s)$ と同様に定数倍したものを計算すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{(i+r-1)!}{(r-1)!i!}\int_0^{T-s} p_{(i,s)}^{(k,u)} y_{i+k}^{(r)}(s+u)du \\
&= \binom{i+r-2}{r-1}\frac{s+a}{2}\left(\ln\frac{T+a}{s+a}\right)^2 \\
&\quad +\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{s+a}{r-j-1}\ln\frac{T+a}{s+a}\left\{1-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{s+a}{(r-j-1)(r-l-1)}\left\{1-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-l-1}\right\} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{s+a}{(r-j-1)(j-l)}\left\{\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-l-1}-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\}.
\end{aligned}$$

したがって，OLA 関数は

$$G_i^{(r)}(s) = y_i^{(r)}(s) - \int_0^{T-s} p_{(i,s)}^{(k,u)} y_{i+k}^{(r)}(s+u)du$$

となり，OLA 停止領域 B_r は

$$B_r = \{(i,s) : G_i^{(r)}(s) \geq 0\}$$

で与えられる．ここで，(i,s) を，時刻 s に i 番目の選択肢が到着し，その選択肢が相対的ベストである状態とする．また，$G_i^{(r)}(s) \geq 0$ ならば，$G_{i+k}^{(r)}(s+u) \geq 0$，$k = 0,1,2,\ldots$，$u \in (0, T-s]$ が成り立つならば，すなわち，$P((i+k, s+u) \in B_r | (i,s) \in B_r) = 1$ ならば，B_r は "closed" であると呼ばれ，B_r が最適停止領域となり，OLA 停止規則 $\tau = \min\{0 < s \leq T : (i,s) \in B_r\}$ が最適停止時刻となることが知られている（Ross(1970) または穴太 (2000) 3 章参照）．

さらに，

$$H_i^{(r)}(s) = \frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!}\frac{1}{s+a}G_i^{(r)}(s)$$

とおくと，

$$B_r = \{(i,s) : H_i^{(r)}(s) \geq 0\}$$

と書き直せる．また，計算の結果，

$$\begin{aligned}
H_i^{(r)}(s) &= \binom{i+r-2}{r-1}\ln\frac{T+a}{s+a}\left(1-\frac{1}{2}\ln\frac{T+a}{s+a}\right) \\
&\quad +\sum_{j=0}^{r-2}\binom{i+j-1}{j}\frac{1}{r-j-1}\ln\frac{T+a}{s+a}\left\{1-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\}\left(1-\ln\frac{T+a}{s+a}\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{(r-j-1)(r-l-1)}\left\{1-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-l-1}\right\} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{r-2}\sum_{l=0}^{j-1}\binom{i+l-1}{l}\frac{1}{(r-j-1)(j-l)}\left\{\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-l-1}-\left(\frac{s+a}{T+a}\right)^{r-j-1}\right\}.
\end{aligned}$$

3 最適停止規則 ($r = 2$の場合)

前節で求めたOLA停止領域の $r = 2$ の場合における最適性を示す.

$$\begin{aligned} H_i^{(2)}(s) &= i \ln \frac{T+a}{s+a} \left(1 - \frac{1}{2} \ln \frac{T+a}{s+a}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{s+a}{T+a}\right)\left(1 - \ln \frac{s+a}{T+a}\right) \end{aligned}$$

最適性を示すために, OLA関数の単調性を調べる.

補題 2

(i) $H_i^{(2)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_{i+1}^{(2)}(s) \geq 0.$
(ii) $H_i^{(2)}(s) \geq 0 \Longrightarrow H_i^{(2)}(s+u) \geq 0.$

証明

(i)

$$\ln \frac{T+a}{s+a} \geq 0$$

かつ

$$1 - \frac{T+a}{s+a} \geq 0$$

が常に成り立ち, また $1 - (1/2)\ln((T+a)/(s+a)) \leq 0$ のとき,

$$1 - \ln \frac{T+a}{s+a} \leq 0$$

である. よって, $H_i^{(2)}(s) \geq 0$ のとき,

$$1 - \frac{1}{2} \ln \frac{T+a}{s+a} \geq 0$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} H_{i+1}^{(2)}(s) &= H_i^{(2)}(s) + \ln \frac{T+a}{s+a} \left(1 - \frac{1}{2} \ln \frac{T+a}{s+a}\right) \\ &\geq H_i^{(2)}(s) \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) (i) と同様に $H_i^{(2)}(s) \geq 0$ のとき, $1 - (1/2)\ln((T+a)/(s+a)) \geq 0$ が成り立つ. つまり,

$$\frac{s+a}{T+a} \geq \frac{1}{e^2}.$$

$1 - \ln(T+a)/(s+a)) \geq 0$, すなわち $(s+a)/(T+a) \geq 1/e$ ならば,

$$1 - \ln \frac{T+a}{s+a+u} \geq 0$$

かつ

$$1 - \frac{1}{2} \ln \frac{T+a}{s+a} \geq 0$$

となり, $H_i^{(2)}(s+u) \geq 0$ が成り立つ.

よって，$1/e^2 \le (s+a)/(T+a) < 1/e$ の範囲について調べる．$(s+a)/(T+a) = \theta$，$H_i^{(2)}(s) = h_i^{(2)}(\theta)$ とおくと，

$$h_i^{(2)}(\theta) = -i\ln\theta(1+\frac{1}{2}\ln\theta) + (1-\theta)(1+\ln\theta)$$

と書き直すことができる．$h_i^{(2)}(\theta) = 0$ をみたす θ を $t_i^{(2)*}$ とおき，$t_i^{(2)*} \le (s+a)/(T+a) < 1/e$ について $h_i^{(2)}(\theta) \ge 0$ を示せばよい．
$\theta < 1/e$ において $h_i^{(2)}(\theta)$ は増加関数であるので，$t_i^{(2)*} \le (s+a)/(T+a) < 1/e$ において $h_i^{(2)}(\theta) > 0$．よって，示された． ■

定理 1 ポアソン過程のパラメータ λ の事前分布がガンマ分布 $G(2, 1/a), a > 0$ に従うとき，所有期間を最大化する最適停止規則は $s_i^{(2)*}$ 以降に到着する最初の相対的ベストを選択する，である．すなわち，最適停止時刻 τ_2^* は

$$\tau_2^* = \min\{s_i \in [s_i^{(2)*}, T] : X_i = 1\}.$$

$s_i^{(2)*}$ は $H_i^{(2)}(s) = 0$，すなわち，

$$i\ln\frac{T+a}{s+a}\left(1-\frac{1}{2}\ln\frac{T+a}{s+a}\right) + \left(1-\frac{s+a}{T+a}\right)\left(1-\ln\frac{s+a}{T+a}\right) = 0 \tag{8}$$

の唯一解として定まる．ここで，X_i は i 番目に到着したアパートの相対ランクとする．

証明　上の補題の (i) より

$$H_i^{(2)}(s) \ge 0 \Longrightarrow H_{i+1}^{(2)}(s) \ge 0.$$

また，(ii) より

$$H_i^{(2)}(s) \ge 0 \Longrightarrow H_i^{(2)}(s+u) \ge 0.$$

よって，

$$H_i^{(2)}(s) \ge 0 \Longrightarrow H_{i+k}^{(2)}(s+u) \ge 0$$

が成り立つ．したがって，OLA 停止領域 B_2 は closed となり，最適停止領域であることが示された．すなわち，B_2 への first hitting time である τ_2^* が最適停止時刻となり，

$$\tau_2^* = \min\{s \ge s_i^{(2)*} : (i,s) \in B_2\} = \min\{s \in [s_i^{(2)*}, T] : X_i = 1\}.$$

■

定理 2

$$\lim_{i\to\infty} s_i^{(2)*} = \left[\frac{T+a}{e^2} - a\right]^+$$

証明　$H_i^{(2)} = 0$ のとき，

$$\ln\frac{s+a}{T+a}\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{s+a}{T+a}\right) = \left(1-\frac{s+a}{T+a}\right)\left(1-\ln\frac{s+a}{T+a}\right)\Big/ i.$$

$i \to 0$ のとき，RHS$\to 0$ であり，$1 + (1/2)\ln((s+a)/(T+a)) \to 0$．よって，示された． ■

参考文献

[1] 穴太克則，(2000)，"タイミングの数理——最適停止問題"，朝倉書店．

[2] Ano, K. and Ando, M. (2000), "A note on Bruss' stopping problem with random availability," *Game Theory, Optimal Stopping, Probability and Statistics*, IMS Lecture Note, F. T. Bruss and L. Le. Cam eds., **35**, 71-82.

[3] Bruss, F. T. (1987), "On an optimal selection problem by Cowan and Zabczyk," J. Appl. Prob., **24**, 918-928.

[4] Bruss, F. T. (2000), "Sum the odds to one and stop," *Ann. Prob.*, **28**, 1384-1391.

[5] Bruss, F. T. and Paindaveine, D. (2000), "Selecting a sequence of last successes in independent trials," *J. of Appl. Prob.*, **37**, 389-399.

[6] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmond, D. (1971), *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*, Houghton Miffilin Co., Boston.

[7] Cowan, R. and Zabczyk, J. (1978), "An optimal selection problem associated with the Poisson process," Theory Prob. Appl., **23**, 584-592.

[8] Ferguson, T. S., Hardwick, J. P., and Tamaki, M. (1992), "Maximizing the duration of owning a relatively best object," Contemporary Mathematics, Bruss, F. T., Ferguson, T. S. and Samuels, S. M. eds., **125**, 37-58.

[9] Kurushima, A. and Ano, K. (2002), "A Poisson arrival selection problem for Gamma prior intensity with natural number parameter," Sci. Math. Japonicae Online, **7**, 209-223.

[10] Ross, S. M. (1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco.

[11] Sakaguchi, M. (1989), "Some infinite problems in classical secretary problems," Math. Japo., **34**, 307-318.

[12] Tamaki, M. and Mazalov, V. V. (2002), "An explicit formula for the limiting gain in the full information duration problem," Workshop on Optimal Stopping and Stochastic Games, Będlewo, Poland.